

Im-et-Ker

101. — Les clefs pour l’X. Bernard Randé & Franck Taïeb
102. — Les clefs pour l’X (2). Roger Mansuy & Bernard Randé
103. — Les clefs pour les Mines. Françoise Fontanez & Bernard Randé
104. — Problèmes clefs pour mathématiques supérieures. Hervé Gianella, Romain Krust, Franck Taïeb & Nicolas Tosel
105. — Les clefs pour la PSI et la PSI*. Roger Mansuy & Bernard Randé
106. — Une année de colles en Math Sup MPSI. Éric Kouris
107. — Les clefs pour les Hautes Études Commerciales. Philippe Gallic & Jean-Louis Grappin
108. — Le jardin d’Eiden. Une année de colles en MP*. Jean-Denis Eiden
109. — Un Max de Maths. Maxime Zavidovique
110. — Mathématiques pour la voie économique et commerciale. J. Gärtner
111. — Probabilités. Cours et exercices corrigés (1). Thierry Meyre
112. — Les clefs pour l’écrit MP de mathématiques (session 2015). Bernard Randé, Alix Deleporte-Dumont, Quentin Guignard
113. — Les clefs pour l’oral MP de mathématiques, X-ENS (session 2015). Quentin Guignard, Bernard Randé
114. — Les clefs pour l’écrit de mathématiques des concours 2016, filière MP. Clément de Seguins Pazzis
115. — Les clefs pour l’Info. I. Belghiti, R. Mansuy et J.-J. Vie.
116. — Les nouvelles clefs pour les Mines-CCP (tome I). Oral MP, 2015-16. Bernard Randé
117. — Agrégation interne. Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie. Georges Skandalis
118. — Florilège d’exercices de l’oral d’HEC. Jean-Louis Roque
119. — Les clefs pour l’écrit MP 2017 – Mathématiques. Clément de Seguins Pazzis
120. — Les clefs pour l’écrit de mathématiques et d’informatique. Filière PSI 2015-2016. L. Cozar, N. Jousse, B. Randé, L. Sartre
121. — Agrégation interne. Analyse. Georges Skandalis
122. — Les clefs pour l’oral MP. Mathématiques ENS-X, 2016-2017. Thomas Blomme, Louise Gassot, Quentin Guignard, Bernard Randé
123. — Une année de colles en MPSI (Nouvelle édition). Éric Kouris
124. — Probabilités. Cours et exercices corrigés (2). Thierry Meyre

Thierry MEYRE

Probabilités, cours et exercices corrigés

Agrégation interne, Classes préparatoires,
Licence, Capes

Tome second



Calvage & Mounet



Ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud, agrégé de mathématiques, THIERRY MEYRE est maître de conférences à l'université Paris Diderot (P7).

meyre@math.univ-paris-diderot.fr

Mathematics Subject Classification (2000) :

- 05-01 Combinatorics (Instructional exposition)
- 60-01 Probability Theory and Stochastic Processes (Instructional exposition)
- 60-A05 Foundations of probability theory (Axioms; other general questions)
- 60-C05 Combinatorial probability
- 60-E05 Distributions : general theory
- 62-E20 Asymptotic distribution theory

∞ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2018

ISBN 978-2-9163-5277-0



9 782916 352770

à *Nathan*

Avant-propos

Le tome second de cet ouvrage est issu d'enseignements donnés à l'université Paris Diderot, au sein de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris :

- un cours de probabilités dans le cadre de la préparation au concours interne de l'agrégation de Mathématiques,
- un cours de statistique professé dans le parcours Enseignants du Master deuxième année de Mathématiques.

Dans le tome premier, nous nous sommes intéressés aux expériences aléatoires dont l'ensemble des résultats possibles est fini ou dénombrable. Si ce cadre *discret* nous a permis de présenter les notions fondamentales du calcul des probabilités, il cesse néanmoins d'être approprié pour la modélisation de phénomènes aléatoires dont le résultat est une quantité continue : temps, masse, longueur, etc.

Pour passer au cadre *continu*, nous allons désormais faire appel à la théorie de l'intégration, telle qu'elle figure au programme du concours interne de l'agrégation de Mathématiques ; des rappels de cours détaillés sont donnés en annexe. En fait, nous aurons même besoin de quelques résultats sophistiqués qui appartiennent à la théorie de la mesure. Cette dernière étant hors programme, nous nous contenterons de présenter quelques théorèmes admis, en évacuant autant que possible les aspects techniques.

En disposant de ces nouveaux outils, nous pourrions notamment étudier des résultats asymptotiques d'une grande importance dans la théorie probabiliste : la loi des grands nombres et le théorème-limite central.

Le programme de la session 2019 du concours ayant introduit un paragraphe sur l'estimation statistique ponctuelle et par intervalle de confiance, nous consacrons les trois derniers chapitres à ces notions, ainsi qu'à une introduction à la théorie des tests.

Comme dans le tome premier, chaque chapitre du cours se termine par un choix d'exercices, qui sont corrigés en détail. Certains d'entre eux se prêtent bien à un développement lors des épreuves orales du concours.

Remerciements

Je remercie les éditions Calvage & Mounet, notamment Rached Mneimné et Alberto Arabia, pour leur confiance renouvelée et pour le soin méticuleux qu'ils apportent à leur activité. Il est agréable de travailler avec un éditeur compétent en mathématiques et soucieux d'offrir une excellente qualité typographique à ses lecteurs.

J'exprime ma reconnaissance à mes collègues de la préparation au concours interne de l'agrégation, notamment à Georges Skandalis et Catherine Gille, responsables de cette formation ; faire partie avec eux de l'équipe enseignante est un privilège pour moi. Enfin, je remercie celles et ceux qui ont été et sont encore la motivation première de ce travail : tous les professeurs stagiaires qui contribuent au dynamisme et à l'atmosphère sympathique de la préparation.

Table des matières

Volume I

I. Modélisation d'une expérience aléatoire

1. L'espace Ω	1
2. La tribu des évènements.	2
3. Mesure de probabilité	5
4. Propriétés d'une probabilité	7
5. Exercices	11

II. Espace probabilisé fini ou dénombrable

1. Forme générale et premiers exemples	13
2. Probabilité uniforme sur un espace fini	18
3. Tirage avec remise	19
4. Tirage sans remise	22
5. Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale	24
6. Espace produit	26
7. Exercices	27

III. Probabilité conditionnelle et évènements indépendants

1. Définition	31
2. Trois formules incontournables	33
3. Évènements indépendants	38
4. Exercices	45

IV. Loi et espérance d'une variable aléatoire discrète

1. Un exemple de variable binomiale	47
2. Loi d'une variable aléatoire réelle discrète	49
3. Loi d'un vecteur aléatoire discret	51
4. Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète	54
5. Théorème de transfert et propriétés de l'espérance	58
6. Exercices	66

V. Indépendance de variables discrètes	
1. Définition et propriétés	69
2. Suite indépendante	78
3. Convolution de lois sur \mathbb{N}	79
4. Exercices	86
VI. Moments d'une variable discrète	
1. Moment d'ordre r	89
2. Variance	92
3. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}	97
4. Exercices	102
VII. Covariance. Corrélation	
1. Covariance de deux variables discrètes	105
2. Coefficient de corrélation	112
3. Droite de régression	114
4. Exercices	117
VIII. Approximations de la loi binomiale, applications	
1. Le théorème de Poisson	119
2. Les théorèmes de Moivre-Laplace	122
3. Intervalles de fluctuation et de confiance	128
4. Exercices	132
Annexe A. Opérations ensemblistes	
1. Complémentaire, réunion et intersection	135
2. Limites de suites ensemblistes	136
3. Formules de Hausdorff	138
Annexe B. Familles sommables	
1. La droite réelle achevée	139
2. Somme d'une famille positive	140
3. Famille sommable de réels	142
Annexe C. Combinatoire	
1. Arrangements et permutations	145
2. Combinaisons, formule du binôme	146
3. Généralisations de la formule du binôme	148
Annexe D. Séries entières	
1. L'algèbre des séries entières	153
2. Rayon de convergence	154
3. Continuité, dérivabilité et formule intégrale de Cauchy	158

Indications de solutions	163
Exercices du chapitre I	163
Exercices du chapitre II	165
Exercices du chapitre III	172
Exercices du chapitre IV	177
Exercices du chapitre V	183
Exercices du chapitre VI	190
Exercices du chapitre VII	193
Exercices du chapitre VIII	197

Volume II

IX. Probabilités sur \mathbb{R}

1. Tribu borélienne sur \mathbb{R} . Fonctions de répartition	1
2. Retour sur les probabilités discrètes	5
3. Probabilité diffuse. Densité de probabilité	8
4. Loi d'une variable aléatoire réelle	12
5. Exemples de lois à densité	16
6. Composition d'une variable à densité par un difféomorphisme .	24
7. Le paradoxe de Bertrand	28
8. Exercices	31

X. Moments d'une variable aléatoire à densité

1. Espérance et théorème de transfert	37
2. Moment d'ordre r , variance	45
3. Transformée de Laplace d'une variable aléatoire positive . . .	51
4. Exercices	53

XI. Vecteurs aléatoires et indépendance

1. Les vecteurs aléatoires et leurs lois	56
2. Vecteurs aléatoires à densité	57
3. Indépendance de k variables aléatoires réelles	61
4. Convolution de densités	66
5. Covariance, corrélation	70
6. Un exemple historique : l'aiguille de Buffon	77
7. Exercices	79

XII. Loi des grands nombres

1. Convergence en probabilité, convergence presque sûre	83
2. Suite indépendante équadistribuée	88
3. Loi des grands nombres	90
4. Construction de suites indépendantes	94
5. Exercices	97

XIII. Le théorème-limite central

1. Rappels et compléments sur la loi normale	100
2. Énoncé classique	105
3. Théorème-limite central et fonctions de répartition	108
4. Théorème de Berry-Esseen	112
5. Convergence en loi et fonctions de répartition	115
6. Complément : un énoncé sans hypothèse d'équidistribution	116
7. Exercices	117

XIV. Modèle statistique

1. Les démarches probabiliste et statistique	122
2. Modèle canonique d'échantillonnage	124
3. La classe exponentielle de lois	126
4. Exercices	127

XV. Estimation paramétrique ponctuelle

1. Estimateur sans biais. Moyenne et variance empiriques	129
2. Estimateur des moments	133
3. Estimateur du maximum de vraisemblance	137
4. Estimateur sans biais à variance minimale	143
5. Exercices	145

XVI. Échantillons gaussiens

1. Vecteurs gaussiens	147
2. Intervalles de fluctuation et de confiance	152
3. Introduction aux tests statistiques	158
4. Le test du khi-deux	164
5. Exercices	170

Annexe E. Quelques rappels d'analyse

1. Caractérisations séquentielles	173
2. Application continue à droite et additive	174
3. Développement dyadique	175

Annexe F. Intégration

1. Applications continues par morceaux	179
2. Construction de l'intégrale de Riemann	183
3. Théorème fondamental de l'analyse	188
4. Intégrales impropres	192
5. Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque	201
6. Intégrales multiples	205

Annexe G. Tableau récapitulatif **213**

Annexe H. Quantiles de la loi $\chi^2(k)$ **215**

Indications de solutions	217
Exercices du chapitre IX	217
Exercices du chapitre X	226
Exercices du chapitre XI	233
Exercices du chapitre XII	240
Exercices du chapitre XIII	246
Exercices du chapitre XIV	252
Exercices du chapitre XV	253
Exercices du chapitre XVI	256
Bibliographie	261
Notations	263
Index	265