

Invariants de type fini

par Pierre Vogel¹

Résumé.

Les invariants de Vassiliev (ou de type fini) de nœuds ou d'entrelacs sont des invariants très généraux qui généralisent la plupart des invariants algébriques connus et l'intégrale de Kontsevich est en quelque sorte l'invariant de Vassiliev universel. Il prend ses valeurs dans un module de diagrammes $\mathcal{A}(\Gamma)$, où Γ est l'entrelacs considéré comme une courbe abstraite.

Cette théorie se transpose très bien au cas des variétés de dimension trois. L'invariant de Le-Murakami-Ohtsuki correspond à l'intégrale de Kontsevich. Il prend ses valeurs dans le module $\mathcal{A}(\emptyset)$. C'est en quelque sorte, du moins pour les sphères d'homologie, l'invariant de type fini universel.

Introduction.

L'intégrale de Kontsevich associe à tout entrelacs $\alpha : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^3$ un élément $Z(\alpha)$ appartenant à un module $\mathcal{A}(\widehat{\Gamma})$. Ce module est le complété d'un module gradué $\mathcal{A}(\Gamma)$ défini par générateurs et relations, les générateurs étant des diagrammes trivalents contenant Γ . Cet invariant est suffisamment général pour vérifier la propriété suivante : si I associe à un nœud ou un entrelacs son polynôme de Jones ou de Kauffman, ou encore son polynôme HOMFLY, il existe pour toute courbe Γ une forme linéaire explicite f sur $\mathcal{A}(\widehat{\Gamma})$ telle que I soit la composée de f avec l'intégrale de Kontsevich.

D'autre part, toute variété M compacte connexe orientée sans bord de dimension trois peut être définie comme chirurgie sur la sphère S^3 le long d'un entrelacs $\alpha : \Gamma \rightarrow S^3$. On peut alors définir pour tout entier n et toute courbe Γ , une application ι_n de $\mathcal{A}(\widehat{\Gamma})$ dans $\mathcal{A}(\emptyset)$ qui ne dépend que de la signature de la forme d'enlacement de M et l'invariant de Le-Murakami-Ohtsuki de M est simplement défini par la formule :

$$Z^{LMO}(M) = \sum_{n \geq 0} \iota_n(Z(\alpha))_n$$

où $\iota_n(Z(\alpha))_n$ est la composante de degré n de $\iota_n(Z(\alpha))$.

¹Université Paris VII, UMR 7586, UFR de mathématiques, Case 7012, 2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05 – Email : vogel@math.jussieu.fr

Il existe plusieurs définitions des invariants de type fini des variétés de dimension trois, mais elles sont équivalentes dans le cas des sphères d'homologie entière. De plus l'invariant $Z^{LMO}(M)$ est, pour les sphères d'homologie entière, l'invariant de type fini universel, de la même façon que l'intégrale de Kontsevich des nœuds est l'invariant de type fini (ou de Vassiliev) universel.

1. Modules de diagrammes

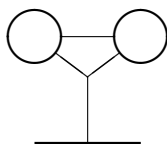
Soit Γ une courbe, c'est-à-dire une variété compacte de dimension 1. On appelle Γ -diagramme un triple (K, f, α) où :

- K est un graphe fini et f est un homéomorphisme de Γ sur un sous-graphe de K
- tous les points de $f(\partial\Gamma)$ sont des sommets univalents de K et tous les autres sommets de K sont trivalents
- α associe à chaque sommet trivalent x de K un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arêtes de K issues de x .

L'adhérence du complémentaire de Γ dans un Γ -diagramme K sera appelée la partie extérieure de K . C'est un diagramme uni-trivalent dont les sommets univalents sont situés sur la courbe Γ .

Pour simplifier, un Γ -diagramme (K, f, α) sera simplement noté K et l'application f considérée comme une inclusion. De plus les Γ -diagrammes seront toujours considérés à isomorphisme près, un isomorphisme de (K, f, α) sur (K', f', α') étant un isomorphisme de graphe φ de K sur K' qui respecte les ordres cycliques et tel que $\varphi \circ f$ soit de la forme $f' \circ \psi$ où ψ est un automorphisme de Γ isotope à l'identité.

Dans la pratique, un Γ -diagramme trivalent sera représenté par un graphe K contenant Γ et immergé dans le plan de telle façon que les ordres cycliques soient données par l'orientation standard du plan.



Remarque. Les graphes considérés ici sont tout-à-fait quelconques. Les arêtes ne sont pas orientées. Il peut exister plusieurs arêtes ayant des sommets donnés. Il se peut aussi que le graphe ait une composante homéomorphe à un cercle. En fait les seules contraintes considérées sont locales.

1.1 Définition. Soient k un corps de caractéristique 0 et Γ une courbe. On note $\mathcal{A}(\Gamma)$ le k -module défini par générateurs et relations de la façon suivante : les générateurs sont les Γ -diagrammes et les relations sont :

- la relation d'antisymétrie : si K' est obtenu à partir d'un Γ -diagramme trivalent

K par changement d'un ordre cyclique, on a : $K \equiv -K'$.

$$(AS) \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \circ \\ \diagdown \\ | \end{array} \equiv - \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array}$$

— la relation IHX (ou relation de Jacobi) : si K , K' et K'' ne diffèrent qu'au voisinage d'une arête de la façon suivante :

$$K : \quad \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} \quad K' : \quad \begin{array}{c} | \quad | \\ \text{---} \end{array} \quad K'' : \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

on a :

$$(IHX) \quad K \equiv K' - K''$$

Dans la relation IHX, l'arête n'est pas nécessairement extérieure à Γ . Elle peut être contenue dans Γ et dans ce cas la relation prend la forme suivante :

$$(STU) \quad \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array} \equiv \begin{array}{c} \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array}$$

Cette dernière relation est appelée relation STU dans la littérature.

Un Γ -diagramme a toujours un nombre pair de sommets trivalents. La moitié de ce nombre est appelé le degré du diagramme. Il est facile de vérifier que ce degré induit sur $\mathcal{A}(\Gamma)$ une structure de module gradué.

Il y a des variantes du module $\mathcal{A}(\Gamma)$ selon que l'on considère seulement certains types de Γ -diagrammes. Par exemple, si l'on considère uniquement des Γ -diagrammes K tels que chaque composante connexe de K rencontre Γ , on obtient un sous-module $\mathcal{A}_c(\Gamma)$ de $\mathcal{A}(\Gamma)$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{A}_c(\Gamma)$ est de dimension finie en chaque degré. De plus, comme tout Γ -diagramme se décompose de façon unique comme union disjointe d'un \emptyset -diagramme et d'un diagramme dont toute composante rencontre Γ , on obtient la décomposition suivante:

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{A}_c(\Gamma) \otimes \mathcal{A}(\emptyset)$$

Les modules gradués \mathcal{A} et \mathcal{A}_c ont un certain nombre de bonnes propriétés de functorialité par rapport à la courbe.

1.2 Proposition. *Une inclusion i d'une courbe Γ dans une courbe Γ' induit des morphismes de modules gradués i_* de $\mathcal{A}(\Gamma)$ dans $\mathcal{A}(\Gamma')$ et de $\mathcal{A}_c(\Gamma)$ dans $\mathcal{A}_c(\Gamma')$. Ces morphismes ne dépendent que de la classe d'isotopie de l'inclusion i . Ainsi \mathcal{A} et \mathcal{A}_c*

sont des foncteurs de la catégorie des courbes et des classes d'isotopie de plongements dans la catégorie des modules gradués.

1.3 Proposition. Soit Γ et Γ' deux courbes. Alors l'union disjointe induit des morphismes de modules gradués de $\mathcal{A}(\Gamma) \otimes \mathcal{A}(\Gamma')$ dans $\mathcal{A}(\Gamma \amalg \Gamma')$ et de $\mathcal{A}_c(\Gamma) \otimes \mathcal{A}_c(\Gamma')$ dans $\mathcal{A}_c(\Gamma \amalg \Gamma')$.

1.4 Proposition. Soit f une application continue d'une courbe Γ dans une courbe Γ' qui envoie bord en bord. Alors f induit des morphismes de modules gradués f^* de $\mathcal{A}(\Gamma')$ dans $\mathcal{A}(\Gamma)$ et de $\mathcal{A}_c(\Gamma')$ dans $\mathcal{A}_c(\Gamma)$. De plus f^* ne dépend que de la classe d'homotopie de $f : (\Gamma, \partial\Gamma) \rightarrow (\Gamma', \partial\Gamma')$. De façon plus précise, \mathcal{A} et \mathcal{A}_c sont des foncteurs homotopiques contravariants de la catégorie des paires $(\Gamma, \partial\Gamma)$, où Γ est une courbe, dans la catégorie des modules gradués.

Démonstrations. Si i est une inclusion de Γ dans Γ' l'application i_* envoie un Γ -diagramme K en l'union de K et de Γ' , Γ étant identifié à son image par i . Par construction l'application ainsi définie passe au quotient et définit une application toujours notée i_* de $\mathcal{A}(\Gamma)$ dans $\mathcal{A}(\Gamma')$ et de $\mathcal{A}_c(\Gamma)$ dans $\mathcal{A}_c(\Gamma')$ qui ne dépend que de la classe d'isotopie de i .

La proposition 1.3 est évidente mais la proposition suivante est plus sérieuse. Pour définir l'application f^* , nous allons procéder par étapes.

Soit K' un Γ' -diagramme. Notons $X(K') = \{u_i\}$ l'ensemble des sommets trivalents de K' situés sur Γ' . On dira que f est transverse à K' si f est différentiable sur un voisinage de $f^{-1}(X(K'))$ et a toutes ses valeurs critiques extérieures à $X(K')$. Nous allons tout d'abord définir $f^*(K')$ lorsque f est transverse à K' .

Soit H la partie extérieure de K' . C'est un graphe dont l'ensemble des sommets univalents sont les points $\{u_i\}$ et K' est l'union, au dessus de $X(K')$, de Γ' et de H . Notons S l'ensemble des fonctions s de $X(K')$ dans Γ telles que $f \circ s$ soit l'identité. Si s est une fonction de S on peut définir le graphe K_s comme l'union de H et de Γ , les points u_i étant identifiés à leurs images par s dans Γ . Comme f est étale au voisinage de tout point de $s(X(K'))$, les ordres cycliques de K' définissent des ordres cycliques au voisinage de chaque sommet trivalent de K_s et K_s est un Γ -diagramme. On définit alors l'élément $f^*(K')$ comme la somme (dans $\mathcal{A}(\Gamma)$ ou $\mathcal{A}_c(\Gamma)$) des éléments K_s , $s \in S$.

Si f n'est pas transverse à K' , l'application f est homotope à une application différentiable g qui n'a aucun point critique au-dessus des points u_i . On pose alors : $f^*(K') = g^*(K')$.

Si f' est une autre application continue de $(\Gamma, \partial\Gamma)$ dans $(\Gamma', \partial\Gamma')$ homotope à f , et si g et g' sont des applications différentiables homotopes à f et f' et transverses à K' , g et g' sont homotopes par une homotopie différentiable h_t qui est transverse à K' sauf pour un nombre fini de valeurs de t . On peut aussi supposer que si h_t n'est pas transverse à K' , h_t n'a qu'un point critique qui est envoyé en $X(K')$ et que ce point critique est non dégénéré. On dira qu'une telle homotopie est transverse à K' .

Ainsi, pour montrer que $f^*(K')$ est bien définie et ne dépend que de la classe d'homotopie de f , il suffit de montrer que si h_t est une homotopie transverse à K' on a : $h_0^*(K') = h_1^*(K')$. Or $h_t^*(K')$ est définie pour tout t tel que h_t soit transverse à

K' . De plus l'application $t \mapsto h_t^*(K')$ est localement constante là où elle est définie. Il reste à montrer que cette fonction n'a aucun saut, mais ceci est une conséquence immédiate de la relation AS. Ainsi $t \mapsto h_t^*(K')$ est constante et $f^*(K')$ est bien définie et ne dépend que de la classe d'homotopie de f .

Pour montrer que f^* est compatible avec les relations AS et IHX, il suffit de le faire lorsque f est différentiable et n'a aucune valeur critique située là où la géométrie des diagrammes changent. Dans ce cas f^* envoie une relation AS en une somme de relation AS et une relation IHX en une somme de relation IHX. Le reste de la proposition 1.4 est alors facile à vérifier. \square

Corollaire. *Pour toute courbe Γ , $\mathcal{A}_c(\Gamma)$ est une coalgèbre cocommutative graduée.*

Démonstration. Soit f la projection de $\Gamma \times \{0, 1\}$ vers Γ . Le morphisme f^* envoie $\mathcal{A}_c(\Gamma)$ en $\mathcal{A}_c(\Gamma \times \{0, 1\})$. Considérons le sous-module M de $\mathcal{A}_c(\Gamma \times \{0, 1\})$ engendré par tous les diagrammes ayant une composante qui rencontre à la fois $\Gamma \times \{0\}$ et $\Gamma \times \{1\}$. Il est facile de vérifier que le produit de $\mathcal{A}_c(\Gamma \times \{0\}) \otimes \mathcal{A}_c(\Gamma \times \{1\})$ dans $\mathcal{A}_c(\Gamma \times \{0, 1\})$ induit un isomorphisme ε de $\mathcal{A}_c(\Gamma) \otimes \mathcal{A}_c(\Gamma)$ sur $\mathcal{A}_c(\Gamma \times \{0, 1\})/M$. La diagonale Δ est alors l'application $\varepsilon^{-1} \circ f^*$. On vérifie aisément que $\mathcal{A}_c(\Gamma)$ munie de cette application Δ est une coalgèbre graduée cocommutative. \square

Remarque. Ce corollaire n'est pas valable pour le module $\mathcal{A}(\Gamma)$. Par contre, on vérifie que $\mathcal{A}(\Gamma)$ est une coalgèbre cocommutative graduée sur l'algèbre commutative $\mathcal{A}(\emptyset)$.

1.5 Proposition. *Soit $n > 0$ un entier. Alors $\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_c([0, 1] \times \{1, 2, \dots, n\})$ est une algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe. Elle est commutative pour $n = 1$.*

Démonstration. La structure de coalgèbre est déjà définie. Le produit est défini grâce à l'application i de $[0, 1] \times \{0, 1\}$ dans $[0, 1]$ qui est croissante par rapport au paramètre de $[0, 1]$ et qui envoie $[0, 1] \times \{0\}$ en $[0, 1/2[$ et $[0, 1] \times \{1\}$ en $]1/2, 1]$:

$$\mathcal{A}_c([0, 1]) \otimes \mathcal{A}_c([0, 1]) \rightarrow \mathcal{A}_c([0, 1] \times \{0, 1\}) \xrightarrow{i_*} \mathcal{A}_c([0, 1])$$

L'antipode est plus compliquée à définir. On la construit par récurrence sur le degré et l'on vérifie que l'on a ainsi une structure d'algèbre de Hopf sur \mathcal{P}_n . Le fait que \mathcal{P}_1 (notée également \mathcal{A} dans la littérature) soit commutative est montrée dans [BN] par exemple. La connexité signifie simplement qu'en degré 0 l'algèbre est réduite au corps de base, ce qui est évident.

2. L'intégrale de Kontsevich.

Initialement, l'intégrale de Kontsevich a été construite pour associer à tout nœud $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$ un élément $Z(\alpha)$ du complété d'un quotient de $\mathcal{A}_c(S^1)$. Elle a été ensuite étendue à tout entrelacs et, plus généralement, à tout tangle. Considérons tout d'abord le cas des tresses qui sont des tangles particuliers.

2.1 Le cas des tresses.

Soit T une tresse à n brins. On peut considérer cette tresse comme l'image d'un plongement α de $[0, 1] \times \{1, \dots, n\}$ dans $\mathbf{R}^2 \times [0, 1] = \mathbf{C} \times [0, 1]$ tel que pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $t \in [0, 1]$, $\alpha(t, i)$ soit de la forme $(\beta_i(t), t)$. Les fonctions β_i sont différentiables de $[0, 1]$ dans \mathbf{C} . On note $\omega(t)$ la forme différentielle de degré 1 définie par :

$$\omega(t) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_{ij} \frac{d\beta_i(t) - d\beta_j(t)}{\beta_i(t) - \beta_j(t)}$$

où h_{ij} est le diagramme obtenu en rajoutant une arête à $[0, 1] \times \{1, \dots, n\}$ attachée en les i -ième et j -ième brins et en prenant des ordres cycliques équivalents (via l'involution $(t, i) \leftrightarrow (t, j)$). La forme $\omega(t)$ est à coefficients dans l'algèbre \mathcal{P}_n (définie sur le corps des complexes).

$$h_{ij} = \left| \begin{array}{cccc} \cdots & \left| \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \end{array} \right. & \cdots & \\ 1 & i & j & n \end{array} \right|$$

L'intégrale de Kontsevich de T est alors définie par la série suivante :

$$Z(T) = \alpha_* \sum_{p \geq 0} (2i\pi)^{-p} \int_{\Delta_p} \omega(t_1) \wedge \cdots \wedge \omega(t_p)$$

où Δ_p est le simplexe $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_p \leq 1$. Cette intégrale appartient au module complété $\mathcal{A}_c(T)^\wedge$ (défini sur \mathbf{C}), où T est considéré comme une courbe abstraite.

2.2 Proposition. *Si deux tresses sont isotopes (à extrémités fixes), elles ont même intégrale de Kontsevich. De plus, si T_1 et T_2 sont deux tresses composables, on a un produit de $\mathcal{A}_c(T_1)^\wedge \otimes \mathcal{A}_c(T_2)^\wedge$ dans $\mathcal{A}_c(T_1 T_2)^\wedge$ défini par l'union des diagrammes et l'on a :*

$$Z(T_1 T_2) = Z(T_1) Z(T_2)$$

Esquisse de démonstration. Si l'on considère une tresse comme un chemin dans l'espace de configuration X_n formé des n -uples de n points distincts dans \mathbf{C} , $\omega(t)$ apparaît comme l'image réciproque par le chemin d'une forme différentielle ω_n définie sur X_n . Cette forme différentielle, à valeurs dans l'algèbre \mathcal{P}_n est en fait une connexion plate appelée connexion de Knizhnik-Zamolodchikov. Vue sous cet angle, l'intégrale $Z(T)$ apparaît comme la monodromie de cette connexion. D'autre part, on vérifie les deux égalités :

$$d\omega = 0 \quad \omega \wedge \omega = 0$$

ce qui implique que la connexion est plate et l'intégrale de dépend que de la classe d'homotopie (à extrémités fixes) du chemin dans l'espace de configuration X_n et $Z(T)$ est invariant par isotopie horizontale.

Le fait que Z soit compatible avec le produit est une simple application de la formule de Fubini. \square

Ces propriétés indiquent que Z est un foncteur entre deux catégories. La catégorie source est la catégorie des tresses \mathcal{B} . Les objets de \mathcal{B} sont les parties finies de \mathbf{C} .

Un morphisme dans \mathcal{B} entre deux parties finies P et Q de \mathbf{C} est une tresse, définie à isotopie près, contenue dans $\mathbf{C} \times [0, 1]$ et rencontrant $\mathbf{C} \times \{0\}$ en $P \times \{0\}$ et $\mathbf{C} \times \{1\}$ en $Q \times \{1\}$. La composition est le produit des tresses.

La catégorie but est plus compliquée à définir. Considérons la catégorie \mathcal{D} dont les objets sont les ensembles finis et où un morphisme dans \mathcal{D} d'un ensemble fini P vers un ensemble fini Q est un couple (Γ, u) , où Γ est un cobordisme de P vers Q , c'est-à-dire une courbe dont le bord est $P \amalg Q$, et u un élément de $\mathcal{A}(\Gamma)$. On considère de plus que deux couples (Γ, u) et (Γ', u') sont équivalents s'il existe un isomorphisme φ de Γ sur Γ' qui soit l'identité sur les bords et tel que : $u' = \varphi_*(u)$. La composition des cobordismes et l'union des diagrammes induisent la composition dans \mathcal{D} . De la même façon, on a les catégories \mathcal{D}_c , $\widehat{\mathcal{D}}$ et $\widehat{\mathcal{D}}_c$ obtenues en remplaçant $\mathcal{A}()$ par $\mathcal{A}_c()$ ou $\mathcal{A}(\widehat{\quad})$ ou encore $\mathcal{A}_c(\widehat{\quad})$.

On a donc :

2.3 Proposition. *L'intégrale de Kontsevich est un foncteur de la catégorie des tresses \mathcal{B} dans la catégorie $\widehat{\mathcal{D}}_c$.*

La catégorie $\widehat{\mathcal{D}}_c$ contient comme morphismes les algèbres \mathcal{P}_n . Elle contient aussi les groupes symétriques car une bijection d'un ensemble fini dans lui-même peut être vue comme un cobordisme Γ de X vers X et $(\Gamma, 1)$ est bien un automorphisme dans la catégorie $\widehat{\mathcal{D}}_c$. En fait si Γ est un cobordisme d'un ensemble X vers un ensemble Y , on peut le considérer, via la correspondance $\Gamma \mapsto (\Gamma, 1)$, comme un morphisme de $\widehat{\mathcal{D}}_c$.

2.4 Le cas des tangles.

La catégorie des tresses est une sous-catégorie de la catégorie des tangles. Le foncteur Z n'a pas de prolongement à cette catégorie. Mais c'est le cas si l'on considère la catégorie des tangles munis d'un champ de vecteurs.

2.5 Définition. On appelle tangle en bande ou b-tangle une sous-variété compacte Γ de dimension 1 contenue dans $\mathbf{C} \times [0, 1]$ munie d'un champ de vecteurs V possédant les propriétés suivantes :

- le bord de Γ est l'intersection $\Gamma \cap \mathbf{C} \times \{0, 1\}$
- V est transverse à Γ , c'est-à-dire que $V(x)$ est, pour tout $x \in \Gamma$, un vecteur de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ non tangent à la courbe Γ
- pour tout $x \in \partial\Gamma$, $V(x)$ est le vecteur $(i, 0)$.

Deux b-tangles (Γ, V) et (Γ', V') sont isotopes s'il existe un difféomorphisme h de $\mathbf{C} \times [0, 1]$ qui soit l'identité sur $\mathbf{C} \times \{0, 1\}$, qui envoie Γ en Γ' et tel que V' soit isotope à $dh \circ V$, et tel que h soit isotope à l'identité par une isotopie qui est l'identité sur le bord de Γ' et qui est toujours transverse à Γ' .

Un entrelacs en bande est un b-tangle sans bord qui est donc entièrement contenu dans $\mathbf{C} \times]0, 1[$. Ce n'est autre qu'un entrelacs muni d'un champ de vecteurs transverse.

On représentera graphiquement un b-tangle par un diagramme dessiné dans une bande horizontale du plan, le bord supérieur de la bande correspondant à $\mathbf{R} \times \{0\}$

et le bord inférieur à $\mathbf{R} \times \{1\}$ et on munira le tangle correspondant du champ de vecteur $(i, 0)$.

Un b-tangle peut toujours être épaissi normalement au champ de vecteurs en des bandes orientées. Un tel épaississement sera appelé voisinage en bande du b-tangle. En fait la donnée du champ de vecteur est (à déformation près) équivalente à la donnée de la bande. D'où le nom de tangle en bande ou b-tangle. Si un b-tangle est représenté par un diagramme, la bande est un épaississement du diagramme dans le plan du dessin.

Les b-tangles forment une catégorie \mathcal{T} . Les objets de \mathcal{T} sont les parties finies de \mathbf{C} . Un morphisme dans \mathcal{T} d'une partie P vers une partie Q est une classe d'isotopie de b-tangles qui rencontrent $\mathbf{C} \times \{0, 1\}$ en $P \times \{0\}$ et $\mathbf{C} \times \{1\}$ en $Q \times \{1\}$. La composition $T \circ T'$ de deux b-tangles T et T' est la juxtaposition de T et de T' , en mettant T en $\mathbf{C} \times [0, 1/2]$ et T' en $\mathbf{C} \times [1/2, 1]$. On met le premier tangle au-dessus du deuxième.

En munissant une tresse du champ de vecteurs $(i, 0)$, on peut considérer toute tresse comme un b-tangle particulier et la catégorie des tresses \mathcal{B} apparaît comme une sous-catégorie de la catégorie \mathcal{T} .

2.6 Proposition. *Le foncteur Z admet un prolongement à la catégorie \mathcal{T} .*

Le prolongement n'est pas unique, mais sa restriction aux entrelacs en bande l'est. On a donc un invariant d'entrelacs en bande bien défini qui à chaque entrelacs E associe un élément $Z(E)$ de $\mathcal{A}(E)_c^\wedge$.

Cependant ce foncteur a une grave lacune : il est très difficile à calculer et n'a aucune propriété algébrique, mis à part le fait que c'est un foncteur.

La catégorie but de Z est la catégorie des diagrammes \mathcal{D}_c^\wedge . C'est une catégorie monoïdale qui possède une composition, mais aussi un produit tensoriel (l'union disjointe des diagrammes). Par contre, ce n'est nullement le cas de la catégorie des b-tangles \mathcal{T} car il n'y a pas de façon canonique de définir l'union disjointe de deux tangles. Pour remédier à ce problème, on va modifier la catégorie des b-tangles pour en faire une catégorie monoïdale sur laquelle un foncteur monoïdal (comparable à Z) existe.

2.7 La catégorie des q-tangles.

Considérons le monoïde non associatif libre L engendré par un objet \cdot appelé point. Tout élément X de L a un degré : le nombre d'occurrences du point dans X . Tout élément de L de degré > 1 s'écrit, de façon unique, comme le produit de deux éléments de L . De plus L possède une unique antiinvolution $u \mapsto u^*$ qui envoie le point en lui-même. Les éléments de L seront appelés des q-objets.

Un q-objet est simplement un ensemble fini muni d'un parenthésage. Par exemple, il y a 5 q-objets de degré 4 :

$$u = (..)(..) \quad v = .(.(..)) \quad v^* = ((..).) \quad w = (.(..)). \quad w^* = .(((..).))$$

À tout q-objet X on peut associer la partie \widehat{X} de \mathbf{C} formée des entiers $1, 2, \dots, n$

correspondant aux n points de X . On définit alors la catégorie des q-tangles \mathcal{T}' dont les objets sont les q-objets et les morphismes entre deux q-objets X et Y sont les morphismes dans la catégorie \mathcal{T} de \widehat{X} vers \widehat{Y} . En quelque sorte, la catégorie des q-tangles a les mêmes morphismes que la catégorie des b-tangles, mais ses objets sont les objets $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbf{C}$ de \mathcal{T} munis de parenthésages.

Cette catégorie est une catégorie monoïdale. Le produit tensoriel de deux q-objets est le produit de ces objets, c'est-à-dire leur concaténation, et le produit tensoriel de deux morphismes, c'est-à-dire de deux b-tangles est leur juxtaposition, le premier tangle étant mis entièrement à gauche du deuxième. Mais il y a une autre opération algébrique : le dédoublement.

Soit T un q-tangle, c'est-à-dire un morphisme dans \mathcal{T}' d'un q-objet X vers un objet Y et Γ une composante connexe de T . Soient enfin $n \geq 0$ un entier et u un q-objet de degré n . Supposons tout d'abord que la composante Γ ne rencontre pas le bord de T . On peut remplacer Γ par n copies parallèles de Γ situées dans une bande voisinage de Γ transverse au champ de vecteurs. On obtient ainsi un nouveau q-tangle T' .

Si Γ joint un point de $\mathbf{C} \times \{0\}$ à un point de $\mathbf{C} \times \{1\}$ on peut procéder ainsi : les deux points du bord de Γ correspondent à un point x de X et y de Y . On peut alors remplacer x et y par u et obtenir des q-objets X' et Y' . On remplace ensuite Γ par n copies parallèles de Γ et l'on obtient ainsi un nouveau q-tangle T' .

Si Γ joint deux points de $\mathbf{C} \times \{0\}$ (ou de $\mathbf{C} \times \{1\}$), on peut faire de même, en remplaçant toutefois les deux points dans X (ou de Y), l'un par u et l'autre par u^* . Le q-tangle ainsi construit est appelé un dédoublement de T . Il dépend de la composante Γ , du nombre n et d'un q-objet de degré n .

La catégorie \mathcal{T}' est engendrée, en tant que catégorie monoïdale, par un objet (le point) et les morphismes suivants :

$$X^+ = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad X^- = \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \quad u = \cup \quad v = \cap \quad W = \parallel \! / \! /$$

le dernier morphisme étant le morphisme d'un objet $w_1(w_2w_3)$ vers $(w_1w_2)w_3$ représenté par un tangle trivial. De façon plus précise, on a une présentation par générateurs et relations de la catégorie monoïdale \mathcal{T}' , ce qui permet de construire des foncteurs de \mathcal{T}' dans une catégorie monoïdale. En particulier, on obtient le résultat suivant de Drinfeld :

2.8 Théorème. *Il existe un foncteur Z' de catégories monoïdales de la catégorie \mathcal{T}' dans la catégorie des diagrammes $\widehat{\mathcal{D}}_c$ tel que :*

— pour tout q-tangle T de courbe sous-jacente Γ , $Z(T)$ est de la forme (Γ, u) , u étant un élément de $\mathcal{A}_c(\widehat{\Gamma})$ de terme constant 1 et de type groupe (c.à.d. : $\Delta(u) = u \otimes u$)

— si T' est un dédoublement d'un q-tangle T , si Γ' et Γ sont leurs courbes sous-jacentes et si $Z(T)$ est de la forme (Γ, u) , on a : $Z(T') = (\Gamma', f^*(Z(u)))$, f étant la projection canonique de Γ' sur Γ .

— si U_{\pm} est un demi-twist positif ou négatif, on a : $Z(U_{\pm}) = \exp(\pm h/2)\sigma$, σ étant

la transposition de \mathcal{S}_2 et h l'élément suivant de \mathcal{P}_2 :

$$h = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}$$

Le foncteur Z' n'est pas unique, mais il prend les mêmes valeurs que le foncteur Z sur les entrelacs en bande qui ne sont autres que les endomorphismes du vide dans les deux catégories \mathcal{T} et \mathcal{T}' .

Il est caractérisé par les trois éléments :

$$\alpha = Z'(u) \quad \beta = Z'(v) \quad \Phi = Z'(w)$$

où w est l'associateur de $(..)$ dans $(..)$: c'est l'isomorphisme représenté par le b-tangle trivial.

$$u = \cup \quad v = \cap \quad w = \left| \begin{array}{l} / \\ | \end{array} \right|$$

L'élément Φ , également appelé associateur, appartient à l'algèbre \mathcal{P}_3 . Quant aux éléments α et β , on peut les considérer dans l'algèbre $\mathcal{P}_1 = \widehat{\mathcal{A}}$, via les applications de u et v dans $[0, 1]$ qui envoient bord gauche en 0 et bord droit en 1.

L'associateur Φ n'est absolument pas quelconque. Il doit vérifier plusieurs propriétés. On ne connaît actuellement qu'un seul associateur explicitement. On l'obtient à l'aide d'une limite de l'intégrale de Kontsevich, en faisant tendre les points source et les points but vers des configurations limites correspondant aux parenthésages donnés. De plus, cet associateur correspond à un foncteur qui ne vérifie pas toutes les propriétés du théorème : la condition de dédoublement ne marche en effet que pour les tresses. Ceci dit, il est montré dans [LM] que tous les associateurs sont conjugués par une transformation de type jauge, et qu'il existe un associateur à coefficients rationnels qui correspond à un foncteur Z' vérifiant toutes les hypothèses du théorème. On peut même supposer que Φ est symétrique, c'est-à-dire qu'il est invariant par la transformation $(t, i) \mapsto (1 - t, 3 - i) \in [0, 1] \times \{1, 2, 3\}$, et qu'il n'a de plus que des termes de degrés pairs.

Les éléments α et β par contre peuvent être choisis comme des éléments quelconques de type groupe, avec comme seules restrictions :

— α et β sont symétriques (ils sont invariants par la transformation $t \mapsto 1 - t$ de $[0, 1]$)

— $\alpha\beta(1 \otimes v)\Phi(u \otimes 1) = 1$, l'élément $(1 \otimes v)\Phi(u \otimes 1) \in \mathcal{A}_c((1 \otimes v)w(u \otimes 1))^\wedge$ étant considéré comme appartenant à $\mathcal{A}_c([0, 1])^\wedge = \widehat{\mathcal{A}}$.

Cette dernière formule est due à l'égalité suivante dans la catégorie des q-tangles : $1 = (1 \otimes v)w(u \otimes 1)$.

$$\left| \begin{array}{l} | \\ \text{---} \\ | \end{array} \right| = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}$$

Cependant, si chaque composante connexe non fermée d'un q-tangle joint un point source à un point but, l'image de ce tangle ne dépend que de Φ et du produit $\alpha\beta$ et,

par conséquent, que de Φ . En pratique on choisit : $\alpha = \beta$ et l'on note ν l'élément $\nu = \alpha\beta = ((1 \otimes u)\Phi(v \otimes 1))^{-1}$. On a donc dans ce cas :

$$\alpha = \beta = \nu^{1/2}$$

L'élément ν n'est autre que l'image par Z (ou Z') du nœud trivial.

3. Mouvements de Kirby

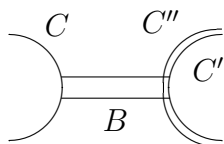
Si E est un entrelacs en bande, on peut le considérer dans la sphère S^3 et faire la chirurgie de S^3 le long de E . Cette opération consiste à enlever pour chaque composante C de E un voisinage tubulaire de C et à recoller un exemplaire de $S^1 \times B^2$, en prenant soin que l'ancien parallèle de la composante devienne un méridien et le méridien un parallèle. La variété M_E ainsi obtenue est une variété connexe orientée compacte de dimension 3.

On sait que toute variété connexe orientée compacte de dimension 3 peut être obtenue de cette façon et que deux entrelacs en bande E et E' donnent des variétés difféomorphes (par un difféomorphisme direct) si et seulement si on peut passer de E à E' par une suite d'opérations élémentaires appelées mouvements de Kirby ([L], [Ki]).

Le premier mouvement de Kirby consiste à rajouter à l'entrelacs un cercle trivial d'auto-enlacement ± 1 . Le second correspond à un glissement d'anse : si C et C' sont deux composantes de E , on peut remplacer C par une somme connexe de C avec C' et l'on obtient ainsi un nouvel entrelacs en bande E' .

Ainsi, pour obtenir un invariant de variétés de dimension 3, il suffit de choisir un invariant d'entrelacs en bande I qui soit de plus invariant par les deux mouvements de Kirby.

Le deuxième mouvement de Kirby (ou mouvement de type II) n'est pas très bien défini. Pour l'expliquer mieux, on choisit un intervalle C_0 de C et un intervalle C'_0 de C' , puis une bande B dans S^3 joignant C_0 à C'_0 , mais disjointe du reste de l'entrelacs. On supposera que cette bande est, au voisinage de C_0 et C'_0 , contenue dans les voisinages en bande de C et C' . On dédouble C' en rajoutant une copie parallèle C'' située dans le voisinage en bande de C' et rencontrant la bande B en un intervalle C''_0 . En enlevant la partie de la bande B située entre C' et C'' , on obtient une bande B' un peu plus petite que B . La somme connexe est alors l'union $C \cup C'' \cup \partial B'$ privée de l'intérieur de C_0 et C''_0 . On l'appellera la somme connexe de C et C' le long de la bande B .



Considérons l'invariant Z . Cet invariant peut se calculer avec l'intégrale de Kontsevich, mais également avec un foncteur de Drinfeld Z' construit en 2.8. Cet invariant

d'entrelacs en bande ne donne pas d'invariant de variétés de dimension 3 car il est en général modifié par un mouvement de Kirby de type II.

On considère alors un nouvel invariant d'entrelacs en bande \check{Z} qui se comporte mieux par rapport au second mouvement de Kirby. Soit E un entrelacs en bande. On peut multiplier $Z(E)$ par ν le long de chaque composante de E . On obtient ainsi un élément $\check{Z}(E)$ appartenant à $\mathcal{A}_c(E)\widehat{}$.

3.1 Proposition. *Soit E un entrelacs en bande et C et C' deux composantes connexes de E . Soit B une bande rencontrant E en un intervalle de C et un intervalle C' . Soit E' l'entrelacs obtenu en remplaçant dans E la composante C par la somme connexe de C et C' le long de B .*

Soit Γ (resp. Γ') la courbe obtenue en enlevant à E (resp. E') l'intérieur de $E \cap B$ (resp. $E' \cap B$). Soit f la projection canonique de Γ' sur Γ . Cette application est un revêtement à deux feuillets au-dessus de C' et un isomorphisme ailleurs.

On suppose que $\check{Z}(E)$ provient d'un élément ω de $\mathcal{A}_c(\Gamma)\widehat{}$. Alors $\check{Z}(E')$ est représenté par l'élément $f^(\omega) \in \mathcal{A}_c(\Gamma')\widehat{}$.*

Cela signifie, en quelque sorte, que $\check{Z}(E')$ est obtenu par dédoublement de $\check{Z}(E)$.

Esquisse de démonstration. Soit Z' un foncteur de Drinfeld. On montre tout d'abord la formule :

$$Z' \left(\begin{array}{c} \cup \\ | \end{array} \right) = \begin{array}{c} \parallel \\ \cup \\ \alpha^{-1} \\ | \end{array}$$

α étant la racine carrée de ν et f^* le dédoublement induit par le revêtement f . On en déduit que si $Z'(E)$ est, près de C_0 et C' , de la forme :

$$\left| \begin{array}{c} \cup \\ u \end{array} \right.$$

où u est une combinaison linéaire de diagrammes joignant la composante C' et le complémentaire de $C_0 \cup C'$. On en déduit que $Z'(E')$ a, près de la bande de connexion et de C' , la forme suivante :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \cup \\ \nu^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \cup \\ f^*(\alpha) \end{array} \\ \begin{array}{c} \cup \\ f^*(\alpha) \end{array} \quad \begin{array}{c} \cup \\ f^*(u) \end{array} \end{array}$$

Mais $f^*(\alpha)f^*(u)f^*(\alpha)$ est égal à $f^*(\nu u)$. On en déduit immédiatement le résultat. \square

3.2 L'invariant i_n .

Soit X un ensemble. Considérons le module $\mathcal{B}(X)$ défini par la présentation suivante :

- les générateurs sont les classes d'isomorphisme de graphes uni-trivalents K munis d'un ordre cyclique en chaque sommet trivalent et d'une fonction de l'ensemble des sommets univalents de K dans X

- les relations sont les relations AS et IHX

L'élément de X associée à un sommet du graphe est appelée sa couleur. Un tel graphe est donc appelé un diagramme X -colorié.

Soit $n \geq 0$ un entier et $[n]$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Soit Γ une courbe orientée formée de n composantes, chacune isomorphe à un intervalle. Soit K un diagramme $[n]$ -colorié. Pour chaque $i \in [n]$, on peut attacher les sommets de K de couleurs i sur la i -ième composante de Γ et mettre des ordres cycliques compatibles avec l'orientation de Γ . On obtient ainsi un Γ -diagramme. Mais cette construction dépend de la donnée pour chaque i d'un ordre total sur l'ensemble des sommets de K de couleur i . En prenant la moyenne de tous ces diagrammes, on obtient un élément $\varphi(K) \in \mathcal{A}(\Gamma)$. Avec une démonstration relativement semblable à la démonstration du théorème de Poincaré-Birkoff-Witt, on montre le résultat suivant :

3.3 Proposition [BN][LMO]. *Soit Γ une courbe orientée sans composante fermée, ayant n composantes numérotées. Alors l'application $\varphi : \mathcal{B}([n]) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma)$ est un isomorphisme.*

Lorsque Γ a des composantes sans bord, la situation est différente. On peut toujours définir l'application $\varphi : \mathcal{B}([n]) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma)$, mais elle n'est plus injective.

Soient n un entier et $[n]^*$ l'ensemble $[n] \amalg \{*\}$. Soit $\mathcal{B}_0([n])$ le sous-module de $\mathcal{B}([n]^*)$ engendré par les graphes $[n]^*$ -coloriés n'ayant qu'un sommet de couleur $*$. Soit i un entier de $[n]$. On peut définir une application f_i de $\mathcal{B}_0([n])$ dans $\mathcal{B}([n])$ de la façon suivante :

Si K est un diagramme $[n]^*$ -colorié n'ayant qu'un sommet x de couleur $*$, on peut identifier x avec un point y de K situé près d'un sommet z de K de couleur i et mettre l'ordre cyclique en ce nouveau sommet en considérant d'abord l'arête de sommet x puis l'arête ne passant pas par z et enfin l'arête yz . En faisant la somme de tous ces graphes on obtient un élément $f_i(K) \in \mathcal{B}([n])$. Soit Γ une courbe orientée avec n composantes Γ_i , $i = 1, \dots, n$. On définit alors le module $\mathcal{B}(\Gamma)$ comme le module $\mathcal{B}([n])$ quotienté par les images des applications f_i pour chaque indice i tel que Γ_i soit une courbe fermée. On vérifie facilement le résultat suivant :

3.4 Proposition. *Soit Γ une courbe orientée. Alors l'application φ induit un isomorphisme de $\mathcal{B}(\Gamma)$ sur $\mathcal{A}(\Gamma)$.*

Remarque. On peut aussi définir des modules $\mathcal{B}_c(\Gamma)$, des modules $\widehat{\mathcal{B}(\Gamma)}$ et des modules $\widehat{\mathcal{B}_c(\Gamma)}$ et la proposition 3.4 se généralise immédiatement à ces nouvelles situations.

Remarques. Si X est un ensemble, l'union disjointe des diagrammes induit sur $\mathcal{B}(X)$ une structure d'algèbre. Il y a de plus sur $\mathcal{B}(X)$ une structure de coalgèbre telle

que les diagrammes X -coloriés soient primitifs. En fait $\mathcal{B}(X)$ est une algèbre de Hopf graduée. Si Γ est une courbe avec au moins un composante fermée, le module $\mathcal{B}(\Gamma)$ n'est pas une algèbre, c'est seulement une coalgèbre.

La situation est similaire pour les modules $\mathcal{A}(\Gamma)$. Ceux-ci sont des coalgèbres, mais ils n'ont pas toujours de structure d'algèbre. C'est le cas par exemple si Γ possède une composante fermée.

Cependant, même si $\mathcal{B}(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\Gamma)$ sont tous les deux des algèbres φ n'est pas nécessairement un morphisme d'algèbre. Ce n'est en particulier pas un morphisme d'algèbre dans le cas de l'intervalle. Mais φ est toujours un morphisme de coalgèbre.

Soit f une application d'une courbe Γ vers une courbe Γ' envoyant bord en bord. Cette application induit une application f^* de $\mathcal{A}(\Gamma')$ dans $\mathcal{A}(\Gamma)$. Elle induit aussi une application f^* de $\mathcal{B}(\Gamma')$ dans $\mathcal{B}(\Gamma)$. Cette application envoie un diagramme K en la somme de tous les diagramme obtenus en relevant les couleurs de K . On vérifie que φ est compatible avec f^* . On a donc aussi une opération de dédoublement pour le foncteur \mathcal{B} .

Soit $n \geq 0$ un entier. Soit $\mathcal{A}(n)$ le quotient de l'algèbre $\mathcal{A}(\emptyset)^\wedge$ par l'idéal engendré par $c + 2n$, c représentant le graphe réduit à un cercle. Cette algèbre est isomorphe à la sous-algèbre $\mathcal{A}'(\emptyset)$ de $\mathcal{A}(\emptyset)^\wedge$ formée des diagrammes ne contenant aucun cercle isolé.

Soit Γ une courbe sans bord. Soit u un élément de $\mathcal{B}(\Gamma)$ représenté par un graphe $\pi_0(\Gamma)$ -colorié K . S'il existe un indice i pour lequel K a un nombre de sommet de couleur i différent de $2n$, on pose $\kappa_n(K) = 0$. Sinon on désigne par $\kappa_n(K)$ la somme de tous les diagrammes obtenus en connectant deux sommets univalents de même couleur. On vérifie que κ_n induit une application de $\mathcal{B}(\Gamma)$ dans le module $\mathcal{A}(\emptyset)$. En composant cette application par φ^{-1} d'un côté et par l'application quotient vers $\mathcal{A}(n)$ de l'autre, on obtient une application i_n de $\mathcal{A}_c(\Gamma)^\wedge$ dans $\mathcal{A}(n) \simeq \mathcal{A}'(\emptyset)$.

3.5 Théorème [LMO]. *Soit E un entrelacs en bande et E' l'entrelacs obtenu par un mouvement de Kirby de type II, alors les deux éléments $i_n(\check{Z}(E))$ et $i_n(\check{Z}(E'))$ coïncident en degré $\leq n$.*

La démonstration de ce thorème occupera l'essentiel de la partie 4.

3.6 Corollaire. *Soit E un entrelacs en bande et M la matrice d'enlacement de E . Soit σ_+ (resp. σ_-) le nombre de valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) de M . Soient U_+ et U_- les deux noeuds triviaux d'auto-enlacement 1 et -1 . Alors l'élément $\Omega_n(E)$, tronqué à l'ordre n de*

$$\frac{i_n(\check{Z}(E))}{i_n(\check{Z}(U_+))^{\sigma_+} i_n(\check{Z}(U_-))^{\sigma_-}}$$

est un invariant de la variété chirurgisée M_E noté $\Omega_n(M_E)$.

Démonstration. Déterminons tout d'abord le terme constant de $i_n(\check{Z}(U_\pm))$. L'entre-

lacs en bande U_+ est représenté par le composé des trois q-tangles suivants :

$$\cap \quad \times \quad \cup$$

On en déduit que $\check{Z}(U_+)$ est représenté par l'élément $\nu^2 \exp(\omega/2)$ de $\mathcal{A}_c([0, 1])^\wedge \simeq \mathcal{A}_c(S^1)^\wedge$, ω étant l'élément de $\mathcal{A}_c([0, 1])$ représenté par $[0, 1]$ auquel on a rajouté une arête.

$$\omega = \text{---}\overset{\cap}{\text{---}}$$

On procède de même pour U_- et l'on voit que $\check{Z}(U_\pm)$ est représenté par $\nu^2 \exp(\pm\omega/2)$.

D'autre part, l'associateur Φ est un élément pair de type groupe de \mathcal{P}_3 . C'est donc l'exponentielle d'un élément primitif pair u de \mathcal{P}_3 . Cet élément vérifie $\Delta u = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ et est représenté par une série $u = \sum u_n$ où chaque u_n est représenté par un $[0, 1] \times \{1, 2, 3\}$ -diagramme K_n de degré pair tel que la partie extérieure de K_n soit connexe non vide. On en déduit que Φ est représenté par une série de diagrammes K'_n ayant chacun au moins un sommet trivalent extérieur à la courbe $[0, 1] \times \{1, 2, 3\}$. Par définition de ν , on en déduit que ν est aussi représenté par une série de $[0, 1]$ -diagrammes K''_n ayant chacun au moins un sommet trivalent extérieur à $[0, 1]$.

Considérons maintenant l'idéal I de $\mathcal{A}_c([0, 1])^\wedge$ engendré par les diagrammes K ayant au moins un sommet extérieur à $[0, 1]$. On peut faire de même avec des graphes $[1]$ -coloriés et on obtient un idéal J de l'algèbre $\mathcal{B}_c([1])^\wedge$. L'isomorphisme φ de $\mathcal{B}_c([1])^\wedge$ sur $\mathcal{A}_c([0, 1])^\wedge$ passe au quotient et donne un isomorphisme φ' de $\mathcal{B}_c([1])^\wedge / J$ sur $\mathcal{A}_c([0, 1])^\wedge / I$. On vérifie alors la formule :

$$\varphi'^{-1}(\nu^2 \exp(\pm\omega/2)) = \varphi'^{-1}(\exp(\pm\omega/2)) = \exp(\pm\varphi'^{-1}(\omega)/2) = \exp(\pm\omega'/2)$$

où ω' est le graphe $[1]$ -colorié représenté par un intervalle. Notons g le terme de degré 0 de $i_n \circ \check{Z}$. Comme g est nul sur I , on a :

$$g(U_\pm) = g(\exp(\pm\omega/2)) = \frac{(\pm 1/2)^n}{n!} \kappa(\omega'^n)$$

où κ est l'opération fermeture : la somme de toutes les façons d'identifier les sommets univalents deux à deux.

Notons c le cercle dans $\mathcal{A}_c(\emptyset)^\wedge$. On a pour tout p :

$$\kappa(\omega'^p) = c\kappa(\omega'^{p-1}) + 2(p-1)\kappa(\omega'^{p-1})$$

ce qui donne :

$$\kappa(\omega'^p) = (c + 2p - 2)(c + 2p - 4) \cdots (c + 2)c$$

On a donc, modulo $c + 2n$:

$$\kappa(\omega'^n) \equiv (-2)(-4) \cdots (-2n) \equiv (-2)^n n!$$

et cela donne en définitive :

$$g(U_\pm) = (\mp 1)^n$$

et le terme de degré 0 de $i_n(\tilde{Z}(U_\pm))$ est égal à 1 ou à -1 .

Ainsi l'élément $\Omega_n(E)$ est bien défini et ne dépend que du tronqué à l'ordre n de $i_n(\tilde{Z}(E))$. Le théorème précédent montre que $\Omega_n(E)$ est inchangé par un mouvement de Kirby de type II et grâce à la présence du dénominateur, il est aussi inchangé par un mouvement de Kirby de type I. C'est donc un invariant de la variété M_E . \square

3.7 Théorème [LMO]. *Il existe un unique invariant Z^{LMO} qui associe à toute variété M orientée compacte connexe sans bord de dimension 3 un élément $Z^{LMO}(M)$ de $\mathcal{A}'(\emptyset)$ et qui possède les propriétés suivantes :*

— $Z^{LMO}(M)$ est un élément de type groupe de $\mathcal{A}'(\emptyset)$, c'est donc l'exponentielle d'un élément primitif de $\mathcal{A}'(\emptyset)$ représenté par une combinaison linéaire de diagrammes trivalents connexes ayant au moins un sommet

— pour toute variété M , et tout entier $n \geq 0$ on a :

$$\Omega_n(M) = \sum_{i \leq n} d(M)^{n-i} Z^{LMO}(M)_i$$

$Z^{LMO}(M)_i$ désignant la composante de degré i de $Z^{LMO}(M)$ et $d(M)$ l'ordre du premier groupe d'homologie entière de M s'il est fini et 0 sinon.

L'invariant LMO Z^{LMO} est maintenant construit. La démonstration de ce dernier résultat sera donnée ultérieurement.

4. Les relations P_n .

On a construit plus haut une application κ_n qui va, en particulier, de $\mathcal{B}([1])^\wedge$ dans $\mathcal{A}(\emptyset)^\wedge$. Cette application est nulle sur un diagramme dont le nombre de sommets univalents est différent de $2n$. Si un diagramme K a exactement $2n$ sommets univalents, $\kappa_n(K)$ est la somme de tous les diagrammes obtenus en connectant deux à deux les sommets univalents de K .

On peut généraliser cette construction à la situation suivante :

Soit X un ensemble fini. On pose $Y = X \amalg \{*\}$. On a alors une application κ_n de $\mathcal{B}(Y)^\wedge$ dans $\mathcal{B}(X)$ consistant à effectuer l'opération précédente, mais uniquement pour les sommets de couleur $*$. Si K est un diagramme Y -colorié, $\kappa_n(K)$ est nul si le nombre de sommets de K de couleur $*$ est différent de $2n$. Sinon $\kappa_n(K)$ est la somme de tous les diagrammes obtenus en connectant deux à deux les sommets univalents de couleur $*$ de K .

Cette application est à valeurs dans $\mathcal{B}(X)^\wedge$. On appelle P_n son image. On appellera également P_n la relation modulo le sous-module P_n . On vérifie que l'application κ_n passe au quotient et on a aussi un sous-module P_n de $\mathcal{B}(\Gamma)^\wedge$ pour toute courbe Γ .

4.1 Proposition. *Soit Γ une courbe fermée. Soit $n \geq 0$ un entier. Alors tout élément de $\mathcal{B}(\Gamma)^\wedge$ est, modulo P_{n+1} , représenté par une combinaison linéaire de diagrammes ayant pour chaque composante Γ_i de Γ au plus $2n$ sommets de couleur i .*

Démonstration. On suppose que Γ a p composantes Γ_i . Les couleurs sont donc les entiers de $[p] = \{1, \dots, p\}$. Soit i une couleur. Soit X un élément de $\mathcal{B}(\Gamma)^\wedge$

représenté par une combinaison linéaire de diagrammes K ayant chacun au moins $2n + 1$ sommets de couleurs i .

Notons v le diagramme formé d'un intervalle avec les deux sommets de couleur i . Supposons que X soit de la forme $v^k Y$, pour un certain entier $k \leq n$. Ceci est vrai pour $k = 0$. Pour simplifier l'exposition, on va supposer que Y est représenté par un diagramme (toujours noté Y). Ce diagramme Y a au moins $2n + 1 - 2k$ sommets de couleur i . Soit u le diagramme formé d'un intervalle avec un sommet de couleur i et l'autre de couleur $*$. Choisissons $n + 1 - k$ sommets de Y de couleurs i et colorions-les par la couleur $*$. Ceci est possible car $n + 1 - k \leq 2n + 1 - 2k$. On obtient ainsi un diagramme Z . On a :

$$\kappa_{n+1}(u^{n+k+1}Z) = \frac{(n+1+k)!}{(2k)!} (2k-1)(2k-3)\cdots 3.1v^k Y + v^{k+1}Y'$$

Y' ayant au moins $2n + 1 - 2k - 2$ sommets de couleur i avec, de plus, $Y' = 0$ si $k = n$. On peut ainsi, modulo P_{n+1} , remplacer $v^k Y$ par un élément divisible par v^{k+1} . On obtient alors, de proche en proche :

$$X = v^0 X \equiv v^1 X_1 \equiv v^2 X_2 \equiv \cdots v^n X_n \equiv 0$$

Ainsi tout diagramme ayant au moins $2n + 1$ sommets d'une même couleur est équivalent à 0 modulo P_{n+1} , ce qui termine la démonstration. \square

La relation P_n peut aussi se définir sur les modules $\mathcal{A}(\Gamma)$ et elle est compatible avec l'isomorphisme φ . On en déduit :

4.2 Proposition. *Soit Γ une courbe fermée. Soit $n \geq 0$ un entier. Alors tout élément de $\mathcal{A}(\Gamma)$ est, modulo P_{n+1} , représenté par une combinaison linéaire de diagrammes ayant au plus $2n$ sommets situés sur chaque composante de Γ .*

Soit $n \geq 0$ un entier. On note j_n l'application quotient de $\mathcal{A}(n) = \mathcal{A}(\emptyset) / (c + 2n)$ dans $\mathcal{A}(\emptyset) / (c + 2n, P_{n+1})$, c désignant le diagramme représenté par un cercle.

4.3 Proposition. *L'application qui à un entrelacs en bande E associe l'élément $j_n \circ i_n \circ \check{Z}(E)$ est invariant par mouvement de Kirby de type II.*

Démonstration. On suppose que le mouvement de Kirby consiste à remplacer une composante C par sa somme connexe C''' avec une composante C' le long d'une bande B . D'après la proposition précédente, l'élément $\check{Z}(E)$ est représenté, modulo P_{n+1} , par une combinaison linéaire de diagrammes ayant au plus $2n$ sommets situés sur chaque composante de E . Mais si un de ces diagramme a strictement moins que $2n$ sommets sur une composante de E , le diagramme correspondant par φ^{-1} a strictement moins que $2n$ sommets d'une couleur donnée et son image par i_n est nulle. On peut donc supposer que tous ces diagrammes ont chacun exactement $2n$ sommets situés sur chaque composante de E et, quitte à déplacer les sommets situés sur E , on peut aussi supposer que ces sommets ne sont jamais situés sur $E \cap B$.

Considérons un de ces diagramme K . Soit C'_1 la partie de C' extérieure à B . Le dédoublement $f^*(K)$ est une somme de diagrammes H_p , H_p ayant p sommets

situés sur C'_1 et $2n - p$ sommets situés sur la copie C''_1 parallèle à C'_1 . Si p est strictement inférieur à $2n$, $\kappa_n(H_p)$ est nul car il y a strictement moins que $2n$ sommets sur C' . Il reste à considérer le cas $p = 2n$. Mais le diagramme H_{2n} n'est autre que le diagramme K . On en déduit que K et $f^*(K)$ ont, modulo P_{n+1} , même image par $\kappa_n \circ \varphi^{-1}$. Comme ceci a lieu pour chacun de ces diagrammes, les deux entrelacs E et E' ont même image par $j_n \circ i_n \circ \check{Z}$ ce qui montre la proposition. \square

Pour montrer le théorème 3.5, il reste à montrer le résultat suivant :

4.4 Proposition. *L'application j_n est un isomorphisme en degré $\leq n$.*

Démonstration. Le sous-module P_{n+1} de $\mathcal{A}(\emptyset)^\wedge / (c+2n)$ est l'image de l'application $\kappa_{n+1} : \mathcal{B}([1])^\wedge \rightarrow \mathcal{A}(\emptyset)^\wedge / (c+2n)$. Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que si K est un diagramme [1]-colorié ayant une image par κ_{n+1} de degré $\leq n$, cette image est nulle modulo $(c+2n)$.

Soit K un tel diagramme. Par hypothèse il a au plus $2n$ sommets trivalents. On peut supposer qu'il a exactement $2(n+1)$ sommets univalents car sinon son image par κ_{n+1} est nulle. Supposons qu'il existe deux sommets univalents de K qui sont joints par une arête. Alors K est le produit par u d'un diagramme K' , u étant un diagramme formé par un intervalle. On a alors :

$$\kappa_{n+1}(K) = \kappa_{n+1}(uK') = (c+2n)\kappa_n(K')$$

et $\kappa_{n+1}(K)$ est nul modulo $c+2n$.

Supposons maintenant qu'il existe deux sommets univalents de K joints par un chemin ne contenant qu'un seul sommet trivalent de K . Alors, par antisymétrie, l'élément K est nul dans $\mathcal{B}([1])$ ainsi que son image par κ_{n+1} .

Ainsi, si $\kappa_{n+1}(K)$ est non nul, aucune composante connexe de K n'est un arbre et les caractéristiques d'Euler de ces composantes sont négatives ou nulles. On en déduit que la caractéristique d'Euler χ de K est aussi négative ou nulle.

Soient p le nombre de sommets univalents de K , q le nombre de ses sommets trivalents et a le nombre de ses arêtes. En comptant le nombre d'arêtes orientées de K des deux façons possibles, on trouve la formule : $2a = p + 3q$, ce qui implique :

$$\chi = p + q - a = \frac{p - q}{2}$$

et q est supérieur ou égal à p .

Mais on a : $p = 2(n+1)$ et $q \leq 2n < p$, ce qui est contradictoire. Ceci achève la démonstration de la proposition ainsi que du théorème 3.5. \square

4.5 Proposition. *Soit E un entrelacs en bande et $n \geq 0$ un entier. Soit $\delta(E)$ le déterminant de la matrice d'enlacement de E et p le nombre de composantes de E . Alors on a l'égalité suivante dans $\mathcal{A}'(\emptyset)^\wedge$:*

$$i_{n+1}(\check{Z}(E)) = (-1)^p \delta(E) i_n(\check{Z}(E))$$

Démonstration. Pour définir la matrice d'enlacement de E , il faut numéroter et orienter les composantes de E . On notera Γ_i la i -ième composante de E . Pour tous i et j on notera a_{ij} l'enlacement de Γ_i avec Γ_j . Les nombres a_{ij} sont les coefficients de la matrice d'enlacement. Notons h_{ij} le E -diagramme obtenu en ajoutant à E une arête joignant Γ_i et Γ_j et en munissant ce diagramme des ordres cycliques correspondant à l'orientation de E . On vérifie alors la formule :

$$Z(E) = 1 + \sum_{ij} \frac{a_{ij}}{2} h_{ij} + U$$

U étant une somme de termes de degrés > 1 . Comme ν n'a pas de terme de degré 1, on a :

$$\check{Z}(E) = 1 + \sum_{ij} \frac{a_{ij}}{2} h_{ij} + U'$$

où U' est une somme de termes de degrés > 1 .

Considérons l'isomorphisme $\varphi : \mathcal{B}_c(E)^\wedge \rightarrow \mathcal{A}_c(E)^\wedge$. On a :

$$\varphi^{-1}(\check{Z}(E)) = 1 + \sum_{ij} \frac{a_{ij}}{2} u_{ij} + V$$

u_{ij} étant le diagramme formé par une arête dont les sommets sont de couleurs i et j , et V est une somme de termes de degrés > 1 . Mais $\varphi^{-1}(\check{Z}(E))$ est un élément de type groupe appartenant au module $\mathcal{B}_c(E)^\wedge$. Malheureusement ce module n'est pas une algèbre. Cependant on peut prendre un intervalle dans chaque composante de E de façon à avoir une courbe E' contenue dans E et relever $Z(E)$ en un élément de type groupe de $\mathcal{A}_c(E')^\wedge$. En appliquant φ^{-1} à cet élément, on voit que l'on a pu relever $\varphi^{-1}(\check{Z}(E))$ en un élément de type groupe de $\mathcal{B}_c(E')^\wedge = \mathcal{B}_c([p])^\wedge$ qui est une algèbre de Hopf. Pour simplifier on notera toujours $\varphi^{-1}(\check{Z}(E))$ cet élément. Maintenant cet élément est l'exponentielle d'un élément primitif X de $\mathcal{B}_c([p])$:

$$X = \sum_{ij} \frac{a_{ij}}{2} u_{ij} + X'$$

où X' est une somme de diagrammes connexes ayant au moins un sommet trivalent.

On en déduit :

$$\varphi^{-1}(\check{Z}(E)) = \exp\left(\sum_{i,j} \frac{a_{ij}}{2} u_{ij}\right) \sum_{k_1, \dots, k_p} Y_{k_1 \dots k_p}$$

$Y_{k_1 \dots k_p}$ étant un diagramme avec au moins un sommet trivalent et, pour chaque $i \leq p$, k_i sommets univalents de couleur i .

Soient k_1, k_2, \dots, k_p des entiers. On a une application $\kappa_{k_1 \dots k_p}$ de $B([p])^\wedge$ dans $\mathcal{A}(\emptyset)^\wedge / (c + 2n)$ qui est nulle en un diagramme pour lequel il existe une couleur i avec un nombre de sommets de cette couleur différent de $2k_i$ et qui envoie sinon un diagramme K en la somme de tous les diagrammes obtenus en connectant deux à deux les sommets de même couleur. L'application i_n n'est autre que $\kappa_{nn \dots n} \varphi^{-1}$.

Pour simplifier la démonstration on va se placer dans le cas où la matrice d'enlacement est diagonale. Voir [LMO] pour une démonstration complète. Les nombres a_{ij} sont donc nuls pour $i \neq j$. Soit :

$$\varphi^{-1}(\check{Z}(E)) = \exp\left(\sum_i \frac{a_{ii}}{2} u_{ii}\right) \sum_{k_1 \dots k_p} Y_{k_1 \dots k_p}$$

On a :

$$\kappa_{nn \dots n}(\exp\left(\sum_i \frac{a_{ii}}{2} u_{ii}\right) Y_{k_1 \dots k_p}) = \sum_{n_1 \dots n_p} \frac{\prod (a_{ii}/2)^{n_i}}{(\sum n_i)!} \kappa_{nn \dots n}(\prod u_{ii}^{n_i} Y_{k_1 \dots k_p})$$

Cet élément est nul si les indices k_i ne sont pas tous pairs. On suppose donc que l'on a pour tout i : $k_i = 2q_i$. Mais alors la somme se réduit à un seul terme correspondant à $n_i = n - q_i$:

$$\kappa_{nn \dots n}(\exp\left(\sum_i \frac{a_{ii}}{2} u_{ii}\right) Y_{k_1 \dots k_p}) = \frac{\prod (a_{ii}/2)^{n-q_i}}{(\sum n - q_i)!} \kappa_{nn \dots n}(\prod u_{ii}^{n-q_i} Y_{k_1 \dots k_p})$$

ce qui donne :

$$\kappa_{nn \dots n}(\exp\left(\sum_i \frac{a_{ii}}{2} u_{ii}\right) Y_{k_1 \dots k_p}) = \left(\prod (-a_{ii})^{n-q_i}\right) \kappa_{q_i \dots q_p}(Y_{k_1 \dots k_p})$$

On procède de même avec l'entier $n + 1$ et on obtient la formule :

$$\kappa_{n+1 \dots n+1}(\exp\left(\sum_i \frac{a_{ii}}{2} u_{ii}\right) Y_{k_1 \dots k_p}) = \left(\prod (-a_{ii})\right) \kappa_{nn \dots n}(\exp\left(\sum_i \frac{a_{ii}}{2} u_{ii}\right) Y_{k_1 \dots k_p})$$

On en déduit aisément la formule souhaitée. \square

Démonstration du théorème 3.7. De la proposition précédente on déduit que, si M est obtenue par chirurgie sur un entrelacs en bande E , on a :

$$\Omega_{n+1}(M) = |\delta(E)| \Omega_n(M)$$

en degré $\leq n$. Mais $|\delta(E)|$ est l'ordre de $H_1(M; \mathbf{Z})$ si M est une sphère d'homologie rationnelle et 0 sinon. C'est donc le nombre $d(M)$ et l'on a pour tout $i \leq n$:

$$\Omega_{n+1}(M)_i = d(M) \Omega_n(M)_i$$

On pose alors :

$$Z^{LMO}(M) = \sum_{n \geq 0} \Omega_n(M)_n$$

et l'on a pour tout n :

$$\Omega_n(M) = \sum_{i=0}^n d(M)^{n-i} \Omega_i(M)_i$$

Le fait que $Z^{LMO}(M)$ soit un élément de type groupe résulte du fait que $\check{Z}(M)$ et $\varphi^{-1}(\check{Z}(M))$ sont de type groupe et d'un calcul explicite de $\kappa_{nn \dots n}(\varphi^{-1}(\check{Z}(M)))$. Voir [LMO] pour une démonstration complète.

5. Propriétés de l'invariant LMO

5.1 Proposition. *Soient M et M' deux variétés compactes connexes orientées sans bord de dimension 3. Alors on a :*

$$Z^{LMO}(M\#M')_n = \sum_{j+k=n} d(M)^k Z^{LMO}(M)_j d(M')^j Z^{LMO}(M')_k$$

Démonstration. On peut représenter M et M' comme chirurgies sur des entrelacs E et E' . On peut choisir ces entrelacs dans deux demi-espaces disjoints, l'un au-dessus de l'autre. On a alors :

$$\check{Z}(E \cup E') = \check{Z}(E)\check{Z}(E')$$

On en déduit pour tout n :

$$\Omega_n(M\#M') = \Omega_n(M)\Omega_n(M')$$

ce qui implique la formule souhaitée. □

Si l'on restreint Z^{LMO} aux sphères d'homologie entière il devient multiplicatif. Mais ce n'est pas le cas pour l'invariant Z^{LMO} lui-même. On peut cependant modifier cet invariant en un invariant \hat{Z}^{LMO} multiplicatif défini sur les sphères d'homologie rationnelle en posant pour toute variété M telle que $H_1(M; \mathbf{Z})$ soit fini d'ordre d :

$$\hat{Z}^{LMO}(M) = \sum_n Z^{LMO}(M)_n d^{-n}$$

5.2 Proposition. *Soit M une variété connexe compacte orientée sans bord de dimension 3 et $-M$ la même variété munie de l'orientation opposée. Soit b le premier nombre de Betti de M . Alors on a pour tout n :*

$$Z^{LMO}(-M)_n = (-1)^{n(b+1)} Z^{LMO}(M)_n$$

Démonstration. Soit S l'endomorphisme qui multiplie un élément de degré n d'un module gradué par $(-1)^n$. On vérifie que si E' est l'image miroir d'un entrelacs en bande E on a : $Z(E') = S(Z(E))$. Comme ν est concentré en degrés pairs, on a aussi : $\check{Z}(E') = S(\check{Z}(E))$. Soient p le nombre de composantes de E et n un entier. Comme i_n diminue les degrés de pn , on a : $i_n(\check{Z}(E')) = (-1)^{pn} S(i_n(\check{Z}(E)))$. Soient M et $-M$ les variétés obtenues par chirurgie le long de E et E' . On a alors :

$$\Omega_n(-M) = (-1)^{n(p-\sigma_++\sigma_-)} S(\Omega_n(M))$$

ce qui implique le résultat car on a : $p = b + \sigma_+ + \sigma_-$. □

Extension au cas des variétés avec entrelacs.

Soient M une variété compacte orientée connexe sans bord de dimension 3 et E un entrelacs en bande contenu dans M . On peut construire la paire (M, E) par chirurgie de S^3 le long d'un entrelacs en bande E' disjoint d'un autre entrelacs en bande E . Soit $\check{Z}(E', E)$ l'invariant $Z(E \cup E')$ modifié par multiplication par ν le long de chaque composante de E' . On peut effectuer les constructions précédentes à partir de $\check{Z}(E', E)$, mais en ne modifiant que l'entrelacs E' . On obtient ainsi des invariants $\Omega_n(M, E)$ appartenant à $\mathcal{A}(\widehat{E})$ ainsi qu'un invariant LMO $Z^{LMO}(M, E)$ appartenant également à $\mathcal{A}(\widehat{E})$. De façon plus précise ces invariants appartiennent au sous-module $\mathcal{A}'(\widehat{E})$ de $\mathcal{A}(\widehat{E})$ engendré par les diagrammes ne contenant aucun cercle isolé.

Cet invariant généralise l'intégrale de Kontsevich, car si E est un entrelacs en bande on a :

$$Z(S^3, E) = Z(E)$$

6. Invariants de type fini.

La théorie des invariants de Vassiliev, également appelés invariants de type fini, des entrelacs est basée sur certaines transformations élémentaires. La transformation la plus simple est la modification de croisements :

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}$$

Ces deux entrelacs sont les désingularisés d'un entrelacs singulier ayant un point double. Les différences des deux singularisés des entrelacs singuliers ayant un point double engendrent un sous-module I_1 du module $\mathbf{Q}[\mathcal{E}]$ des combinaisons linéaires formelles d'entrelacs. Si l'on considère maintenant des entrelacs singuliers ayant n points doubles les sommes alternées des désingularisés de ces entrelacs engendrent un sous-module I_n de $\mathbf{Q}[\mathcal{E}]$. On obtient ainsi une filtration de $\mathbf{Q}[\mathcal{E}]$. La théorie de Vassiliev donne une description du gradué associé à cette filtration en terme de diagrammes trivalents.

On peut cependant considérer d'autre type de transformations élémentaires. Par exemple la transformation de type Δ :

$$(\Delta) \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

Cette transformation donne une autre filtration de $\mathbf{Q}[\mathcal{E}]$ mais celle-ci, à changement d'indices près, est la même que la filtration précédente.

On peut procéder de même avec les variétés de dimension 3. Cependant, les modifications élémentaires que l'on peut considérer sur les variétés donnent souvent une filtration relativement triviale. C'est par exemple le cas lorsque l'on considère

la transformation élémentaire $M_{E_+} \leftrightarrow M_{E_-}$, E_+ et E_- se déduisant l'un de l'autre par une modification de croisement. Cette transformation modifie la variété, mais surtout elle change son homologie. On construit ainsi une filtration du module $\mathbf{Q}[\mathcal{V}]$ engendré par toutes les variétés connexes compactes orientées de dimension 3. On montre que cette filtration ne donne que peu d'information.

La situation est très différente si l'on considère la transformation $M_E \leftrightarrow M_{E'}$, E et E' se déduisant par une transformation de type Δ .

6.1 La filtration de Gusarov–Habiro.

6.2 Proposition. *Soit E' un entrelacs en bande qui se déduit d'un entrelacs en bande E par une transformation de type Δ . Alors les variétés chirurgisées M_E et $M_{E'}$ ont des homologies entières isomorphes.*

Démonstration. Cela résulte du fait que les matrices d'enlacement de E et de E' sont les mêmes. \square

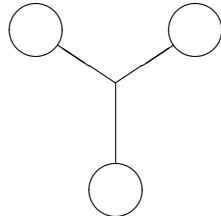
Soit \mathcal{S} l'ensemble des classes d'isomorphisme de sphères d'homologie entière, c'est-à-dire de variétés connexes compactes orientées de dimension 3 ayant le type d'homologie entière de S^3 . La somme connexe induit sur \mathcal{S} une structure de monoïde commutatif unitaire. On note $\mathbf{Q}[\mathcal{S}]$ le module des combinaisons linéaires formelles de sphères d'homologie entière. Ce module est une bialgèbre et les éléments de \mathcal{S} sont de type groupe.

Considérons un diagramme trivalent K , une application α de K dans S^3 et un champ de vecteur V sur $\alpha(K)$ possédant les propriétés suivantes :

- α est un plongement différentiable sur toutes les arêtes de K
- pour tout sommet x de K les trois arêtes de $\alpha(K)$ issues de $\alpha(x)$ ont en ce point des tangentes coplanaires mais non colinéaires deux à deux
- V est en tout sommet de $\alpha(K)$ non coplanaire au plan tangent au trois arêtes issues de ce sommet et en tout autre point de $\alpha(K)$ non tangent au graphe.

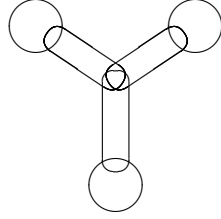
On appellera une telle donnée (K, α, V) un pseudo-diagramme en bande plongé dans S^3 . Un tel diagramme en bande admet un épaissement en une surface orientée transverse au champ de vecteur, ce qui induit un ordre cyclique sur les arêtes de K issues de chaque sommet de K . Un tel épaissement sera appelé épaissement en bande de (K, α, V) . On dira que (α, V) est un plongement en bande du diagramme K si ces ordres cycliques sont les ordres cycliques donnés par la structure de diagramme trivalent de K . On dira dans ce cas que (K, α, V) est un diagramme en bande plongé.

Considérons le diagramme K suivant :



et supposons-le plongé dans S^3 par un plongement en bande. On supposera que les trois cercles de K sont orientés de façon standard. On peut épaisir chacune des

trois arêtes de K qui ne sont pas des cercles en une bande orientée contenue dans un épaississement en bande de K . On obtient une courbe orientée formée de 6 cercles immergée dans la sphère :



On peut alors modifier cette courbe immergée en un entrelacs en bande $L(K)$, en prenant des croisements négatifs pour les 3 points doubles situés au bord du triangle central et des croisements positifs pour les 9 autres points doubles.

Près du sommet central de K , l'entrelacs $L(K)$ est un entrelacs Borroméen qui peut se dénouer par une transformation de type Δ . On appellera Y -diagramme un diagramme en bande plongé un tel diagramme K . La construction précédente associe à tout Y -diagramme K un entrelacs en bande à 6 composante $L(K)$. Si maintenant K est une union disjointe de Y -diagrammes, on peut effectuer la construction précédente sur chaque composante de K et l'on obtient un entrelacs en bande $L(K)$. Il est facile de vérifier que la matrice d'enlacement de $L(K)$ est toujours unimodulaire et la variété chirurgisée $M_{L(K)}$ est une sphère d'homologie entière.

Considérons un diagramme en bande plongé K dont chaque composante est un Y -diagramme. On pose :

$$\Sigma(K) = \sum_{K'} (-1)^{\#K'} M_{L(K')}$$

où K' est une union quelconque de composantes connexes de K , $\#K'$ le nombre de composantes de K' et $M_{L(K')}$ la variété obtenue par chirurgie le long de $L(K')$. Cette somme appartient à l'algèbre $\mathbf{Q}[\mathcal{S}]$. On note \mathcal{F}_n le sous-module de $\mathbf{Q}[\mathcal{S}]$ engendré par les éléments $\Sigma(K)$ où K est un diagramme en bande plongé formé de n composantes qui sont chacune des Y -diagrammes. On montre aisément le résultat suivant :

6.3 Proposition. *Les sous-modules \mathcal{F}_n forment une filtration de la bialgèbre $\mathbf{Q}[\mathcal{S}]$, compatible avec la structure de bialgèbre. C'est-à-dire que l'on a pour tous p, q et n :*

$$\mathcal{F}_p \mathcal{F}_q \subset \mathcal{F}_{p+q} \quad \Delta(\mathcal{F}_n) \subset \sum_{p+q=n} \mathcal{F}_p \otimes \mathcal{F}_q$$

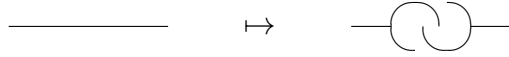
Remarque. Cette filtration a été introduite par Gusarov et Habiro. Une autre filtration a été obtenue indépendamment par Ohtsuki et Garoufalidis. Mais celle-ci est équivalente à la filtration de Gusarov–Habiro.

De façon plus précise Gusarov et Habiro ont montré que pour tout n , \mathcal{F}_{2n-1} est égal à \mathcal{F}_{2n} . Quant à la filtration \mathcal{F}'_n de Ohtsuki et Garoufalidis, Garoufalidis, Levine et Ohtsuki ([GL], [GO1]) ont montré l'égalité $\mathcal{F}'_{3n-2} = \mathcal{F}'_{3n-1} = \mathcal{F}'_{3n}$ pour tout n . Enfin Gusarov ([Gu2]) a montré l'égalité $\mathcal{F}_{2n} = \mathcal{F}'_{3n}$.

6.4 La fonction de poids W .

L'intérêt de la théorie de Habiro, est qu'elle permet de construire facilement une application du module $\mathcal{A}'(\emptyset)$ engendré par les diagrammes trivalents n'ayant aucune composante circulaire dans le gradué associé à la filtration \mathcal{F}_* .

Considérons un tel diagramme trivalent K de degré n . On peut le plonger dans la sphère avec un plongement en bande et l'on obtient un diagramme en bande plongé K' . On effectue alors la transformation suivante : au voisinage du milieu de chaque arête de K' on modifie K' ainsi :



On obtient ainsi un nouveau diagramme en bande plongé K'' dont chaque composante connexe est un Y -diagramme. Comme K est supposé de degré n , K a $2n$ sommets et K'' a $2n$ composantes. L'élément $\Sigma(K'')$ est donc un élément de \mathcal{F}_{2n} . On a le résultat suivant :

6.5 Proposition. *La construction ci-dessus induit une application bien définie W de $\mathcal{A}'(\emptyset)_n$ dans le quotient $\mathcal{F}_{2n}/\mathcal{F}_{2n+2}$. De plus W est surjective.*

Il faut montrer que $\Sigma(K'')$ est, modulo \mathcal{F}_{2n+1} , indépendant du plongement choisi. Il suffit pour cela de comparer $\Sigma(K''_1)$ et $\Sigma(K''_2)$ lorsque K_1 et K_2 sont obtenus l'un de l'autre par une modification de croisement. Il faut ensuite montrer la compatibilité avec les relations AS et IHX. La relation AS est facile à vérifier. L'indépendance par rapport au plongement et la compatibilité avec la relation IHX sont plus délicates, mais il s'agit à chaque fois d'une vérification locale. Le fait que W est surjective est facile à vérifier.

6.6 Théorème. *L'invariant LMO est l'invariant de type fini universel. C'est-à-dire qu'il induit pour tout $n > 0$ un isomorphisme de $\mathbf{Q}[\mathcal{S}]/\mathcal{F}_{2n+2}$ sur le module $\mathcal{A}'(\emptyset)$ tronqué à l'ordre n . De plus les applications :*

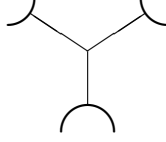
$$\mathcal{A}'(\emptyset)_n \xrightarrow{W} \mathcal{F}_{2n}/\mathcal{F}_{2n+2} \xrightarrow{Z^{LMO}} \mathcal{A}'(\emptyset)_n$$

sont des isomorphismes.

Esquisse de démonstration. Montrons tout d'abord que l'invariant Ω_n est un invariant d'ordre au plus $2n$, c'est -à-dire qu'il s'annule sur $\Sigma(K)$ dès que K possède au moins $2n + 1$ composantes.

Soit donc K une union de $n + 1$ Y -diagrammes. Considérons le diagramme en bande plongé K' obtenu en enlevant à K une composante K_0 . On peut dénouer $L(K_0)$ par une transformation de type Δ au voisinage du sommet central de K_0 . On obtient ainsi un nouvel entrelacs en bande $L_0(K_0)$ à 6 composantes qui est une union disjointe de trois entrelacs de Hopf. Le calcul de Kirby montre qu'une chirurgie le long de $L_0(K_0)$ ne modifie pas la variété, ce qui prouve que les entrelacs en bande $L(K')$ et $L(K') \cup L_0(K_0)$ donnent la même variété par chirurgie. D'autre part, comme les matrices d'enlacement de $L(K_0)$ et $L_0(K_0)$ sont les mêmes, la différence $\varphi^{-1}(Z(L(K))) - \varphi^{-1}(Z(L(K') \cup L_0(K_0)))$ est une combinaison linéaire de diagrammes

$L(K)$ -coloriés ayant chacun au moins un sommet trivalent et il en est de même de $\varphi^{-1}(\check{Z}(L(K))) - \varphi^{-1}(\check{Z}(L(K') \cup L_0(K_0)))$. Un calcul explicite montre que le premier terme non nul de $\varphi^{-1}(\check{Z}(L(K))) - \varphi^{-1}(\check{Z}(L(K') \cup L_0(K_0)))$ est en degré 2. Il est égal à $L(K')$ auquel on a rajouté trois arêtes près du sommet central de K :



Si maintenant K_0 est une union quelconque de composantes connexes de K , on peut effectuer une transformation de type Δ au voisinage de chacun des sommets centraux des composantes de K_0 et l'on obtient un entrelacs en bande plongé $L_0(K_0)$. Notons $L(K, K_0)$ l'union de $L(K - K_0)$ et de $L_0(K_0)$. Cet entrelacs en bande est obtenu à partir de $L(K)$ par des transformation de type Δ sur chaque composante de K_0 . Par itération du calcul précédent, on obtient que l'expression :

$$\sum_{K_0} (-1)^{\#K_0} \varphi^{-1}(\check{Z}(L(K, K_0)))$$

est une combinaison linéaire de diagrammes $L(K)$ -coloriés ayant chacun au moins $2n + 1$ sommets trivalents et la somme

$$\sum_{K_0} (-1)^{\#K_0} i_n(\check{Z}(L(K, K_0)))$$

est aussi une combinaison linéaire de diagrammes ayant au moins $2n + 1$ sommets trivalents. Cette somme commence donc en degré $n + 1$, ce qui implique :

$$\Omega_n(\Sigma(K)) = \sum_{K'} (-1)^{\#K'} \Omega_n(M_{L(K')}) = \sum_{K_0} (-1)^{\#K_0} \Omega_n(M_{L(K, K_0)}) = 0$$

On en déduit que l'invariant LMO envoie chaque élément de \mathcal{F}_{2n+2} en une série qui ne comporte que des termes de degrés $\geq n + 1$ et induit une application de $\mathbf{Q}[\mathcal{S}]/\mathcal{F}_{2n+2}$ dans le tronqué à l'ordre n de $\widehat{\mathcal{A}'(\emptyset)}$.

Pour terminer la démonstration il suffit de montrer que, si K est un diagramme trivalent sans composante circulaire, sa classe dans $\widehat{\mathcal{A}'(\emptyset)}$ est égale à $\Omega_n(\Sigma(K)) = \sum_{K' \subset L(K)} i_n \circ \check{Z}(L(K) - K')$. Mais, comme on l'a vu précédemment, on peut remplacer cette somme par :

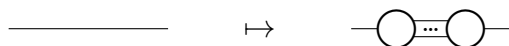
$$\Omega_n(\Sigma(K)) = \sum_{P \subset X} (-1)^{\#P} i_n \circ \check{Z}(L(K)_P)$$

où X est l'ensemble des sommets de K et $L(K)_P$ l'entrelacs en bande plongé $L(K)$ modifié par une transformation de type Δ près de chaque sommet de P .

Si K est de degré n il a $2n$ sommets et $3n$ arêtes. Par itération de la formule précédente on montre que la somme alternée $\sum (-1)^{\#P} \check{Z}(L(K)_P)$ est de la forme

$$\sum_{P \subset X} (-1)^{\#P} \check{Z}(L(K)_P) = U + V$$

où U est le diagramme $\check{Z}(L_0(K))$ où l'on a attaché près de chaque sommet de K trois arêtes en trois points de $L_0(K)$ avec un sommet trivalent commun, et où V est une combinaison linéaire de diagrammes ayant au moins $2n + 1$ sommets trivalents situés en dehors de $L_0(K)$. Il reste à déterminer la contribution de U ayant exactement n sommets en chaque cercle de $L_0(K)$. Comme $L_0(K)$ est une union disjointe de $3n$ copies de l'entrelacs de Hopf, on voit que le seul terme de la somme alternée qui donne une image peut-être non nulle par i_n est le diagramme \widehat{K} multiplié par $(2n - 1)^{-3n}$, où \widehat{K} est le diagramme obtenu à partir de K en modifiant chaque arête de K de la façon suivante:



avec $2n - 1$ arêtes joignant les deux cercles. Un dernier calcul montre alors que $i_n(\widehat{K})$ est égal à K , ce qui termine la démonstration. \square

L'invariant LMO est assez mystérieux. Si M est une variété de dimension 3 connexe compacte orientée sans bord, son invariant $Z^{LMO}(M)$ est un élément de type groupe de l'algèbre de Hopf $\mathcal{A}'(\widehat{\emptyset})$, c'est donc l'exponentielle d'un élément primitif u . Cet élément u est une somme de diagrammes trivalents connexes ayant au moins un sommet. La composante de u de degré 0 est nulle et sa composante de degré 1 est nécessairement un multiple du diagramme Θ suivant :

$$\Theta = \bigcirc$$

Il existe donc un invariant c_1 à valeurs rationnelles tel que pour toute variété M compacte orientée connexe sans bord de dimension 3 le coefficient de degré 1 de $Z^{LMO}(M)$ soit de la forme $c_1(M)\Theta$. Cet invariant est donné par le théorème suivant :

6.7 Théorème. *L'invariant c_1 est relié à l'invariant de Casson–Walker–Lescop λ par la formule suivante :*

$$c_1(M) = (-1)^b \lambda(M)/2$$

où b est le premier nombre de Betti de M .

Dans le cas où M est une sphère d'homologie entière, ce théorème se ramène à montrer que λ est nul sur le module \mathcal{F}_3 et à faire le calcul pour une variété particulière, par exemple la sphère de Poincaré. Ceci marche également pour les sphères d'homologie rationnelle car pour ces variétés, on montre que l'invariant L^{LMO} est aussi un invariant de type fini universel, du moins pour les variétés de dimension 3 dont le premier groupe d'homologie entière est un groupe fini donné et la forme d'enlacement est une forme donnée. La démonstration de ce fait ([H]) est plus délicate car la fonction W n'est plus disponible dans cette nouvelle situation.

Remarque. Le module des primitifs de $\mathcal{A}'(\widehat{\emptyset})$ est de dimension 1 en degré 1, 2 et 3. Outre l'invariant c_1 on a donc deux invariants c_2 et c_3 de degré 2 et 3 qui caractérisent

l'invariant LMO en degré ≤ 3 . Ces invariants c_2 et c_3 sont à valeurs rationnelles, mais on n'a pas actuellement d'interprétation simple de ces invariants.

REFERENCES

- [BN] D. Bar-Natan – *On the Vassiliev knot invariants*, *Topology* **34** n°2 1995, 423–472.
- [D] V. Drinfeld – *On quasi-triangular quasi-Hopf algebras and a group connected with $Gal(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$* , *Leningrad Math. J.* **2** 1990, 829–860.
- [GL] S. Garoufalidis and J. Levine – *On finite type invariants II*, à paraître dans *Math. Annalen*.
- [GO] S. Garoufalidis and T. Ohtsukhi – *On finite type invariants III: manifold weight systems*, preprint 1995.
- [Gu1] M. N. Gusarov – *On n -equivalence of knots and invariants of finite degrees*, in “Topology of Manifolds and Varieties”, 1996.
- [Gu2] M. N. Gusarov – *Finite type invariants and n -equivalence of 3-manifold*, preprint 1999.
- [H] K. Habiro – *Claspers and finite type invariants*, preprint 1998.
- [Ki] R. Kirby – *A calculus for framed links*, *Inven. Math.* **45** 1978, 33–56.
- [Ko] M. Kontsevich – *Vassiliev's knots invariants*, *Adv. Sov. Math.* **16** n°2 1993, 137–150.
- [L] W. B. R. Lickorish – *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, *Ann. Math.* **76** 1962, 531–540.
- [LM] T. T. Q. Le and J. Murakami – *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links*, *Compositio Math.* **102** 1996, 271–291.
- [LMO] T. T. Q. Le, J. Murakami and T. Ohtsuki – *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds*, *Topology* **37** n°3 1998, 539–574.
- [V] P. Vogel – *Invariants de Vassiliev des nœuds*, *Sém. Bourbaki*, 1992–93, *Astérisque* **216** 1993, 213–232.