Bulletin de la S. M. F.

P. Schapira

Solutions hyperfonctions des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 97 (1969), p. 243-255

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1969__97__243_0>

Bull. Soc. math. France,
97, 1969, p. 243 à 255.

SOLUTIONS HYPERFONCTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

PAR

PIERRE SCHAPIRA (*).

Introduction. — C'est en 1957 que Hans LEWY a donné le premier exemple d'une équation aux dérivées partielles linéaire sans solution dans l'espace des germes de distributions en un point.

Depuis, HÖRMANDER [3] a donné une condition nécessaire de « résolubilité » des opérateurs différentiels, et enfin NIRENBERG et TRÈVES [6] ont donné, dans le cas des opérateurs du premier ordre à coefficients analytiques, une condition nécessaire et suffisante de résolubilité locale dans l'espace des distributions.

Nous montrons dans cet article que la condition de Nirenberg et Trèves est aussi une condition nécessaire et suffisante de résolubilité dans l'espace des hyperfonctions de SATO [5], [1]. En ce qui concerne la condition nécessaire, nous adaptons la méthode de HÖRMANDER au cas des hyperfonctions, la « difficulté » provenant du fait que l'espace des hyperfonctions sur un ouvert n'est pas séparé.

Pour démontrer que la condition de Nirenberg et Trèves est suffisante, nous utilisons leur théorème, et aussi le fait qu'un opérateur différentiel holomorphe du premier ordre non dégénéré sur $\mathbf{C}^n$ est localement, et à un changement de coordonnées près, à coefficients constants.

André MARTINEAU nous a initié à la théorie des hyperfonctions et nous a beaucoup stimulé dans ce travail, tant par ses conseils que par l'intérêt qu'il y portait; nous l'en remercions sincèrement.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS. — On se place dans l'espace $\mathbf{R}^n$, ou éventuellement dans son complexifié $\mathbf{C}^n$.

Nous désignerons respectivement par $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ les faisceaux sur $\mathbf{R}^n$ des fonctions analytiques, des fonctions de classe C^∞, des distributions, des hyperfonctions [5], [7]. Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on notera donc par $B(\Omega)$ les hyperfonctions définies sur Ω.

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, en instance de soutenance. Article principal.

L'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact sera noté par $\mathcal{D}$. Si K est un compact réel, $\mathcal{A}'_K$ désignera l'espace de Fréchet des fonctionnelles analytiques portables par K [4]. Si $\tilde{\Omega}$ est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, $H(\tilde{\Omega})$ désignera l'espace de Fréchet des fonctions holomorphes sur $\tilde{\Omega}$. Pour les autres notations, et en particulier celles concernant les opérateurs différentiels, nous renvoyons au livre de L. Hörmander [3]. Tous les opérateurs différentiels considérés seront linéaires à coefficients analytiques.

1. Quelques propriétés des espaces d'hyperfonctions.

Soient Ω un ouvert relativement compact de $\mathbf{R}^n$, $K=\overline{\Omega}$, et P un opérateur différentiel à coefficients analytiques à valeurs dans $\mathbf{C}$ définis au voisinage de K.

Proposition 1. — *Soit F un espace de Fréchet contenu topologiquement dans $\mathcal{A}'_K$. — Soit F/Ω la restriction de F à $B(\Omega)$. Supposons que*

$$PB(\Omega)\supset F/\Omega.$$

Alors, pour tout couple d'ouverts complexes $\tilde{\Omega}_1$, $\tilde{\Omega}_2$, $\tilde{\Omega}_1\supset K$, $\tilde{\Omega}_2\supset(K-\Omega)$, avec $\tilde{\Omega}_2\subset\tilde{\Omega}_1$, tels que les coefficients de P soient holomorphes dans $\tilde{\Omega}_1$, il existe des compacts $K_1\subset\tilde{\Omega}_1$, $K_2\subset\tilde{\Omega}_2$ et une semi-norme continue p sur F tels que

$$\forall\, u\in F,\quad \forall\, f\in H(\tilde{\Omega}_1),$$
$$|\langle u,f\rangle|\leq p(u)\Big[\sup_{K_1}|{}^tPf|+\sup_{K_2}|f|\Big].$$

Le produit $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ étant le produit scalaire de définition de la dualité entre $\mathcal{A}'_K$ et $\mathcal{A}(K)$, et ${}^tP$ désignant le transposé de P pour cette dualité.

Démonstration. — On sait, par [5], que

$$B(\Omega)\simeq\mathcal{A}'_K/\mathcal{A}'_{K-\Omega}.$$

Si $u\in\mathcal{A}'_K$, u/Ω n'est autre que la classe de u dans $\mathcal{A}'_K/\mathcal{A}'_{K-\Omega}$. De plus, P opère sur les fonctionnelles analytiques en diminuant leur support, donc opère dans $B(\Omega)$ par

$$P(\text{classe de } u)=\text{classe de }(Pu)\qquad \text{si}\quad u\in\mathcal{A}'_K.$$

Donc, si $u\in\mathcal{A}'_K$ et $u/\Omega\in PB(\Omega)$, c'est que $u=Pv+\rho$ avec $v\in\mathcal{A}'_K$, $\rho\in\mathcal{A}'_{K-\Omega}$.

Il est alors immédiat de constater que la forme bilinéaire sur $F\times H(\tilde{\Omega}_1)$

$$(u,f)\mapsto\langle u,f\rangle$$

est séparément continue quand F est muni de sa topologie d'espace de Fréchet (plus fine que celle induite par $\mathcal{A}'_K$) et $H(\tilde{\Omega}_1)$ de la topologie métrisable limite projective de ${}^tPH(\tilde{\Omega}_1)$ et $H(\tilde{\Omega}_2)$, puisque si $u \in F$, $u = Pv + \rho$,

$$\langle u, f\rangle = \langle v, {}^tPf\rangle + \langle \rho, f\rangle.$$

Cette forme bilinéaire est donc continue d'après un théorème classique, ce qui achève la démonstration.

Désignons par B_0 l'espace des germes d'hyperfonctions à l'origine.

Proposition 2. — *Soient K un voisinage compact de l'origine dans $\mathbf{R}^n$, F un sous-espace de Fréchet de $\mathcal{A}'_K$ et F_0 son image dans B_0.*

Soit P un opérateur différentiel à coefficients analytiques au voisinage de K.

Supposons que $PB_0 \supset F_0$. Alors, il existe un ouvert ω tel que $0 \in \omega \subset K$, avec $PB(\omega) \supset F/\omega$.

Démonstration. — Soit ω_n un système fondamental de voisinages ouverts de 0 contenus dans K, et soit

$$\mathcal{A}'_{K-\{0\}} = \varinjlim_n \mathcal{A}'_{K-\omega_n}.$$

On sait que

$$B(\omega_n) \simeq \mathcal{A}'_K/\mathcal{A}'_{K-\omega_n}.$$

Il en résulte que

$$B_0 \simeq \mathcal{A}'_K/\mathcal{A}'_{K-\{0\}}.$$

Soit $\overline{P}$ l'opérateur défini comme suit :

$$\overline{P}:\quad \mathcal{A}'_K \times \mathcal{A}'_{K-\{0\}} \to \mathcal{A}'_K,$$
$$\overline{P}(u, v) = Pu + v.$$

L'hypothèse implique que

$$\overline{P}(\mathcal{A}'_K \times \mathcal{A}'_{K-\{0\}}) \supset F.$$

Comme F et $\mathcal{A}'_{K-\omega_n}$ sont des espaces de Fréchet, cela implique, d'après un théorème classique ([2], p. 16), qu'il existe un n tel que

$$\overline{P}(\mathcal{A}'_K \times \mathcal{A}'_{K-\omega_n}) \supset F,$$

donc que

$$PB(\omega_n) \supset F/\omega_n.$$

Corollaire 1. — *Supposons que $PB_0 = B_0$. Alors il existe un ouvert $\omega \ni 0$ tel que $PB(\omega) = B(\omega)$.*

Soit K un voisinage compact de 0. Appliquons la proposition précédente avec $F = \mathcal{A}'_K$. Il existe $\omega \ni 0$, tel que

$$PB(\omega) \supset \mathcal{A}'_K/\omega.$$

D'où

$$P\,B(\omega) = B(\omega),$$

puisque toute hyperfonction sur ω est la restriction à ω d'une fonctionnelle analytique sur K.

Remarque 1. — On sait que si P est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, on a, pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$,

$$P\,B(\Omega) = B(\Omega).$$

On en conclut que, pour tout ouvert borné, l'application

$$\mathcal{A}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{A}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{A}(\overline{\Omega} - \Omega),$$
$$f \mapsto ({}^tP f, f)$$

est d'image fermée, et par suite que l'espace $N_{{}^tP}(\mathcal{A}(\overline{\Omega}))$ des solutions homogènes de ${}^tP$ dans $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ est fermé dans l'espace $\mathcal{A}(\overline{\Omega} - \Omega)$.

Remarque 2. — Nous pouvons étendre aux hyperfonctions une remarque de Trèves ([10], p. 67) :

Soient Ω la couronne $0 < a < |x| < b < \infty$ dans le plan, et P l'opérateur

$$\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right).$$

En coordonnées polaires, $P = \partial/\partial\theta$. Il est clair que, $\forall\, x_0 \in \Omega$,

$$P\,B_{x_0} = B_{x_0},$$

mais on n'a pas $P\,B(\Omega) = B(\Omega)$, car sinon on en conclurait que $N_{{}^tP}\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ serait fermé dans $N_{{}^tP}\mathcal{A}(\partial\Omega)$, donc que l'espace des fonctions analytiques au voisinage de l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ serait fermé dans l'espace des fonctions analytiques au voisinage de $\{a\} \cup \{b\}$, ce qui est évidemment faux.

2. Condition nécessaire d'existence.

Dans ce paragraphe et les suivants, P désignera un opérateur du *premier ordre* à coefficients analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n (n > 1)$, et dont la partie principale P_1 ne s'annule pas à l'origine. La démonstration de la proposition suivante est une adaptation au cas des hyperfonctions d'une démonstration de Hörmander ([3], théorème 6.1.4).

Proposition 3. — *Supposons qu'il existe une fonction ω analytique au voisinage de l'origine telle que*

$$P_1(x, \operatorname{Grad}\omega) = 0,$$
$$\operatorname{Im}\omega(x) = 0 \quad \textit{si et seulement si } x = 0.$$

Alors, pour tout ouvert Ω voisinage de l'origine et suffisamment petit, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si H_ε désigne la restriction à Ω des fonctions holomorphes dans la bande $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$, on ait

$$PB(\Omega) \not\supset H_\varepsilon.$$

Démonstration. — Soit Ω un voisinage de o suffisamment petit pour que Ω soit borné et que $\operatorname{Im}\omega \geqq 3c$, $c > 0$, sur $\partial\Omega$ (si $\operatorname{Im}\omega \leqq 0$, on remplace ω par $-\omega$), et pour qu'une solution α de ${}^tP\alpha = \theta$, $\alpha(0) = 0$, où θ est le terme de degré o de ${}^tP$, soit analytique, de même que ω, et les coefficients de P au voisinage de $\overline{\Omega}$.

Soit $\xi = \operatorname{Grad}\omega(0)$. Le vecteur ξ appartient à $\mathbf{R}^n$ d'après l'hypothèse sur les zéros de $\operatorname{Im}\omega$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) \neq 0$.

Soient $\varepsilon > 0$ tel que $\langle \operatorname{Im} z, y\rangle < c$ si $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$, et y point du support de φ. Raisonnons par l'absurde.

Supposons que $PB(\Omega) \supset H_\varepsilon$. Soient $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_2 \subset \tilde{\Omega}_1$ des voisinages complexes de $\overline{\Omega}$, et $\partial\Omega$ tels que les coefficients de P, ω, α soient holomorphes dans $\tilde{\Omega}_1$ et que l'inégalité $\operatorname{Im}\omega \geqq 2c$ soit satisfaite sur $\tilde{\Omega}_2$.

D'après la proposition 1, il existe des compacts $K_1 \subset \tilde{\Omega}_1$, $K_2 \subset \tilde{\Omega}_2$, $K_3 \subset \{|\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}$, et une constante A tels que

$$(\bigstar) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left| \displaystyle\int_{\Omega} fg\,dx \right| \leqq A \sup_{K_3} |g| \left[\sup_{K_1} |{}^tPf| + \sup_{K_2} |f| \right] \\ \qquad\qquad \text{si} \quad g \in H_\varepsilon \quad \text{et} \quad f \in H(\tilde{\Omega}_1), \end{array} \right.$$

car l'application de H_ε dans $B(\Omega)$ se factorise par

$$H_\varepsilon \xrightarrow[i]{} \mathcal{A}'_{\overline{\Omega}} \to B(\Omega),$$

où la deuxième flèche est la restriction, et où i est défini par l'égalité

$$\langle i(g), f\rangle = \int_{\overline{\Omega}} fg\,dx.$$

Soient alors

$$f_\tau = e^{-\alpha} e^{i\tau\omega},$$
$$g_\tau(x) = \tau^n \hat{\varphi}(\tau x).$$

On a

$${}^tPf_\tau = 0,$$
$$\sup_{K_3} |g_\tau| \leqq B \exp c\tau$$

et

$$\sup_{K_2} |f_\tau| \leqq C \exp(-2c\tau).$$

Donc le deuxième membre de l'inégalité $(\bigstar)$ tend vers zéro quand τ tend vers $+\infty$.

Par contre,

$$\int_{\Omega} f_\tau g_\tau \, dx = \int_{\tau\Omega} \hat{\varphi}(x) f_\tau\left(\frac{x}{\tau}\right) dx,$$

comme $\operatorname{Im}\omega(x) = q_e(x) + O(|x|^{e+1})$, où q_e est un polynôme homogène de degré $e \geq 2$, ceci tend (d'après le théorème de Lebesgue) vers

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}(x)\, e^{i\langle x, \xi\rangle} dx = \varphi(\xi) \neq 0.$$

L'hypothèse que $PB(\Omega) \supset H_\varepsilon$ est donc fausse.

C. Q. F. D.

Corollaire 1. — *Sous les hypothèses de la proposition* 3, *pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, *il existe* $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ *tel que*

$$\varphi \star f \notin PB_0.$$

Démonstration. — En effet, sinon on aurait

$$\varphi \star \mathcal{E}(\mathbf{R}^n) \subset PB_0.$$

Soient alors K un voisinage compact de 0, et $(\varphi\star\mathcal{E}(\mathbf{R}^n))_K$ l'image de $\varphi\star\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{A}'_K$ par

$$g \mapsto \left(f \mapsto \int_K g f \, dx\right), \qquad \text{où} \quad f \in \mathcal{A}(K).$$

D'après la proposition 2, il existerait un ouvert $\omega \ni 0$ tel que

$$(\varphi\star\mathcal{E}(\mathbf{R}^n))_K |\, \omega \subset PB(\omega),$$

mais $(\varphi\star\mathcal{E}(\mathbf{R}^n))_K|\,\omega = \varphi\star\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)\,|\,\omega$, et ceci contredit la proposition 3 car, d'après un théorème d'Ehrenpreis [1], $\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ est contenu dans $\varphi\star\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ pour tout $\varphi \in (\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) - \{0\})$.

Remarque. — Nous avons démontré, dans [8], la proposition 3 pour le cas de l'opérateur $D_{x_1} + i x_1 D_{x_2}$ en utilisant la représentation des hyperfonctions comme « valeurs au bord » de fonctions holomorphes.

3. La condition de Nirenberg et Trèves.

Nous supposons toujours dans la suite que P est un opérateur du premier ordre, non dégénéré à l'origine, ce qui entraîne qu'il en est de même dans un voisinage Ω de l'origine. Soit $x_0 \in \Omega$.

DÉFINITION. — *Nous dirons que P a la propriété $(R(x_0))$ si, pour toute fonction caractéristique* ω [i. e. : *solution de* $P_1(x, \mathrm{Grad}\,\omega) = 0$] *de P, analytique au voisinage de x_0, x_0 n'est pas isolé dans l'ensemble*

$$\{x \mid \mathrm{Im}\,\omega(x) = \mathrm{Im}\,\omega(x_0)\}.$$

Nous dirons que P a la propriété (R) *si P a la propriété $(R(x))$ pour tous les x d'un voisinage de* 0.

Il résulte de la proposition 3 et du corollaire 1 de la proposition 2 que, si $PB_0 = B_0$, P a la propriété (R).

L'objet de ce paragraphe est de comparer la condition (R) avec une condition nécessaire et suffisante donnée par NIRENBERG et TRÈVES [6], [9] pour que P ait la propriété suivante que nous noterons (R') :

Il existe un voisinage Ω de 0 *avec* $P\,\mathcal{D}'(\Omega) \supset L^2(\Omega)$.

Rappelons leurs résultats :

(*a*) Il existe un changement analytique (réel) de coordonnées dans $\mathbf{R}^n$ qui donne à P_1 la forme

$$D_{x_1} + i\sum_{j=2}^{n} a_j D_{x_j},$$

où les a_j sont des fonctions analytiques à valeurs réelles.

(*b*) Écrivons $A(x) = (a_2(x), \ldots, a_n(x))$.

Soit

$$\begin{aligned} c_1 &= [P, P^*] \quad (P^* = {}^t\overline{P}) \\ &\vdots \\ c_k &= [P, c_{k-1}] \end{aligned}$$

et soit C_k la partie principale (qui est du premier ordre) de c_k.

S'il existe un entier k tel que C_k ne soit pas combinaison linéaire, au point x, de P_1 et P_1^*, nous désignerons par $k(x)$ le plus petit entier satisfaisant à cette condition. Dans le cas contraire, nous posons $k(x) = +\infty$.

Un calcul (fait dans [6] et dans [9]) montre que :

1° si $A(x) = 0$, mais $A \not\equiv 0$, $k(x)$ est le premier nombre p tel que $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^p A(x) \neq 0$,

2° si $A(x) \neq 0$, $k(x) = 1$ ou $+\infty$,

3° si $A \equiv 0$, $k(x) = +\infty$.

La condition nécessaire et suffisante, explicitée par NIRENBERG et TRÈVES, peut alors s'énoncer :

(NT) : *Il existe un voisinage de zéro dans lequel $k(x)$ est pair ou infini.*

D'autre part, Hörmander [3] a donné la condition suivante, nécessaire pour que (R′) ait lieu :

(H) : *Il existe un voisinage de zéro dans lequel la condition* $C_1(x, \xi) = 0$ *est entraînée par* $P_1(x, \xi) = 0$.

Cela entraîne que $C_1(x, \xi)$ est combinaison linéaire au point x de $P_1(x, \xi)$ et de $P_1^*(x, \xi)$. La condition (H) entraîne, en conséquence, que $k(x)$ est différent de 1.

Il est démontré dans [3] que notre condition (R) est plus forte que (H). D'autre part, il est démontré (par exemple dans [9], p. 110) que si $A(0) = 0$, et sous l'hypothèse (H) : $R(0)$ entraîne que $k(0)$ est pair ou infini.

Ceci montre que, sous l'hypothèse (R), on a dans un voisinage de zéro :

Si $A(x) \neq 0$, $k(x) = +\infty$;

Si $A(x) = 0$, $k(x)$ est pair ou $k(x) = +\infty$.

Ceci montre que la condition (R) est plus forte que la condition (NT) ou (R′) et donc, d'après la proposition 3, ces trois conditions sont équivalentes.

4. Condition suffisante d'existence.

Nous désignons toujours par P un opérateur du premier ordre à coefficients analytiques, non dégénéré à l'origine.

Proposition 4. — *Supposons qu'il existe un voisinage* Ω *de zéro tel que* $P\,B(\Omega) \supset L^1(\Omega)$. *Alors on a*

$$PB_0 = B_0.$$

Démonstration. — Nous pouvons supposer que la direction $(1, 0, \ldots, 0)$ est non caractéristique à l'origine, et nous écrivons

$$x = (x_1, x').$$

Désignant par θ le terme de degré zéro de ${}^tP$, nous noterons par α la solution de

$$({}^tP)_1\,\alpha = \theta, \qquad \alpha(0, x') = 0.$$

Dans notre proposition, nous pouvons remplacer P par $e^{-\alpha} P e^{\alpha}$, et alors ${}^tP$ est homogène. Nous pouvons enfin normaliser P pour que le coefficient de D_{x_1} soit égal à 1; c'est ce qui sera admis dans la suite.

Nous noterons encore P l'opérateur différentiel complexifié qui est associé à notre opérateur donné.

Soient u_i les solutions holomorphes au voisinage de zéro de

$$\begin{aligned} {}^tPu_i &= 0, \\ u_i(0, z') &= z_i \qquad (i = 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Posons $T(z) = (z_1, u_2(z), \ldots, u_n(z))$. On vérifie immédiatement que le déterminant jacobien de T est égal à 1 sur l'hyperplan complexe $\{ z_1 = 0 \}$.

Donc $T(z)$ définit un isomorphisme holomorphe entre deux voisinages $\tilde{\Omega}'$ et $\tilde{\Omega}$ de zéro dans $\mathbf{C}^n$, et l'on a

$$ {}^tP = T \circ D_{z_1} \circ T^{-1}, $$

T désignant ici l'opérateur de $H(\tilde{\Omega})$ sur $H(\tilde{\Omega}')$ défini par $T(f)(z) = f(T(z))$.

Soient τ_{z_0} la translation

$$ z \mapsto (z - z_0) $$

et γ_{z_0} l'application

$$ z \mapsto T(T^{-1}(z) - T^{-1}(z_0)), $$
$$ \gamma_{z_0} = T \circ \tau_{T^{-1}(z_0)} \circ T^{-1}. $$

Pour tout compact $\tilde{K} \subset \tilde{\Omega}$, γ_{z_0} est définie sur $\tilde{K}$ pour $|z_0|$ assez petit, et l'on a alors

$$ ({}^tP \circ \gamma_{z_0})f = \gamma_{z_0} \circ ({}^tPf) $$

au voisinage de K si $f \in H(\tilde{\Omega})$. Notons aussi que la réunion des $\gamma_z(\tilde{K})$, pour $|z| < \varepsilon$, engendre un voisinage de $\tilde{K}$, et que l'on obtient ainsi un système fondamental de voisinages de $\tilde{K}$.

D'autre part, l'hypothèse de la proposition implique, d'après la proposition 2, que si Ω, l'ouvert en question, est relativement compact, notant $\overline{\Omega}$ par K, et désignant par $\tilde{\Omega}$ un voisinage complexe (assez petit) de K, on a

$$ (\bigstar) \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists c_\varepsilon \quad \text{tel que } \forall f \in H(\tilde{\Omega}), \quad \forall g \in L^1(K), $$
$$ \left| \int_K fg \right| \leq c_\varepsilon \| g \|_{L^1(K)} [\, |{}^tPf|_{K_\varepsilon} + |f|_{(\partial\Omega)_\varepsilon}], $$

où K_ε et $(\partial\Omega)_\varepsilon$ désignent les voisinages d'ordre ε de K et $\partial\Omega = K - \Omega$ (l'ensemble des points de $\mathbf{C}^n$ à distance inférieure à ε de K et $\partial\Omega$) et où

$$ |h|_{\tilde{K}} = \sup_{z \in \tilde{K}} |h(z)|. $$

Nous prendrons Ω suffisamment petit pour que l'isomorphisme T, défini plus haut, soit holomorphe au voisinage de K.

On déduit de l'inégalité $(\bigstar)$ que

$$ \forall \tilde{\Omega} \supset K, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists c_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que } \forall f \in H(\tilde{\Omega}), $$
$$ |f|_K \leq c_\varepsilon [\, |{}^tPf|_{K_\varepsilon} + |f|_{(\partial K)_\varepsilon}]. $$

Pour t suffisamment petit, les fonctions $\gamma_z(f)$ seront holomorphes dans un voisinage $\tilde{\Omega}'$ de K si $|z| < t$: il existera donc, pour tout $\varepsilon > 0$ mais assez petit, une constante c'_ε telle que

$$ |\gamma_z f|_K \leq c'_\varepsilon [\, |\gamma_z({}^tPf)|_{K_\varepsilon} + |\gamma_z f|_{(\partial\Omega)_\varepsilon}]. $$

D'où, en prenant la borne supérieure de chaque terme de l'inégalité pour $|z| < t$, et en choisissant ε' et ε'', tels que

$$K_{\varepsilon''} \subset \bigcup_{|z|<t} \gamma_z(K),$$
$$\bigcup_{|z|<t} \gamma_z(K_\varepsilon) \subset K_{\varepsilon+\varepsilon'},$$
$$\bigcup_{|z|<t} \gamma_z((\partial\Omega)_\varepsilon) \subset (\partial\Omega)_{\varepsilon+\varepsilon'}$$

et en remarquant que ε' peut être pris arbitrairement petit pourvu qu'il en soit de même de t :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \varepsilon' > 0, \quad \exists c, \quad \exists \varepsilon'' > 0 \quad \text{tels que } \forall f \in H(\tilde{\Omega}),$$
$$|f|_{K_{\varepsilon''}} \leqq c[|{}^tPf|_{K_{\varepsilon+\varepsilon'}} + |f|_{(\partial\Omega)_{\varepsilon+\varepsilon'}}].$$

Cette inégalité implique que l'application

$$\mathfrak{A}(K) \to \mathfrak{A}(K) \times \mathfrak{A}(\partial\Omega),$$
$$f \mapsto ({}^tPf, f)$$

est d'image fermée [il suffit de vérifier que l'image réciproque d'une partie bornée est bornée, ce qui est alors évident car un ensemble borné de $\mathfrak{A}(K)$ est contenu et borné dans un espace $H(\tilde{\Omega})$].

L'application transposée

$$\mathfrak{A}'_K \times \mathfrak{A}'_{\partial\Omega} \to \mathfrak{A}'_K,$$
$$(u, v) \mapsto (Pu + v)$$

sera donc elle aussi d'image fermée, donc surjective : cela implique que

$$PB(\Omega) = B(\Omega).$$

Désignons par $\mathcal{D}'_0$ l'espace des germes de distributions à l'origine.

Proposition 5. — *Supposons qu'il existe un voisinage Ω de l'origine, tel que*

$$P\mathcal{D}'(\Omega) \supset L^2(\Omega),$$

alors

$$P\mathcal{D}'_0 = \mathcal{D}'_0,$$
$$PB_0 = B_0.$$

Démonstration. — D'après la proposition 2, si PB_0 contient l'image dans B_0 de $L^1(\Omega)$ pour un ouvert Ω contenant l'origine, il en existera un autre ω tel que $P\,B(\omega)$ contienne la restriction de $L^1(\Omega)$ à l'ouvert, c'est-à-dire que

$$P\,B(\omega) \supset L^1(\omega).$$

D'après la proposition 4, cela implique $PB_0 = B_0$. Il suffit donc de démontrer que

$$P\,\mathcal{D}'_0 = \mathcal{D}'_0.$$

Nous pouvons supposer, pour démontrer cette assertion, et c'est ce que nous ferons, que P est homogène et que le coefficient de D_{x_1} dans P est 1.

LEMME 1. — *Il existe un opérateur elliptique Q (du 2e ordre) à coefficients analytiques au voisinage de l'origine, et tel que $QP = PQ$.*

Démonstration. — On a vu qu'il existait un isomorphisme holomorphe qui transformait P en la restriction, sur une variété analytique réelle V dans $\mathbf{C}^n$, de l'opérateur D_{z_1}. On peut, après changement d'axes dans $\mathbf{C}^n$, supposer que l'espace tangent à V à l'origine est $\mathbf{R}^n$ et la trace sur V du laplacien complexe $\left(\sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right)$ sera elliptique à l'origine, donc au voisinage de l'origine, dans V.

LEMME 2. — *Soit Q un opérateur elliptique à coefficients analytiques au voisinage de l'origine. Soit Ω un voisinage ouvert de o. Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il existe un entier k positif, un voisinage de zéro ω, et une fonction $f \in L^2(\omega)$ tels que $T = Q^k f$ sur ω.*

Démonstration. — La distribution T est d'ordre fini dans un voisinage de o :

$$|(T, \varphi)| \leqq c \sup_{|p| \leqq m} |D^p \varphi|, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(K),$$

où K est un voisinage de o.

D'autre part, les semi-normes

$$|D^p \varphi| = \sup_{x \in K} |D^p \varphi(x)|$$

sont équivalentes aux semi-normes :

$$\|D^p \varphi\|_2 = \|D^p \varphi\|_{L^2(K)}.$$

D'où

$$|(T, \varphi)| \leqq c' \sup_{|p| \leqq m'} \|D^p \varphi\|_2, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

Enfin, prenant k de telle sorte que

$$k \times (\text{ordre de } Q) \geqq m',$$

et choisissant pour ω un voisinage de l'origine suffisamment petit, il existe une constante c'' telle que

$$|D^p\varphi|_2 \leqq c''\,|{}^tQ^k\varphi|_2, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$$

pour $|p| \leqq m'$.

En effet, en écrivant

$${}^tQ^k(x, 0) = {}^tQ^k(0, D) + Q'(x, D)$$

et en prenant ω assez petit, on est ramené à prouver l'inégalité dans le cas où Q est à coefficients constants, et elle est alors bien connue.

On en conclut que la forme linéaire

$${}^tQ^k\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$$

sur le sous-espace ${}^tQ^k\,\mathcal{D}(\omega)$ de $L^2(\omega)$ est continue, donc provient d'un élément de $L^2(\omega)$.

Ce lemme 2 n'est évidemment pas nouveau.

Démonstration de la proposition 5. — Soit $T \in \mathcal{D}'_0$; T provient d'un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour un certain voisinage Ω de 0. Nous notons encore ce représentant par T.

Dans un voisinage suffisamment petit de zéro ω, on peut trouver $S \in L^2(\omega)$ tel que $T = Q^k S$.

Il existe $U \in \mathcal{D}'_0$ tel que $PU = S$ dans $\mathcal{D}'_0$. Alors

$$PQ^kU = Q^kPU = T.$$

Nous regroupons les résultats démontrés dans ces quatre paragraphes dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit P un opérateur différentiel linéaire du premier ordre à coefficients analytiques au voisinage de l'origine de* $\mathbf{R}^n$ $(n > 1)$, *et dont la partie principale ne s'annule pas à l'origine.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° $P\mathcal{D}'_0 = \mathcal{D}'_0$,

2° $PB_0 = B_0$,

3° $PB_0 \supset (\varphi \star \mathcal{E})$ *pour un* $\varphi \neq 0$ *de* $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$,

4° *Il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine dans* $\mathbf{R}^n$ *tel que*

$$P\,B(\Omega) \supset \varinjlim_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon$$

où H_ε est l'espace des fonctions holomorphes dans la bande $|\operatorname{Im} z| < \varepsilon$ *de* $\mathbf{C}^n$,

5° *P vérifie la condition de Nirenberg et Trèves* (*cf.* § 3),

6° *P vérifie la condition* (R) (*cf.* § 3).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Ehrenpreis (L.). — Solutions of problems of division, IV : Invertible and elliptic operators, *Amer. J. Math.*, t. 82, 1960, p. 522-588.

[2] Grothendieck (A.). — *Produits tensoriels topologiques.* — Providence, American mathematical Society, 1955 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 16) (*Thèse Sc. math. Paris*, 1953).

[3] Hörmander (L.). — *Linear partial differential operators.* — Berlin, Springer-Verlag, 1963 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 116).

[4] Martineau (A.). — Sur les fonctionnelles analytiques et la transformée de Fourier-Borel, *J. Anal. math., Jérusalem*, t. 11, 1963, p. 1-164 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1963).

[5] Martineau (A.). — Les hyperfonctions de M. Sato, *Séminaire Bourbaki*, 13e année, 1960-1961, n° 214, 13 p.

[6] Nirenberg (L.) et Trèves (F.). — Solvability of a first order linear partial differential equation, *Comm. on pure and appl. Math.*, t. 16, 1963, p. 331-351.

[7] Sato (M.). — Theory of hyperfunctions, I, II, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, t. 8, 1959-1960, p. 139-193, 387-437.

[8] Schapira (P.). — Une équation aux dérivées partielles sans solutions dans l'espace des hyperfonctions, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 265, 1967, série A, p. 665-667.

[9] Trèves (F.). — *Cours sur les équations aux dérivées partielles linéaires* [professé à la Faculté des Sciences de Paris, 1965-1966]. Rédigé par A. Cerezo et F. Rouvière. — Paris, Secrétariat mathématique de l'École Normale Supérieure, 1967.

[10] Trèves (F.). — *Locally convex spaces and linear partial differential equations.* — Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 146).

(Texte reçu le 8 février 1969.)

Pierre Schapira
26, rue Monge
75-Paris 05