

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE SCHAPIRA

Sur les ultra-distributions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 1, n° 3 (1968), p. 395-415

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_3_395_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ULTRA-DISTRIBUTIONS

PAR PIERRE SCHAPIRA.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	395
1. Définition et propriétés d'un espace d'ultra-distributions.....	396
2. Relations avec les fonctionnelles analytiques.....	399
3. Exemples.....	403
4. Extension de quelques théorèmes d'existence pour les équations de convolution..	404
5. Le support singulier des ultra-distributions.....	407
6. Faisceaux d'ultra-distributions.....	408
7. Convolution des ultra-distributions.....	412

INTRODUCTION.

Nous « formalisons » la notion de classe non quasi-analytique de fonctions, et la notion duale d'ultra-distributions. Nous étudions les rapports des ultra-distributions avec les fonctionnelles analytiques et montrons rapidement que beaucoup de théorèmes sur les équations aux dérivées partielles, démontrés dans le cadre classique des distributions, s'étendent au cas de ces ultra-distributions, mais que par contre le « support singulier » des ultra-distributions ne se comporte pas comme pour les distributions.

Nous étudions ensuite le faisceau des ultra-distributions, et montrons enfin que l'ensemble des ultra-distributions à support compact est une algèbre de convolution.

Nos notations et définitions sont celles de M. Hörmander [10] ou en ce qui concerne les espaces $\mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, ... celles de M. Schwartz [19]. On se place dans \mathbf{R}^n (sauf au paragraphe 7), et l'on écrira \mathcal{O} au lieu

de $\mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$, La lettre K désignera un compact et Ω un ouvert de \mathbf{R}^n . Si E et F sont deux espaces topologiques, $E \xrightarrow{\subset} F$ signifie que l'injection de E dans F est continue.

Les opérateurs différentiels seront toujours linéaires à coefficients constants et les espaces vectoriels topologiques seront définis sur le corps des nombres complexes, localement convexes séparés (en abrégé : E. L. C.).

En ce qui concerne la terminologie des E. L. C. nous suivrons M. Grothendieck [7].

En ce qui concerne la terminologie des faisceaux nous suivrons M. Godement [6].

Les propositions, lemmes, remarques, sont munis d'une double numérotation, la première correspondant au paragraphe auquel ils appartiennent, la seconde à leur ordre dans ce paragraphe.

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS D'UN ESPACE D'ULTRA-DISTRIBUTIONS.

DÉFINITION 1.1. — Un sous-espace vectoriel \mathcal{O}^* de \mathcal{O} sera dit être un ultra-sous-espace de \mathcal{O} s'il a les propriétés :

- (A) $\mathcal{O}^* \neq \{0\}$;
- (B) \mathcal{O}^* est un idéal de l'algèbre de convolution \mathcal{E}' ;
- (C) \mathcal{O}^* est une algèbre pour la multiplication;
- (D) Si $\varphi \in \mathcal{O}^*$, les fonctions $\bar{\varphi}$ et $\lambda \circ \varphi$ définies par $x \rightarrow \overline{\varphi(x)}$ et $x \rightarrow \varphi(\lambda x)$, où $\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$, appartiennent à \mathcal{O}^* .

PROPOSITION 1.1. — Si \mathcal{O}^* est un ultra-sous-espace de \mathcal{O} , il existe sur \mathcal{O}^* une topologie d'E. L. C. qui a les propriétés suivantes :

(a) Les applications de $\mathcal{E}' \times \mathcal{O}^*$ dans \mathcal{O}^* (convolution), de $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^*$ dans \mathcal{O}^* (multiplication), de \mathcal{O}^* dans \mathcal{O}^* ($\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$, $\varphi \rightarrow \lambda \circ \varphi$), sont (bi-) linéaires (séparément) continues.

(b) Cette topologie est la plus fine des topologies d'E. L. C. sur \mathcal{O}^* qui rendent ces applications (séparément) continues.

(c) Cette topologie est ultrabornologique.

(d) Si $\mathcal{O}_K^* = \mathcal{O}_K \cap \mathcal{O}^*$ a la topologie induite par \mathcal{O}^* , on a

$$\mathcal{O}^* = \varinjlim_{K \subset \mathbf{R}^n} \mathcal{O}_K^* \quad (1).$$

(1) Nous noterons par $\varinjlim_{i \in I} E_i$ la limite inductive dans la catégorie E. L. C. d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ d'espaces localement convexe, et par $\varprojlim_{j \in J} F_j$ la limite projective d'une famille $(F_j)_{j \in J}$.

Démonstration. — Soit I l'ensemble des suites finies (i) de la forme :

$$(i) = (\varphi_0, \varphi_1, \varepsilon_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \varepsilon_p),$$

où φ_0 est un élément de \mathcal{O}^* , où ε_p est, soit l'opération de convolution (notée \star), soit l'opérateur de multiplication (notée \times), et où $\varphi_j \in \mathcal{E}'$ avec la restriction :

$$\varphi_j \in \mathcal{O}^* \quad \text{si } \varepsilon_j = \times.$$

Soit $E_i = (\varphi_0 \star \mathcal{E}') \varepsilon_1 \varphi_1 \varepsilon_2 \varphi_2 \dots \varepsilon_p \varphi_p$, espace muni de la topologie image de celle de \mathcal{E}' , et soit

$$E = \varinjlim_{i \in I} E_i.$$

Il est facile de vérifier que \mathcal{O}^* et E sont algébriquement les mêmes, et que \mathcal{O}^* muni de la topologie de E a toutes les propriétés annoncées. Désormais nous supposons toujours les ultra-sous-espaces de \mathcal{O} munis de cette topologie.

On pose

$$\mathcal{O}^*(\Omega) = \varinjlim_{K \subset \Omega} \mathcal{O}_K^*.$$

On désigne par $\mathcal{E}^*(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{E}(\Omega)$ telles que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{O}^*(\Omega)$, $f \cdot \varphi$ appartienne à $\mathcal{O}^*(\Omega)$. On munit $\mathcal{E}^*(\Omega)$ de la topologie la moins fine rendant continues les applications

$$f \mapsto \varphi f$$

de $\mathcal{E}^*(\Omega)$ dans $\mathcal{O}^*(\Omega)$.

Les espaces $\mathcal{O}^{*'}(\Omega)$ et $\mathcal{E}^{*'}(\Omega)$ seront les espaces duals des espaces $\mathcal{O}^*(\Omega)$ et $\mathcal{E}^*(\Omega)$, et on les munira de la topologie de Mackey pour ces dualités.

On dira que $\mathcal{O}^{*'}(\Omega)$ est un espace d'ultra-distributions sur Ω . Les assertions suivantes sont des conséquences évidentes des conditions (A), (B), (C), (D).

(a) Pour tout ε positif, il existe une fonction φ_ε , positive ou nulle, appartenant à \mathcal{O}^* , de support contenu dans la boule centrée, à l'origine et de rayon ε , et telle que

$$\int \varphi_\varepsilon dx = 1.$$

(b) Pour tout compact K de \mathbb{R}^n , et tout recouvrement fini de K par des ouverts : $K \subset \bigcup_1^n \Omega_i$, il existe des fonctions φ_i telles que

$$\varphi_i \geq 0, \quad \varphi_i \in \mathcal{O}^*(\Omega_i), \quad \sum_1^n \varphi_i \leq 1$$

et $\sum_1^n \varphi_i = 1$ sur un voisinage de K (cf. [10], théor. 1.2.3).

(c) L'espace $\mathcal{O}^*(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{O}(\Omega)$ et dans $\mathcal{E}^*(\Omega)$ et a une topologie plus fine que celle induite par ces espaces.

(d) On peut définir par transposition la multiplication des éléments de $\mathcal{O}^{*'}(\Omega)$ par les fonctions de $\mathcal{E}^*(\Omega)$.

(e) Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ sont deux ouverts on définit de manière évidente un opérateur de « restriction » de $\mathcal{O}^{*'}(\Omega_2)$ dans $\mathcal{O}^{*'}(\Omega_1)$. Nous noterons encore par $\mathcal{O}^{*'}$ le préfaisceau ainsi obtenu. Rappelons, ([6], p. 151), qu'un faisceau de base X est dit être mou si ces sections sur les fermés de X se prolongent à X tout entier.

PROPOSITION 1.2.

- (i) *Le préfaisceau $\mathcal{O}^{*'}$ est un faisceau d'espaces vectoriels.*
- (ii) *Ce faisceau est mou.*
- (iii) *L'ensemble des sections à support compact de $\mathcal{O}^{*'}$ s'identifie à $\mathcal{E}^{*'}$.*

Démonstration. — (i) Soit $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ un recouvrement ouvert de Ω .

Il faut montrer que l'application

$$\mathcal{O}^{*' }(\Omega) \rightarrow \varprojlim_{i \in I} \mathcal{O}^{*' }(\Omega_i)$$

est un isomorphisme vectoriel, donc il suffit de démontrer que l'application

$$\varinjlim_{i \in I} \mathcal{O}^*(\Omega_i) \rightarrow \mathcal{O}^*(\Omega)$$

est un isomorphisme vectoriel topologique, ce qui est évident si I est filtrant croissant, et l'on se ramène à ce cas par la propriété (b) ci-dessus.

(ii) Il suffit, d'après le théorème 3.4.1 de [6] de démontrer que toute section de $\mathcal{O}^{*'}$ au-dessus d'un compact K se prolonge à l'espace tout entier. Une section définie au-dessus d'une partie de \mathbf{R}^n se prolongeant dans un voisinage de celle-ci ([6], théor. 3.3.1), la proposition résulte de ce que si K est un compact contenu dans un ouvert Ω , il existe $\varphi \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ qui vaut 1 sur le voisinage de K . Si alors T appartient à $\mathcal{O}^{*' }(\Omega)$, l'ultra-distribution φT coïncide avec T sur un voisinage de K .

La partie (iii) de la proposition se démontre comme pour les distributions ordinaires.

Remarque 1.1. — Si T appartient à \mathcal{O}' , φ et ψ appartiennent à \mathcal{O} , il existe un compact K qui ne dépend que du support de φ et ψ , tel que pour toute fonction θ de \mathcal{O} qui vaut 1 au voisinage de K , on a

$$(T \star \varphi) \psi = (\theta T \star \varphi) \psi.$$

On en conclut facilement que la convolution, définie sur $\mathcal{E}' \times \mathcal{D}^*$, se prolonge en une application bilinéaire séparément continue de $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}^*$ dans \mathcal{E}^* , et de $\mathcal{E}^* \times \mathcal{E}'$ dans \mathcal{E}^* .

On définit alors la convolution des ultra-distributions par les distributions par transposition et symétrie : on obtient ainsi une application bilinéaire séparément continue de $\mathcal{E}' \times \mathcal{D}^{*'}$ dans $\mathcal{D}^{*'}$, de $\mathcal{D}' \times \mathcal{E}^{*'}$ dans $\mathcal{D}^{*'}$ et de $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}^{*'}$ dans $\mathcal{E}^{*'}$.

2. RELATIONS AVEC LES FONCTIONNELLES ANALYTIQUES. — On désignera par α l'espace des fonctions analytiques sur \mathbf{R}^n muni de la topologie : $\alpha = \lim_{\substack{\Omega \supset \mathbf{R}^n \\ \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n}} \mathbf{H}(\Omega)$, où les Ω sont des voisinages ouverts complexes de \mathbf{R}^n , et

où $\mathbf{H}(\Omega)$, espace des fonctions holomorphes sur Ω , a la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω .

On désigne par α' le dual de α , et l'on dira que les éléments de α' sont des fonctionnelles analytiques.

LEMME 2.1. — *Considérons le diagramme commutatif (1) dans la catégorie des E. L. C. et le diagramme (2) constitué par les espaces duaux et les applications transposées :*

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\bar{u}} & E_2 \\ i_1 \uparrow & (1) & \uparrow i_2 \\ F_1 & \xrightarrow{u} & F_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E'_1 & \xleftarrow{\bar{u}'} & E'_2 \\ i'_1 \downarrow & (2) & \downarrow i'_2 \\ F'_1 & \xleftarrow{u'} & F'_2 \end{array}$$

On suppose que \bar{u} est un homomorphisme surjectif, que $\overline{i_1(\ker u)} = \ker \bar{u}$, et que $\overline{u(F_1)} = F_2$. Alors on a la relation

$$i'_2(E'_2) = u'^{-1}(i'_1(E'_1)).$$

Démonstration. — On a clairement, puisque $u' \circ i'_2 = i'_1 \circ \bar{u}'$,

$$i'_2(E'_2) \subset u'^{-1}(i'_1(E'_1)).$$

Soit $f'_2 \in F'_2$ tel que $u'(f'_2) = i'_1(e'_1)$, où e'_1 est un élément de E'_1 .

On va définir e'_2 dans E'_2 par

$$e'_2 = (g_2 \mapsto \langle e'_2, g_2 \rangle); \quad \langle e'_2, g_2 \rangle = \langle e'_1, e_1 \rangle,$$

où e_1 est solution de l'équation $\bar{u}(x) = g_2$. Le nombre $\langle e'_1, e_1 \rangle$ ne dépend pas du choix de la solution, c'est-à-dire que $e_1 \in \text{Ker } \bar{u}$ entraîne $\langle e'_1, e_1 \rangle = 0$. Pour cela il suffit de le voir si $e_1 \in i_1(\text{Ker } u)$, donc si $e_1 = i_1(f_1)$, où $f_1 \in \text{Ker } u$ et l'équation s'écrit alors :

$$\langle e'_1, e_1 \rangle = \langle e'_1, i_1(f_1) \rangle = \langle i'_1(e'_1), f_1 \rangle.$$

Par hypothèse, $i'_1(e'_1) = u'(f'_2)$, d'où

$$\langle e'_1, e_1 \rangle = \langle u'(f'_2), f_1 \rangle = \langle f'_2, u(f_1) \rangle = 0.$$

La continuité résulte de ce que \bar{u} est un homomorphisme. Pour vérifier que $i'_2(e'_2) = f'_2$ il suffit, puisque $\overline{u(F_1)} = F_2$, de vérifier que

$$\langle i'_2(e'_2), f_2 \rangle = \langle f'_2, f_2 \rangle$$

pour tout f_2 de la forme $f_2 = u(f_1)$.

Ceci donne :

$$\begin{aligned} \langle i'_2(e'_2), u(f_1) \rangle &= \langle e'_2, (i_2 \circ u)(f_1) \rangle \\ &= \langle e'_2, \bar{u} \circ i_1(f_1) \rangle = \langle e'_1, i_1(f_1) \rangle \\ &= \langle i'_1(e'_1), f_1 \rangle = \langle u'(f'_2), f_1 \rangle = \langle f'_2, u(f_1) \rangle. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2.1. — Soit $u \in \mathcal{E}'$. On munit le sous-espace $u \star \mathcal{O}'$ de \mathcal{O}' de la topologie quotient de celle de \mathcal{O}' par le noyau de l'application $u \star$. Alors $\mathfrak{a} \subset \mathop{\rightarrow} u \star \mathcal{O}'$, \mathfrak{a} est dense dans $u \star \mathcal{O}'$, et le dual de $u \star \mathcal{O}'$ s'identifie à l'ensemble des fonctionnelles analytiques T qui sont régularisables par \check{u} , c'est-à-dire telles que $\check{u} \star T \in \mathcal{O}$.

On a alors la formule :

$$\forall S \in \mathcal{O}', \quad \langle T \star \check{u}, S \rangle = \langle T, u \star S \rangle$$

et en particulier,

$$(T \star \check{u})(x) = \langle T, u \star \delta_x \rangle.$$

Démonstration. — La première partie de cet énoncé est conséquence du résultat suivant dû à M. Ehrenpreis sur les équations de convolution avec second membre [5],

$$\forall u \in \mathcal{E}', \quad \mathfrak{a} \subset u \star \mathcal{E}.$$

L'injection de \mathfrak{a} dans $u \star \mathcal{E}$ est en fait continue si l'on met sur $u \star \mathcal{E}$ la topologie image de celle de \mathcal{E} par $u \star$, ceci grâce au « théorème du graphe fermé » (cf., par exemple, ([8], p. 17). Comme on a $u \star \mathcal{E} \subset \mathop{\rightarrow} u \star \mathcal{O}'$, on en conclut que $\mathfrak{a} \subset \mathop{\rightarrow} u \star \mathcal{O}'$.

L'espace $u \star \mathfrak{a}$, donc aussi \mathfrak{a} , est dense dans $u \star \mathcal{O}'$, et l'ensemble des solutions analytiques de $\check{u} \star f = 0$ est dense dans l'ensemble de ces solutions dans \mathcal{O}' , en conséquence du théorème des moyenne-périodiques de M. Malgrange [12].

On peut donc appliquer le lemme 2.1 avec $F_1 = F_2 = \mathfrak{a}$, $E_1 = \mathcal{O}'$, $E_2 = u \star \mathcal{O}'$, i_1 et i_2 étant les injections de \mathfrak{a} dans \mathcal{O}' et dans $u \star \mathcal{O}'$, et les opérateurs u et \bar{u} désignant ici la convolution par u . On obtient alors :

$$(u \star \mathcal{O}')' = (\check{u} \star)^{-1}(\mathcal{O}).$$

Si

$$e'_2 \in E_2, \quad e_1 \in E_1,$$

on a

$$\langle \bar{u}'(e'_2), e_1 \rangle = \langle e'_2, u(e_1) \rangle.$$

Soit, dans nos hypothèses $e'_2 = T$ et $e_1 = S$:

$$\langle T \star \check{u}, S \rangle = \langle T, u \star S \rangle.$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2.2. — Soit \mathcal{O}^* un ultra-sous-espace de \mathcal{O} .

Alors $\mathfrak{a} \subset \mathcal{E}^*$, \mathfrak{a} est dense dans \mathcal{E}^* , et $\mathcal{E}^{*'} s'identifie à l'espace des fonctionnelles analytiques T régularisables par \mathcal{O}^* , c'est-à-dire telles que : $T \star \mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}$.$

On a alors la formule

$$\forall S \in \mathcal{O}', \forall \varphi \in \mathcal{O}^*, \langle T \star \check{\varphi}, S \rangle = \langle T, \varphi \star S \rangle.$$

Démonstration. — Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{O}^*$, on a

$$\mathfrak{a} \subset \varphi \star \mathcal{O}' \subset \mathcal{E}^*,$$

la continuité de la deuxième injection résultant de la remarque 1.1.

L'espace \mathfrak{a} est dense dans \mathcal{E}^* car \mathcal{O}^* est dense dans \mathcal{E}^* et si φ appartient à \mathcal{O}^* , si f_n est une suite de fonctions analytiques convergeant vers δ dans \mathcal{O}' , la suite $f_n \star \varphi$ converge vers φ dans \mathcal{E}^* . On a

$$\bigcup_{\varphi \in \mathcal{O}^*} \varphi \star \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}^*.$$

donc si T appartient à $\mathcal{E}^{*'}$, T est régularisable par tous les éléments de \mathcal{O}^* d'après la proposition précédente et $\langle T \star \check{\varphi}, S \rangle = \langle T, \varphi \star S \rangle$ si S appartient à \mathcal{O}' .

Inversement, soit u un élément de \mathfrak{a}' tel que $u \star \mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}$: u définit une application linéaire de \mathcal{O}^* dans \mathcal{O} qui sera continue d'après le théorème du graphe fermé (*loc. cit.*), \mathcal{O}^* étant ultra-bornologique. Soit alors $T \in \mathcal{O}^{*'}$ définie par

$$T(\varphi) = (u \star \check{\varphi})(0).$$

Le support de T est compact car le support de $u \star \check{\varphi}$ considéré comme élément de \mathcal{O} est égal d'après M. Martineau [14] à son support en tant que fonctionnelle analytique qui est lui-même contenu dans la somme de l'enveloppe convexe du support de u et de $\check{\varphi}$ (*cf.* Martineau [13]).

Comme $T \in \mathcal{E}^{*'}$,

$$(T \star \varphi)(x) = (T, \delta_x \star \check{\varphi}) = (u \star \varphi)(x),$$

c'est donc que $T = u$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Soit \mathcal{O}^* un ultra-sous-espace de \mathcal{O} muni d'une topologie ultra-bornologique pour laquelle les applications (bi-) linéaires de la définition 1.1 sont (séparément) continues. Alors cette topologie est la même que celle définie par la proposition 1.1.

Cela résulte de ce que pour caractériser $\mathcal{E}^{*'}$ on a seulement utilisé le fait que les applications de la définition 1.1 étaient continues et que \mathcal{O}^* était ultra-bornologique.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2.3. — La convolution est une application bilinéaire séparément continue de $\mathcal{O}^* \times \mathcal{E}^{*'}$ dans \mathcal{O} , $\mathcal{O}^* \times \mathcal{O}^{*'}$ dans \mathcal{E} , $\mathcal{E}^* \times \mathcal{E}^{*'}$ dans \mathcal{E} et l'on a la formule

$$(\varphi \star S, T) = (T, \check{\varphi} \star S),$$

où S appartient à \mathcal{O}' ou à \mathcal{E}' .

Le cas de $\mathcal{O}^* \times \mathcal{E}^{*'}$ résulte de la proposition 2.2, la seule chose restant à démontrer étant que si $\varphi \in \mathcal{O}^*$, l'opérateur $\varphi \star$ appartient à $L(\mathcal{E}^{*'}, \mathcal{O})$, mais cela résulte de la formule de transposition.

Les autres cas se déduisent de celui-ci grâce à la remarque 1.1.

C. Q. F. D.

Remarque 2.1. — Soit H l'espace des fonctions entières muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de \mathbf{C}^n .

On sait [12] que si u appartient à H' , $u \star H = H$. On a vu que les hypothèses du lemme 2.1 étaient satisfaites (prop. 2.1).

Il en résulte que si u appartient à H' et ν à \mathcal{E}' , et si $u \star \nu$ appartient à \mathcal{E}' , u se prolonge en un élément de \mathcal{O}' . En particulier, si ν appartient à \mathcal{E}' l'espace $(\nu \star \mathcal{O}') \cap \mathcal{E}'$ est fermé dans \mathcal{E}' . (On pourrait remplacer \mathcal{E}' par \mathcal{O} , \mathcal{O}^* , $\mathcal{E}^{*'}$, ...) Mais ces résultats sont conséquences du « théorème des supports » de ([13], p. 161), extension du théorème de M. Lions [11] sur le support du produit de convolution de deux distributions à support compact u et ν , au cas où, soit u , soit ν appartient à H' . On pourrait d'ailleurs (à l'aide du lemme 2.1), redémontrer le théorème d'Ehrenpreis cité dans la proposition 2.1 avec le théorème de Martineau.

Remarque 2.2. — Soit $u \in \mathcal{O}'$. Notons $\widehat{\text{supp}}(u)$ l'enveloppe convexe du support de u . On sait ([13], loc. cit.) que si $\varphi \in \mathcal{O}$, on a

$$\widehat{\text{supp}}(\varphi \star u) = \widehat{\text{supp}}(\varphi) + \widehat{\text{supp}}(u).$$

Soit alors ν une fonctionnelle analytique régularisable par un élément de \mathcal{O} , c'est-à-dire telle qu'il existe $\psi \in \mathcal{O}$, avec $\nu \star \psi \in \mathcal{O}$. On aura

$$\begin{aligned} \widehat{\text{supp}}(u \star \nu \star \psi) &= \widehat{\text{supp}}(u) + \widehat{\text{supp}}(\nu \star \psi) \\ &= \widehat{\text{supp}}u + \widehat{\text{supp}}\nu + \widehat{\text{supp}}\psi = \widehat{\text{supp}}(u \star \nu) + \widehat{\text{supp}}(\psi). \end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{\text{supp}}(u \star v) = \widehat{\text{supp}}(u) + \widehat{\text{supp}}(v),$$

car si A et B sont deux compacts convexes, $x + A \subset B + A$ implique que x appartient à B.

D'autre part, il existe un couple (f, g) de fonctions entières de type exponentiel non nul tel que le produit $f.g$ soit le type exponentiel nul (cf. M. Roumieu [16], p. 111) : on en conclut, à l'aide du théorème 1.1, p. 76 de [13] que le « théorème des supports », c'est-à-dire la formule

$$\widehat{\text{supp}}(u \star v) = \widehat{\text{supp}}(v) + \widehat{\text{supp}}(u)$$

n'est pas vrai en général dans α . Cela implique donc qu'il existe des fonctionnelles analytiques qui ne sont régularisables par aucune fonction de \mathcal{O} , ou encore, d'après la proposition 2.1, que la topologie de α est strictement plus fine que celle induite par $\bigcap_{\varphi \in \mathcal{O}} \varphi \star \mathcal{O}'$. Cela résout en

particulier un problème posé en ([5], p. 559). Par contre, je ne sais pas s'il existe des fonctionnelles analytiques régularisables par des fonctions de \mathcal{O} qui ne soient pas des ultra-distributions.

3. EXEMPLES. — Soit (M_p) une suite de nombres positifs dépendant du multi-indice $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Soit $\mathcal{O}(M_p, K, h)$ le sous-espace de \mathcal{O}_K des fonctions φ telles que

$$\sup_p \sup_{x \in K} \frac{|D^p \varphi(x)|}{h^p M_p} < \infty, \quad h > 0.$$

Si la suite (M_p) vérifie certaines conditions (cf. Roumieu [17], p. 159) les espaces

$$\mathcal{O}(M_p) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ h}} \mathcal{O}(M_p, K, h)$$

sont des ultra-sous-espaces de \mathcal{O} .

Il résulte aussi du travail de Roumieu, que sous les mêmes conditions sur la suite (M_p) , les espaces

$$\mathcal{O}_0(M_p) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ K}} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ h}} \mathcal{O}(M_p, K, h)$$

sont des ultra-sous-espaces de \mathcal{O} , la seule chose à vérifier (compte tenu de [17]) est que ces espaces ne sont pas réduits à $\{0\}$, mais cela résulte du lemme 1, p. 66 de [16].

PROPOSITION 3.1. — *La topologie d'ultra-sous-espace de \mathcal{O} (définie par la proposition 1.1) sur les espaces $\mathcal{O}_0(M_p)$ et $\mathcal{O}(M_p)$, coïncide avec celle*

obtenue à partir des espaces $\mathcal{O}(M_p, K, h)$ (munis de leurs normes $\sup_h \frac{|D^p \varphi|}{h^p M_p}$) par passages aux limites inductives ou projectives.

Pour tout ouvert Ω , $\mathcal{O}(M_p, \Omega)$ est un espace dual de Fréchet-Schwartz (en abrégé : \mathcal{OFS}) et $\mathcal{E}_0(M_p, \Omega)$ un espace de Fréchet-Schwartz (en abrégé : \mathcal{FS}).

Démonstration. — L'espace $\mathcal{O}(M_p, K, h)$ est un espace de Banach car sa boule unité est fermée dans l'espace complet \mathcal{O} (cf. [7], p. 119). D'autre part, on vérifie facilement que si $h < h'$, l'injection de $\mathcal{O}(M_p, K, h)$ dans $\mathcal{O}(M_p, K, h')$ est compacte. On en conclut [7] que $\mathcal{O}(M_p)$ est un espace \mathcal{OFS} et que $\mathcal{O}_0(M_p)$ est un espace \mathcal{LF} [4]. Ils sont donc en particulier ultra-bornologiques et les applications de la définition 1.1 seront (séparément) continues d'après le théorème du graphe fermé. On peut donc appliquer le corollaire 2.1.

L'espace $\mathcal{O}(M_p, \Omega)$ est évidemment un espace \mathcal{OFS} , et pour voir que $\mathcal{E}_0(M_p, \Omega)$ est un espace \mathcal{FS} , il suffit de remarquer qu'il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{O}_0(M_p, K_n)$, où K_n est une suite exhaustive de compacts de Ω , telle que $\mathcal{E}_0(M_p, \Omega)$ a la topologie moins fine rendant continues les applications :

$$\varphi_n : \mathcal{E}_0(M_p, \Omega) \mapsto \mathcal{O}_0(M_p, K_n) \text{ définies par } \varphi_n(\varphi) = \varphi_n \cdot \varphi \text{ pour } \varphi \in \mathcal{E}_0(M_p, \Omega).$$

Les espaces $\mathcal{O}(M_p, \Omega)$ ont été étudiés par Roumieu. Les espaces $\mathcal{O}_0(M_p)$ ont été introduits en [10] sous le nom d'espaces γ_0^δ dans le cas où $M_p = |p|^{\delta|p|}$ avec $\delta > 1$.

Récemment M. Björk [2] a étudié des espaces analogues.

4. EXTENSION DE QUELQUES THÉORÈMES D'EXISTENCE POUR LES ÉQUATIONS DE CONVOLUTION. — Nous voulons montrer, sans en faire une étude systématique, qu'un grand nombre de résultats concernant les distributions peuvent s'étendre par des méthodes d'analyse fonctionnelle, aux ultra-distributions telles que nous les avons définies, donc *a fortiori* aux exemples du paragraphe 3.

LEMME 4.1. — Soit E un espace de Fréchet, soit $u \in L(E, E)$ et soit u' la transposée de u .

Si l'image réciproque par u de tout ensemble équicontinu de E' est équi-continue, u est surjective.

Nous ne ferons pas la démonstration de ce lemme, plus ou moins classique (cf. M. Trèves [20]).

LEMME 4.2. — Soit E et F deux E. L. C. avec : $E \subsetneq F$, E est dense dans F .

Soit $u \in L(F, F)$ dont la restriction à E appartient à $L(E, E)$. On suppose que l'espace E est tonnelé, que F est un espace de Fréchet, que $u(E) = E$ et que $u'(E') \cap F' = u'(F')$.

Alors $u(F) = F$.

Munissons E' et F' des topologies faibles $\sigma(E', E)$ et $\sigma(F', F)$, et munissons $u'(E')$ [resp. $u'(F')$] de la topologie induite par E' (resp. F'). L'application u' est alors un isomorphisme de E' sur $u'(E')$. Les parties bornées fermées de $u'(E')$ sont donc images de parties bornées fermées de E' , qui sont compactes car E est tonnelé : elles sont donc elles-mêmes compactes, donc fermées dans E' . De l'égalité $u'(E') \cap F' = u'(F')$ résulte alors que les parties bornées fermées de $u'(F')$ qui sont bornées dans $u'(E')$ sont fermées dans F' , et comme F est un espace de Fréchet et que u' est injective, vu l'hypothèse $u(E) = F$, de F' dans F' , cela implique que $u(F) = F$. (cf. MM. Dieudonné et Schwartz [4]).

LEMME 4.3. — Soit \mathcal{O}^* un ultra-sous-espace de \mathcal{O} .

Pour tout ouvert Ω , $\mathcal{O}^*(\Omega)$ et $\mathcal{E}^*(\Omega)$ sont tonnelés.

a. Démontrons que si $\mathcal{O}^*(\Omega)$ est tonnelé, il en est de même de $\mathcal{E}^*(\Omega)$. Soit H une partie bornée de $\mathcal{E}^{*'}(\Omega)$ muni de la topologie faible : il est facile de voir qu'il existe alors un compact K de Ω tel que : $H \subset \mathcal{E}_K^{*'}$, par un raisonnement analogue à celui de Schwartz [19].

L'espace $\mathcal{O}^*(\Omega)$ étant tonnelé, H est équicontinue dans $\mathcal{O}^{*'}(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il existe p , semi-norme continue sur $\mathcal{O}^*(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{O}^*(\Omega), \quad |(H, \varphi)| \leq p(\varphi).$$

Soit $\theta \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ une fonction qui vaut 1 au voisinage de K . On a $H = \theta H$, donc

$$\forall f \in \mathcal{E}^*(\Omega), \quad |(H, f)| = |(H, \theta f)| \leq p(\theta f)$$

et $p \circ \theta$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{E}^*(\Omega)$.

b. Démontrons que $\mathcal{O}^*(\Omega)$ est tonnelé : soit H une partie bornée de $\mathcal{O}^{*'}(\Omega)$ muni de la topologie faible. Pour tout compact K de Ω , soit $\theta_K \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ une fonction qui vaut 1 au voisinage de K . L'espace \mathcal{O}^* étant tonnelé, il en est de même de \mathcal{E}^* , et $\theta_K H$ est une partie équicontinue de $\mathcal{E}^{*'}$, et donc de $(\mathcal{O}_K^*)'$, car \mathcal{O}_K^* a aussi la topologie induite par \mathcal{E}^* .

Comme pour tout compact K , la restriction de H à \mathcal{O}_K^* est égale à $\theta_K H$, la restriction de H à \mathcal{O}_K^* est équicontinue : cela implique que H est une partie équicontinue de

$$\left(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ K \subset \Omega}} \mathcal{O}_K^* \right)' = \mathcal{O}^{*'}(\Omega).$$

PROPOSITION 4.1. — Soit \mathcal{O}^* un ultra-sous-espace de \mathcal{O} , $P(D)$ un opérateur différentiel (linéaire à coefficients constants).

a. Si $P(D) \mathcal{E}^*(\Omega) = \mathcal{E}^*(\Omega)$, l'ouvert Ω est $P(D)$ -convexe.

b. Si les solutions exponentielle-polynomes de l'équation $P(D)u = 0$ sont denses dans l'ensemble de ces solutions dans $\mathcal{E}(\Omega)$, il en sera de même dans le sous-espace des solutions de $\mathcal{E}^*(\Omega)$.

Démonstration. — a. D'après le lemme 5.3, $\mathcal{E}^*(\Omega)$ est tonnelé. D'autre part, soit E une solution élémentaire dans \mathcal{O}' de l'opérateur $P(-D)$: si $u \in \mathcal{E}^{*'}(\Omega)$ est telle que $P(-D)u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, u appartient à $\mathcal{E}'(\Omega)$ car $u = E \star P(-D)u$. On peut donc appliquer le lemme 5.2 et conclure que si $P(D) \mathcal{E}^*(\Omega) = \mathcal{E}^*(\Omega)$, on a $P(D) \mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$.

b. Cette assertion est à peu près évidente.

Nous dirons, si $u \in \mathcal{E}'$, que u est inversible dans \mathcal{O}' s'il existe $T \in \mathcal{O}'$ telle que $u \star T = \delta$.

PROPOSITION 4.2. — Soient \mathcal{O}^* et $\tilde{\mathcal{O}}$ deux ultra-sous-espaces de \mathcal{O} tels que pour tout ouvert Ω , $\tilde{\mathcal{E}}(\Omega)$ et $\mathcal{O}^{*'}(\Omega)$ soient des espaces de Fréchet. [Par exemple, $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}(M_p)$ et $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_0(M_p)$.]

a. Si Ω est un ouvert $P(D)$ -convexe on a

$$P(D) \mathcal{O}^{*'}(\Omega) = \mathcal{O}^{*'}(\Omega),$$

$$P(D) \tilde{\mathcal{E}}(\Omega) = \tilde{\mathcal{E}}(\Omega).$$

b. Si $u \in \mathcal{E}'$ est inversible dans \mathcal{O}' ,

$$u \star \mathcal{O}^{*'} = \mathcal{O}^{*'},$$

$$u \star \tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}.$$

Démonstration. — Démontrons par exemple que si $u \in \mathcal{E}'$ est inversible dans \mathcal{O}' , $u \star \tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}$. D'après le lemme 4.1, il suffit de démontrer que si B est une partie de $\tilde{\mathcal{E}}'$, telle que $\check{u} \star B$ est borné dans $\tilde{\mathcal{E}}'$, B est bornée dans $\tilde{\mathcal{E}}'$. Il résulte du théorème des supports de Martineau (*loc. cit.*) que les éléments de B ont leur support dans un compact fixe. Or si E est une solution élémentaire de u dans \mathcal{O}' , on a $B = \check{E} \star \check{u} \star B$ donc B est borné dans $\tilde{\mathcal{O}}'$. Cela implique que B est borné dans $\tilde{\mathcal{E}}'$.

Les autres cas se démontrent de manière analogue.

C. Q. F. D.

Remarque 4.1. — On aurait pu dans le lemme 4.1 et dans la proposition 4.2 remplacer l'hypothèse que les espaces étaient de Fréchet par l'hypothèse plus faible que ces espaces étaient tonnelés et « pleinement complets » suivant la terminologie de M. et M^{me} Robertson ([15], p. 111).

Remarque 4.2. — Des résultats voisins à ceux de ce paragraphe ont été démontrés par Trèves [20], par Chou [3], qui démontre d'ailleurs

que la condition « u est inversible dans \mathcal{O}' » de la proposition 4.2, b n'est pas nécessaire, et par Björk [2] qui étend systématiquement les chapitres 3, 4, 6 du livre de M. Hörmander à des espaces analogues à ceux de Roumieu.

5. LE SUPPORT SINGULIER DES ULTRA-DISTRIBUTIONS. — Soit $N \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Nous dirons qu'un opérateur différentiel est hyperbolique pour N s'il a une solution élémentaire distribution à support dans un cône fermé contenu dans $\{x \mid (x, N) > 0\} \cup \{0\}$.

DÉFINITION 5.1. — Si u est une ultra-distribution sur Ω , nous dirons que $x \in \Omega$ appartient au support \mathcal{O}' -singulier de u [en abrégé : $s.\mathcal{O}'s(u)$], si le germe de u en x n'est pas un germe de distribution. Nous dirons que l'opérateur différentiel $P(D)$ est régulier pour $N \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, si pour toute ultra-distribution u à support compact :

$$s.\mathcal{O}'s(P(D)u) \subset \{x \mid (x, N) \geq 0\} \quad -$$

implique que

$$s.\mathcal{O}'s(u) \subset \{x \mid (x, N) \geq 0\}.$$

Il est facile, compte tenu du théorème d'unicité de Holmgren ([10], théor. 533) de vérifier qu'un opérateur hyperbolique pour N est régulier pour N , de même d'ailleurs que tout opérateur elliptique (cela résulte alors par exemple des résultats de MM. Bengel et Harvey [1] et [9]).

PROPOSITION 5.1. — Si $P_m(D)$, partie principale de $P(D)$, est hyperbolique pour N , et si $P(D)$ est régulier pour N , $P(D)$ est hyperbolique pour N .

Remarque. — En particulier, il existe des opérateurs qui ne sont pas réguliers pour N , puisqu'on sait qu'il existe des opérateurs à parties principales hyperboliques qui ne sont pas hyperboliques.

LEMME 5.1. — Si $P_m(D)$ est hyperbolique pour N , il existe une ultra-distribution E à support dans un cône Γ fermé, contenu dans

$$\{x \mid (x, N) > 0\} \cup \{0\},$$

et telle que $P(D)E = \delta$.

Démonstration du lemme. — C'est une conséquence du théorème 5.7.3 de [10] : Soit δ tel que $1 < \delta < \frac{m}{m-1}$ [si $m = 1$, $P(D)$ est hyperbolique], et soit

$$\mathcal{O}^\delta = \mathcal{O}_0(M_p), \quad \text{avec } M_p = |P|^{\delta|P|}.$$

Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{O}^\delta$ à support dans un demi-espace $\{x \mid (x, N) > a\}$, il existe une et une seule fonction $f \in \mathcal{E}^\delta$ à support dans le demi-espace $\{x \mid (x, N) \geq a\}$ telle que $P(D)f = \varphi$. Soit E la forme linéaire sur \mathcal{O}^δ qui a $\check{\varphi}$ fait correspondre $f(0)$: cette forme linéaire est bien définie car f ne dépend pas du choix du demi-espace ouvert contenant $\check{\varphi}$, et elle est

continue d'après le théorème du graphe fermé. Le support de l'ultra-distribution E est évidemment contenu dans le demi-espace $\{x|(x, N) \geq 0\}$ et $P(D)E = \delta$. Soit alors $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}'$ une suite régularisante à support dans un cône fermé fixe γ contenu dans $\{x|(x, N) > 0\} \cup \{0\}$. Comme $P(D)E \star \rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon$, il résulte du théorème de Holmgren que $E \star \rho_\varepsilon$ aura son support dans un cône Γ fixe fermé, $\Gamma \subset \{x|(x, N) > 0\} \cup \{0\}$: il en sera donc de même de E .

Démonstration de la proposition. — Soit E la solution élémentaire ultra-distribution définie au lemme 1 et Γ son support.

Le cône Γ rencontre tous les demi-espaces $\{x|(x, N) \leq a\}$ suivant un compact :

Soit alors $\rho_n \in \mathcal{E}'$ tels que

$$\begin{aligned} \rho_n &= 0 & \text{sur } \{x|(x, N) \geq n+2\}, \\ \rho_n &= 1 & \text{sur } \{x|(x, N) \leq n+1\}. \end{aligned}$$

L'ultra-distribution $\rho_n E$ est à support compact et la restriction de $P(D)(\rho_n E)$ au demi-espace $\{x|(x, N) < n\}$ appartient à \mathcal{D}' : il en est de même de $\rho_n E$ d'après l'hypothèse de régularité sur $P(D)$, et \mathcal{D}' étant un faisceau, cela implique que E appartient à \mathcal{D}' .

Remarque 5.1. — On peut étendre le théorème d'unicité de M. John (cf. par exemple [10], théor. 5.7.1) aux ultra-distributions et montrer qu'inversement, les seuls opérateurs ayant une solution élémentaire ultra-distribution à support dans un cône sont les opérateurs de partie principale hyperbolique.

6. FAISCEAUX D'ULTRA-DISTRIBUTIONS. — Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur \mathbf{R}^n . Désignons par $\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{R}^n)$ le sous-groupe de ses sections sur \mathbf{R}^n à support compact, et désignons par $\tilde{\mathcal{F}}$ le préfaisceau constant $\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{R}^n)$. Soit N le sous-préfaisceau de $\tilde{\mathcal{F}}$ défini par

$$f \in N(U) \iff f \in \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{R}^n) \text{ et } \text{support}(f) \cap U = \emptyset$$

pour tout U ouvert de \mathbf{R}^n .

Le lemme qui suit n'est qu'une généralisation d'une remarque de [14].

LEMME 6.1. — Si le faisceau \mathcal{F} est mou, il s'identifie au faisceau associé au préfaisceau quotient : $\tilde{\mathcal{F}}/N$.

Démonstration. — Nous montrerons seulement que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, l'application

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Omega \ni x}} \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{R}^n)/N(\Omega) \mapsto \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Omega \ni x}} \mathcal{F}(\Omega) = \mathcal{F}_x$$

est bijective.

Cette application est injective car pour tout ouvert Ω , $N(\Omega)$ est le noyau de l'application :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega).$$

Cette application est surjective car si $x \in \mathbf{R}^n$, $\dot{T} \in \mathcal{F}_x$, il existe un ouvert ω contenant x , et $T \in \mathcal{F}(\omega)$ dont l'image dans \mathcal{F}_x est \dot{T} .

Soient alors ω_1 et ω_2 deux ouverts relativement compacts tels que

$$x \in \omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \omega_2 \subset \bar{\omega}_2 \subset \omega$$

et soit

$$\omega_3 = \omega \cap \bigcup \bar{\omega}_1.$$

Le faisceau \mathcal{F} étant mou, il existe ([6], théor. 3.6.1) $T_2 \in \mathcal{F}(\omega)$ et $T_3 \in \mathcal{F}(\omega)$ tels que

$$\begin{aligned} T &= T_2 + T_3, \\ \text{support}(T_2) &\subset \omega_2, \\ \text{support}(T_3) &\subset \omega_3. \end{aligned}$$

L'image de T_3 dans \mathcal{F}_x est donc nulle, et il est clair qu'il existe $T'_2 \in \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{R}^n)$ dont la restriction à ω est T_2 , et dont l'image dans \mathcal{F}_x est donc \dot{T} .

C. Q. F. D.

Nous désignerons par B le faisceau des hyperfonctions sur \mathbf{R}^n de M. Sato [18]. Rappelons (cf. [14]) que B est un faisceau flasque, et que l'ensemble de ses sections à support compact s'identifie à $\mathfrak{a}'(\mathbf{R}^n)$.

Soit \mathcal{O}^* un ultra-sous-espace de \mathcal{O} .

LEMME 6.2. — *L'injection de $\mathcal{E}^{*'} dans \mathfrak{a}' conserve les supports.$*

La démonstration est la même que dans le cas de \mathcal{E}' (cf. [9], p. 54).

PROPOSITION 6.1. — *Le faisceau $\mathcal{O}^{*'} est un sous-faisceau de B .$*

Démonstration. — Le faisceau $\mathcal{O}^{*'}$ est mou d'après la proposition 1.2 et le faisceau B étant flasque sur l'espace paracompact \mathbf{R}^n est mou.

Soient N^* et N les sous-préfaisceaux des préfaisceaux constants $\mathcal{E}^{*'}$ et \mathfrak{a}' construits de manière analogue au préfaisceau N du lemme 6.1. D'après ce lemme les faisceaux $\mathcal{O}^{*'}$ et B sont les préfaisceaux associés aux préfaisceaux $\mathcal{E}^{*'}/N^*$ et \mathfrak{a}'/N . D'après le lemme 6.2, pour tout ouvert Ω , $N^*(\Omega) = N(\Omega) \cap \mathcal{E}^{*'}/N^*(\mathbf{R}^n)$. On a donc pour tout ouvert Ω des applications injectives :

$$\mathcal{E}^{*'}/N^*(\Omega) \rightarrow \mathfrak{a}'/N(\Omega)$$

qui détermine un morphisme de préfaisceau :

$$\mathcal{E}^{*'}/N^* \rightarrow \mathfrak{a}'/N.$$

Le morphisme se prolonge ([6], p. 114) en un morphisme de faisceau : $\mathcal{O}^{*'} \rightarrow B$ et ce morphisme sera évidemment injectif (c'est-à-dire injectif en chaque fibre).

C. Q. F. D.

Si $(\mathcal{O}_i^*)_{i=1, \dots, p}$ est un ensemble fini d'ultra-sous-espaces de \mathcal{O} , l'espace

$$\mathcal{O}^* = \bigcap_1^p \mathcal{O}_i^*$$

est un ultra-sous-espace de \mathcal{O} , car si pour tout i , $\varphi_i \in \mathcal{O}_i^*$, $\varphi_1 \star \dots \star \varphi_p$ appartient à \mathcal{O}^* [les propriétés (B), (C), (D) de la définition 1.1 sont immédiates]. Pour tout ouvert Ω la topologie de $\mathcal{O}^*(\Omega)$ est plus fine que celle induite par les $\mathcal{O}_i^*(\Omega)$ et $\mathcal{O}^*(\Omega)$ est dense dans ces espaces; on en conclut que la réunion de toutes les ultra-distributions sur un ouvert Ω forme un espace vectoriel que nous noterons : $\cup \mathcal{O}^{*'}(\Omega)$.

Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts $\Omega_1 \subset \Omega_2$ les opérations de restrictions à Ω_1 sur les espaces $\mathcal{O}^{*'}(\Omega_2)$ définissent une application linéaire :

$$\cup \mathcal{O}^{*'}(\Omega_2) \rightarrow \cup \mathcal{O}^{*'}(\Omega_1)$$

et nous noterons par $\cup \mathcal{O}^{*}'$ le préfaisceau ainsi obtenu.

LEMME 6.3. — Soit $(\mathcal{O}_n^*)_{n \in \mathbb{N}^+}$ une suite d'ultra-sous-espaces de \mathcal{O} . L'espace

$$\mathcal{O}^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} \mathcal{O}_n^*$$

est un ultra-sous-espace de \mathcal{O} .

Démonstration. — La seule chose non triviale à démontrer est que \mathcal{O}^* n'est pas réduit à $\{0\}$.

D'après les remarques qui précèdent on peut supposer la suite \mathcal{O}_n^* décroissante.

Soit alors pour tout n , $\varphi_n \in \mathcal{O}_n^*$ une fonction telle que

$$\varphi_n \geq 0, \quad \int \varphi_n = 1,$$

le support de φ_n étant contenu dans la boule de rayon 2^{-n} centrée à l'origine.

La suite $(\varphi_1 \star \dots \star \varphi_n)_n$ est bornée dans \mathcal{O} ; on peut donc en extraire une sous-suite convergente qu'on va écrire :

$$(\varphi_1^1 \star \dots \star \varphi_n^1)_n,$$

où chaque φ_j^1 est un produit fini de φ_j .

De même, la suite $(\varphi_2^1 \star \dots \star \varphi_n^1)_n$ est bornée dans \mathcal{O} et l'on peut extraire une sous-suite convergente qu'on peut écrire :

$$(\varphi_2^2 \star \dots \star \varphi_n^2)_n.$$

En réitérant cette opération on obtient pour tout p , une suite convergente vers une fonction ψ_p

$$(\varphi_p^p \star \dots \star \varphi_n^p)_n$$

comme la suite

$$(\varphi_1^1 \star \dots \star \varphi_{p-1}^{p-1}) \star (\varphi_p^p \star \varphi_{p+1}^p \star \dots \star \varphi_n^p)_n.$$

est une suite extraite de la suite :

$$(\varphi_1^1 \star \dots \star \varphi_n^1)_n,$$

elle converge vers ψ_1 . Donc

$$\psi_1 = (\varphi_1^1 \star \dots \star \varphi_{p-1}^{p-1}) \star \psi_p$$

comme pour tout i , $\varphi_i^i \in \mathcal{O}_i^*$, ψ_1 appartient à $\bigcap_p \mathcal{O}_p^*$.

Il reste à voir que ψ_1 n'est pas identiquement nulle, mais

$$\int \psi_1 dx = 1, \quad \text{car} \quad \int (\varphi_1 \star \dots \star \varphi_n) dx = 1 \quad \text{pour tout } n.$$

PROPOSITION 6.2. — *Le préfaisceau $\cup \mathcal{O}^{*'} est un sous-faisceau mou du faisceau B des hyperfonctions.$*

Démonstration. — Compte tenu des propositions 1.2 et 6.1, la seule chose à démontrer est que $\cup \mathcal{O}^{*'}$ est un faisceau.

Soit $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, soit pour tout i , \mathcal{O}_i^* un ultra-sous-espace de \mathcal{O} , et soit $T_i \in \mathcal{O}_i^{*'(\Omega_i)}$ ces données étant telles que :

$$\forall (i, j), \quad T_i|_{\Omega_i \cap \Omega_j} = T_j|_{\Omega_i \cap \Omega_j}.$$

Soit $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \Omega_{i_n}$ un recouvrement dénombrable extrait du précédent et soit :

$$\mathcal{O}^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} \mathcal{O}_{i_n}^*.$$

Comme $\mathcal{O}^{*'}$ est un faisceau, il existe $T \in \mathcal{O}^{*'(\Omega)}$ telle que

$$\forall n, \quad T|_{\Omega_{i_n}} = T_{i_n}.$$

Mais il résulte évidemment de cette égalité que

$$\forall i, \quad T|_{\Omega_i} = T_i.$$

L'unicité de T est évidente.

C. Q. F. D.

7. CONVOLUTION DES ULTRA-DISTRIBUTIONS. — Nous utiliserons les produits tensoriels inductifs introduits par Grothendieck [8] et si E et F sont deux E. L. C. nous noterons par $E \otimes_i F$ ce produit tensoriel (rappelons qu'il « correspond » aux applications bilinéaires séparément continues).

Nous utiliserons deux propriétés de ce produit :

Le produit \otimes_i est associatif et commutatif.

Le produit $E \otimes_i F$ de deux espaces tonnelés est tonnelé ([8], p. 78).

Soit E un E. L. C. Nous désignerons par \widehat{E} l'ensemble des points du complété \widehat{E} de E qui appartiennent à l'adhérence de parties bornées de E. On munira \widehat{E} de la topologie induite par \widehat{E} (\widehat{E} n'est pas toujours quasi-complet).

Si φ appartient à $\mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$, nous noterons par ${}^+\varphi$ la fonction de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^{2n})$ définie par

$${}^+\varphi(x, y) = \varphi(x + y).$$

Si \mathcal{O}^* est un ultra-sous-espace de $\mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$ on note par \mathcal{O}^{2*} l'image de $\mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*$ dans $\mathcal{O}(\mathbf{R}^{2n})$ par l'application \widehat{i} , prolongement de l'injection i de $\mathcal{O}^* \otimes_i \mathcal{O}^*$ dans $\mathcal{O}(\mathbf{R}^{2n})$.

On note par ${}^+\mathcal{O}^*$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$ telles que ${}^+\varphi$ appartiennent à \mathcal{E}^{2*} .

LEMME 7.1. — L'espace \mathcal{O}^{2*} est un ultra-sous-espace de $\mathcal{O}(\mathbf{R}^{2n})$.

Démonstration. — La propriété A de la définition 1.1 est évidente. Démontrons B. Écrivons \mathcal{O}^* et \mathcal{E}' à la place de

$$\mathcal{O}^*(\mathbf{R}^n) \text{ et } \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n).$$

La convolution définit une application linéaire continue :

$$\star : \mathcal{E}' \otimes_i \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{O}^*.$$

On en déduit par composition, commutativité et associativité du produit \otimes_i , une application linéaire continue que nous noterons encore \star :

$$\star : (\mathcal{E}' \otimes_i \mathcal{E}') \otimes_i (\mathcal{O}^* \otimes_i \mathcal{O}^*) \rightarrow \mathcal{O}^* \otimes_i \mathcal{O}^*.$$

Comme tous les espaces sont tonnelés, cette application se prolonge ([7], p. 157) en une application

$$\widehat{\star} : (\mathcal{E}' \widehat{\otimes}_i \mathcal{E}') \otimes_i (\mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*) \rightarrow \mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*$$

et elle est en fait à valeur dans $\mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*$ car si B est une partie bornée de $\mathcal{O}^* \otimes_i \mathcal{O}^*$, et B' une partie bornée de $\mathcal{E}' \otimes_i \mathcal{E}'$, $B \star B'$ sera bornée dans $\mathcal{O}^* \otimes_i \mathcal{O}^*$, puisque $\mathcal{O}^* \otimes_i \mathcal{O}^*$, et $\mathcal{E}' \otimes_i \mathcal{E}'$ sont tonnelés.

Comme $\mathcal{E}' \widehat{\otimes}_i \mathcal{E}'$ n'est autre que $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^{2n})$ (pour le vérifier on peut utiliser ([8], p. 43) et ([7], p. 229), on a construit une application bilinéaire \star séparément continue :

$$\widehat{\star} : \mathcal{E}'(\mathbf{R}^{2n}) \times \mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*$$

et il reste à voir que si \hat{i} désigne l'application de $\mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*$ dans \mathcal{O}^{2*} , et si \star désigne aussi le produit de convolution dans \mathbf{R}^{2n} , on a la formule

$$\hat{i}(e' \widehat{\star} \varphi) = e' \star \hat{i}(\varphi).$$

Or cette formule est vraie si e' appartient à $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}'$ et φ à $\mathcal{O}^* \otimes \mathcal{O}^*$ et le cas général résulte de ce que l'application $\widehat{\star}$ est continue sur les produits de parties bornées de $(\mathcal{E}' \otimes_i \mathcal{E}') \times (\mathcal{O}^* \otimes_i \mathcal{O}^*)$.

Les propriétés (C) et (D) de la définition 1.1 se démontrent de manière analogue.

LEMME 7.2. — ${}^+\mathcal{O}^*$ est un ultra-sous-espace de $\mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$.

Les propriétés (B), (C), (D) résultent du lemme 7.1 et des formules :

$${}^+\overline{\varphi} = \overline{{}^+\varphi}, \quad {}^+(\lambda \circ \varphi) = \lambda \circ {}^+\varphi, \quad {}^+\varphi \cdot {}^+\psi = {}^+(\varphi \cdot \psi)$$

et

$${}^+(e' \star \varphi) = (e' \otimes \delta) \star {}^+\varphi.$$

Il reste à voir que ${}^+\mathcal{O}^*$ n'est pas déduit à $\{0\}$, or si θ appartient à \mathcal{O}^{2*} et si φ appartient à \mathcal{O} , la fonction

$$\theta \star {}^+\varphi = \int_{\mathbf{R}^{2n}} \theta(x', y') \varphi(x + y - x' - y') dx' dy'$$

est de la forme ${}^+\psi$, avec

$$\psi(t) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} \theta(x', y') \varphi(t - x' - y') dx' dy'$$

et ${}^+\psi$ appartient à \mathcal{E}^{2*} puisque θ appartient à \mathcal{O}^{2*} . Donc ψ appartient à ${}^+\mathcal{O}^*$.

Nous désignerons par $\cup \mathcal{E}^*$, l'ensemble de toutes les ultra-distributions à support compact.

PROPOSITION 7.1. — L'espace $\cup \mathcal{E}^*$ est une sous-algèbre de convolution de \mathfrak{a}' .

Démonstration. — Soient u_1 et u_2 deux ultra-distributions qu'on peut supposer appartenir à un même espace $\mathcal{E}^{*'} : u_1 \otimes u_2$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*$, et i désignant toujours l'application de $\mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*$ dans \mathcal{O}^{2*} , nous allons voir que $u_1 \otimes u_2$ est nulle sur $\hat{i}^{-1}(0)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*$ telle que $\hat{i}(\varphi) = 0$.

Soit ρ_ε une suite régularisante de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Il résulte de la démonstration du lemme 7.2 que $\varphi \star (\rho_\varepsilon \otimes \rho_\varepsilon)$ tend vers φ dans $\mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*$, et d'autre part, on a

$$(u_1 \otimes u_2, \varphi \star (\rho_\varepsilon \otimes \rho_\varepsilon)) = ((u_1 \otimes u_2) \star (\rho_\varepsilon \otimes \rho_\varepsilon), \varphi),$$

car cette formule est vraie si φ appartient à $\mathcal{O}^* \otimes \mathcal{O}^*$, et donc pour toute φ par continuité.

On est donc ramené au cas où u_1 et u_2 sont dans \mathcal{E}' . Alors $u_1 \otimes u_2$ se prolonge en \tilde{u} sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{D}^* & \xrightarrow{u_1 \otimes u_2} & \mathbb{C} \\ \uparrow i_1 & \searrow \hat{i} & \uparrow \tilde{u} \\ \mathcal{D}^* \otimes_i \mathcal{D}^* & \xrightarrow{i} & \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}) \end{array}$$

On a

$$i = \hat{i} \circ i_1, \quad (u_1 \otimes u_2) \circ i_1 = \tilde{u} \circ i.$$

Comme $i_1(\mathcal{O}^* \otimes_i \mathcal{O}^*)$ est dense dans $\mathcal{O}^* \widehat{\otimes}_i \mathcal{O}^*$, on a

$$u_1 \otimes u_2 = \tilde{u} \circ \hat{i}.$$

Ceci montre que si $\hat{i}(\varphi) = 0$, $(u_1 \otimes u_2)(\varphi) = 0$.

Si u_1 et u_2 appartiennent à \mathcal{E}' , $u_1 \otimes u_2$ définit donc une forme linéaire continue sur \mathcal{D}^{2*} , qui sera évidemment à support compact.

Soit alors $\varphi \in {}^+\mathcal{O}^*$. Nous voulons montrer que $u_1 \star u_2 \star \varphi$ appartient à \mathcal{O} : il en résultera, d'après la proposition 2.2, que $u_1 \star u_2 \in ({}^+\mathcal{E}^*)'$.

Comme ${}^+\varphi \in \mathcal{E}^{2*}$, $(u_1 \otimes u_2) \star {}^+\varphi$ appartient à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$ et il suffit de démontrer la formule :

$$\forall f \in \mathfrak{a}(\mathbb{R}^n), \quad \langle u_1 \star u_2 \star \varphi, f \rangle = \langle (u_1 \otimes u_2) \star {}^+\varphi, \delta \otimes f \rangle,$$

ce qui revient à

$${}^+(\varphi \star f) = {}^+\varphi \star (\delta \otimes f),$$

ce qui achève la démonstration.

On peut exprimer la proposition 7.1 sous une forme ne faisant pas intervenir les topologies des ultra-sous-espaces de \mathcal{O} :

PROPOSITION 7.1'. — *Si u_1 et u_2 sont deux fonctionnelles analytiques régularisables par des ultra-sous-espaces de \mathcal{O} , il en est de même de leur produit : $u_1 \star u_2$.*

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] G. BENDEL, *Das Weylsche Lemma in der Theorie der Hyperfunktionen* (*Math. Z.*, t. 96, 1967, p. 373-392).
- [2] G. BJÖRK, *Linear partial differential operators and generalized distributions* (*Arkiv Math.*, t. 6, 1966, p. 351-407).
- [3] C. C. CHOU, Communication personnelle.
- [4] J. DIEUDONNÉ et SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces \mathcal{F} et $\mathcal{L}\mathcal{F}$* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 1, 1949, p. 61-101).
- [5] L. EHRENPREIS, *Solutions of some problems of division* (*Amer. J. Math.*, t. 82, 1960, p. 522-588).
- [6] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
- [7] A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques* (*Soc. Math. São Paulo*, 1964).
- [8] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (*Mém. Amer. Math. Soc.*, t. 16, 1955).
- [9] R. HARVEY, *Hyperfunctions and partial differential operators*, Thesis, Stanford University, 1966.
- [10] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1963.
- [11] J. L. LIONS, *Supports des produits de composition* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1530-1532).
- [12] B. MALGRANCE, *Existence et approximations des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1955-1956, p. 271-355).
- [13] A. MARTINEAU, *Sur les fonctionnelles analytiques et la transformée de Fourier-Borel* (*J. Anal. Math. Jérusalem*, t. 11, 1963, p. 1-164).
- [14] A. MARTINEAU, *Les hyperfonctions de M. Sato*, Séminaire Bourbaki, 13^e année, 1960-1961, n° 214.
- [15] A. P. ROBERTSON et W. J. ROBERTSON, *Topological vector spaces*, Cambridge Tracts, 53.
- [16] C. ROUMIEU, *Sur quelques extensions de la notion de distribution* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 77, 1960, p. 41-121).
- [17] C. ROUMIEU, *Ultra-distributions définies sur R_n et sur certaines classes de variétés différentiables* (*J. Anal. Math. Jérusalem*, t. 10, 1962-1963, p. 153-192).
- [18] M. SATO, *Theory of hyperfunctions*, I, II (*J. Fac. Sc. Tokyo*, t. 8, 1959-1960, p. 139-193 et 287-437).
- [19] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, I, II, Herman, Paris.
- [20] J. F. TRÈVES, *Cours de la Faculté des Sciences de Paris*, (I. H. P.), 1965-1966.

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1967).

