Hervé Queffélec – Martine Queffélec

Analyse complexe et applications

Cours et exercices

Calvage & Mounet

Martine et Hervé Queffélec résident à Lille. Leurs travaux de recherche portent sur l'Analyse sous toutes ses formes : fonctionnelle, harmonique, complexe, etc...
Maintenant chercheurs émérites à l'Université de Lille 1, ils ont été pendant plusieurs années membres du jury de l'agrégation, ou préparateurs à l'agrégation. Ils sont les auteurs, ensemble ou séparément, de plusieurs ouvrages d'enseignement ou de recherche en Mathématiques.

Martine.Queffelec@math.univ-lille1.fr

Herve.Queffelec@univ-lille1.fr

Mathematics Subject Classification (2000) :

11 J–Number Theory
12 D–Field theory and Polynomials
28 A–Measure and Integration
30 A–Functions of a complex variable
33 B–Special functions
44 A–Integral transforms, Operational Calculus
46 J–Functional Analysis
47 A–Operator Theory
60 E–Probability Theory and Stochastic Processes

Mots-clefs : contour, pôle, résidu, singularité, indice.

ISBN 978-2-916352-59-6

9 782916 352596

∞ Imprimé sur papier permanent

À Clémence et Dominique

Préface

Contemplata aliis tradere...

1. Les nombres complexes et les prérequis

Les nombres complexes — qui ne le sont pas tant — ont à nos yeux d'analystes une structure incomparablement plus riche que celle des nombres réels ; par exemple, la topologie du plan est infiniment plus complexe (!) que celle de la droite : les parties connexes sont autrement compliquées que les intervalles de $\mathbb{R}$, la notion nouvelle de simple connexité apparaît, sans parler des notions d'indice, de courbe de Jordan, etc.
Et même, à ceux qui ont juré de rester dans le « monde réel », il faut rappeler cette phrase de Painlevé : « Le chemin le plus court entre deux vérités réelles passe souvent par le domaine complexe. » On en veut pour preuve le calcul de la somme réelle $S = 1 + \cos x + \cdots + \cos nx$, un des premiers enthousiasmes mathématiques des auteurs, consistant à passer à la somme complexe $1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx}$, qui est celle d'une progression géométrique et donc calculable sous forme « close », puis à revenir aux parties réelles. Bien sûr, si l'on connaît déjà la réponse, on peut parachuter une autre méthode : on forme $2\sin(x/2)\times S$, faisant ainsi apparaître une somme télescopique... Quoiqu'il en soit, cette méthode qui consiste à complexifier-exploiter-atterrir se révèle extrêmement féconde, et sera en filigrane dans tout l'ouvrage (voir par exemple l'indécomposabilité des lois de Poisson en Probabilités).

Mais entrons un peu plus dans les détails : les prérequis se limitent à une bonne familiarité avec l'Analyse enseignée en deuxième année (suites, séries, calcul intégral, calcul différentiel, topologie du plan) ; d'ailleurs, au chapitre I, le lecteur trouvera une introduction à l'exponentielle complexe, avec en application la forme polaire des nombres complexes et la définition axiomatique du nombre π, choses impossibles à traiter rigoureusement sans cette fonction exponentielle. Il trouvera également des révisions sur les espaces topologiques compacts et connexes, les deux notions jouant dans ce livre un rôle essentiel, ainsi que quelques éléments de la théorie des séries de Fourier.

En ce qui concerne l'intégration, la théorie de Riemann suffit ici puisque les fonctions à intégrer sont continues (pour le moins) mais on se permettra d'utiliser les théorèmes de convergence issus de la théorie de Lebesgue pour le confort qu'ils apportent (lemme de Fatou, théorème de convergence dominée, de Fubini, de changement de variable, etc.) ; les principaux résultats de calcul différentiel à plusieurs variables sont rappelés (théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites) et on se limite bien évidemment à la dimension finie. On pourra réviser tous ces thèmes dans les livres cités dans la bibliographie.

À la fin de cet ouvrage, quand on traite les applications, il est fait appel à des connaissances solides, quoiqu'élémentaires, de troisième ou de quatrième année ([Ru2]), l'algèbre des polynômes et les nombres algébriques, la théorie élémentaire des Probabilités ([Li]) et la théorie des opérateurs sur un espace de Hilbert.

2. Des polynômes aux fonctions holomorphes

« Holomorphe », juxtaposition de mots grecs signifiant « entier » et « forme ». Nous sommes loin de pouvoir prétendre aujourd'hui, comme le faisait Trissotin, « Et sait du grec, madame, autant qu'homme de France ! » : les mots de grec ancien font peur et le mot « holomorphe » ne fait pas exception à la règle. Or, soyons réalistes :

▹ f *dérivable* veut dire

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ admet une limite quand } h \text{ réel } \to 0.$$

▹ f *holomorphe* veut dire

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \text{ admet une limite quand } h \text{ complexe } \to 0.$$

Il s'agit donc *exactement de la même notion,* à cela près que dans le second cas l'accroissement h est complexe. Et il n'est pas plus dur de montrer que la dérivée de z^n est nz^{n-1} que de montrer que celle de x^n est nx^{n-1}. C'est pourquoi nous donnons dans ce livre, au début tout au moins, une grande place aux polynômes. Ces polynômes sont des sommes finies, donc les problèmes de convergence de série sont absents et les détails techniques bien plus simples. Et ce sont des fonctions holomorphes particulières, sur lesquelles beaucoup de phénomènes fondamentaux apparaissent : analyticité, propriété de la moyenne, principe du maximum, etc. Et l'on pourrait dire que, lorsqu'on a compris avec les polynômes, on a tout compris (i.e. le cas général des fonctions holomorphes). Il ne faut pas se dissimuler qu'il y a quelques différences : un polynôme non constant a toujours des racines complexes (théorème de d'Alembert-Gauss), la fonction exponentielle e^z n'en a aucune. Mais il s'en faut de peu (la fonction $e^z - a$ s'annule dès que $a \neq 0$) et cela correspond à un phénomène général (théorème de Picard, qui sera prouvé au chapitre VI de ce livre). Enfin, même si la notion d'holomorphie est une généralisation banale de celle de dérivabilité, elle se trouve être possédée par très peu de fonctions, et elle est d'une grand rigidité, puisqu'elle équivaut à une autre notion, celle d'analyticité. Cette équivalence extrêmement utile n'est pas facile à prouver, et demande à elle seule une mini-théorie, appelée théorie de Cauchy. Il y a en fait deux telles théories : la théorie de Cauchy locale, et la théorie de Cauchy globale. Elles sont toutes les deux présentées dans ce livre ; la première suffit souvent. Mais quand on a cette équivalence holomorphie-analyticité, les récompenses pleuvent. Nous espérons que cet ouvrage en convaincra le lecteur.

3. Les exercices corrigés

Un choix d'exercices est proposé à la fin de chaque chapitre, certains élémentaires, d'autres plus élaborés, qui suivent grosso modo la progression du chapitre (et donc pas nécessairement de difficulté croissante). L'ouvrage en comporte plus d'une centaine, un astérisque signalant quelques énoncés plus difficiles. On ne saurait trop recommander de s'y essayer pour s'approprier les nouvelles notions du cours. On trouvera le corrigé détaillé de chacun d'eux, à une ou deux exceptions près.

4. Dessins

Il ne suffit pas d'écrire un texte, encore faut-il savoir le transformer en un bel objet-livre, clairement présenté, agréable à feuilleter, et contenant de nombreux dessins, particulièrement indispensables dans un ouvrage sur la variable complexe. Il est certain que sans la collaboration et la compétence d'Alain Debreil, le manuscrit serait resté à l'état d'esquisse, privé de figures que nous aurions été incapables de réaliser à l'ordinateur. Alain a accompli en un temps record un travail colossal de mise en forme, de vérification, de création de références internes et de composition des figures. Il y en a plus de cinquante… Qu'il en soit chaleureusement remercié ici.

5. Remarques techniques

Les imperfections du texte sont évidemment inévitables, mais certaines sont volontaires : nous pensons par exemple au choix assumé de parler de la fonction $f(z) =$ (s'ensuit une expression symbolique en z) alors qu'il faudrait parler de la fonction $f : z \mapsto f(z)$ avec la lourdeur qui en découle. Nous avons fait le pari pascalien de croire que le lecteur sait distinguer la fonction f et la valeur $f(z)$ de f au point $z \ldots$

Au-delà des symboles, nous tablons donc sur la bonne compréhension des objets en jeu, tout en sachant que la confusion (quand on manipule des familles de tels objets) reste possible.

Nous avons aussi choisi délibérément de noter log la fonction « logarithme » en complexe comme en réel, alors qu'il s'agit d'un « logarithme népérien » noté classiquement ln. Outre que cela donne des résultats particulièrement laids et ambigus dans certaines expressions (comme $\sqrt{\ln\big(\ln(n)\big)}$ dans la loi du logarithme itéré des Probabilités, pauvre Hélène), il nous paraît inutile de préciser le côté népérien. En variable complexe, on n'utilise jamais d'autre base que la base e des logarithmes népériens.

Un autre choix assumé est la place que nous avons donnée aux produits infinis dans le chapitre VII. D'une part, la notion est aussi naturelle que celle de série, tout en comportant quelques pièges qu'il convient d'éviter et qui sont décrits ici. D'autre part, la notion est d'une utilité fondamentale (produits de Blaschke, de Weierstrass, d'Euler) dans plusieurs domaines, tels que la théorie analytique des nombres. Enfin, la notion est souvent mal comprise par les étudiants. Nous espérons avoir réussi à la rendre accessible ici.

6. Les applications

Il s'agit là d'un des aspects du livre auquel nous tenons le plus. Notre fascination pour les fonctions holomorphes tient à ce que, avec un peu d'imagination, elles peuvent s'appliquer de façon totalement inattendue à quantité d'autres domaines : nous pensons par exemple au théorème de Kahane-Gleason-Zelazko sur les formes linéaires multiplicatives, traité en exercice au chapitre IX, ou au théorème de Fuglede sur les opérateurs normaux, traité au chapitre XII. Un autre livre (en anglais, et rédigé de manière très concise) de Lax et Zalcman (« Complex proofs of real theorems » University lecture Notes 58, AMS 2012) traite en quatre-vingt-dix pages de quelques applications des variables complexes. Certaines sont absentes de notre livre. Mais il en contient bien d'autres, qui font l'objet des cinq derniers chapitres (sans parler du chapitre V sur le théorème des résidus et ses applications à des calculs non triviaux d'intégrales ou de sommes de séries). Sans trop

entrer dans les détails ici, mentionnons par exemple :
▷ **1**. L'homéomorphie de deux ouverts simplement connexes du plan comme retombée du théorème de représentation conforme de Riemann, et l'approche par espaces de Hardy de l'inégalité isopérimétrique au chapitre VIII.
▷ **2**. L'identité d'Abel et les polynômes orthogonaux au chapitre IX.
▷ **3**. La théorie des nombres (algébriques, transcendants) au chapitre X.
▷ **4**. Les Probabilités (notamment le problème des moments et le principe d'incertitude) au chapitre XI.
▷ **5**. L'Analyse fonctionnelle au chapitre XII (avec les beaux théorèmes de Fuglede, von Neumann, Titchmarsh, ce dernier comme retombée des sous-espaces invariants de l'opérateur de Volterra).
▷ **6**. Les opérateurs à trace, les déterminants de Grothendieck, et le délicieux théorème de Lidskii « la trace est la somme des valeurs propres » au chapitre XIII.

7. Pour qui, pourquoi, ce livre ?

Ce livre s'adresse à tous les étudiants qui découvrent les fonctions d'une variable complexe, c'est-à-dire, les étudiants de troisième année de la *Licence de mathématiques* ($L3$, voire $L2$ selon les cursus), certains étudiants de la *Licence de physique* à la recherche d'une approche rigoureuse des nombres complexes dont ils feront amplement usage par la suite ou ceux du *Master de mathématiques* qui veulent approfondir les résultats fondateurs de la théorie en vue de l'étude ultérieure d'ouvrages plus avancés, soit vers des développements mathématiques plus récents (par exemple les « espaces de Banach de fonctions holomorphes »), soit vers l'utilisation en Physique ; par ses applications dans des domaines variés (Probabilités, Géométrie, Théorie des nombres, etc.), le livre nous paraît aussi particulièrement adapté aux *candidats à l'agrégation de mathématiques*, qui trouveront dans les cinq derniers chapitres de quoi alimenter leurs leçons d'oral d'Analyse.
Le présent texte est issu d'un polycopié de la faculté d'Orsay, écrit par les auteurs à destination d'étudiants salariés amenés à travailler seuls en s'appuyant aussi sur des exercices corrigés. Dans ce polycopié, le point de vue « polynômes » jouait un rôle essentiel. Il en est de même dans cet ouvrage.

8. Remerciements

Notre ami et éditeur Rached Mneimné nous a incités à rédiger et à développer ce polycopié, ce que nous avons fait ; nous le remercions chaleureusement pour ses encouragements amicaux, sa longue patience, ses fructueux

conseils, dont le moindre n'est pas de nous avoir recommandé de contacter Alain Debreil, dont nous parlons plus haut, pour les dessins !
Une mention spéciale doit être faite du travail de Bruno Calado, que certains qualifient de relecteur terrifiant, on pourrait aussi dire « terrific » au sens le plus louangeur du terme ! Avec une grande gentillesse, Bruno a accepté de nous aider de son immense culture et de son coup d'œil d'aigle, en relisant ligne à ligne l'intégralité du manuscrit et en faisant tous les exercices. Il a débusqué un nombre incroyable de coquilles, petites ou pas, et nous a permis des améliorations considérables du texte initial. Qu'il en soit très chaleureusement remercié ici.

Nous nous souvenons d'une phrase d'Adrien Douady dans la préface de son livre avec Régine Douady :
« Ses vagabondages mathématiques le ramèneront toujours aux nombres complexes. »
C'est un peu dans cet esprit que ce livre a été écrit.

H. et M. Queffélec

Lille, Février 2017

Table des matières

Introduction

1. Les nombres complexes et les prérequis xi
2. Des polynômes aux fonctions holomorphes xii
3. Les exercices corrigés xiii
4. Dessins xiii
5. Remarques techniques xiv
6. Les applications xiv
7. Pour qui, pourquoi, ce livre ? xv
8. Remerciements xv

I. Quelques rappels

1. Rappels de topologie du plan complexe. 1
   1.1. Ouverts de $\mathbb{C}$ 2
   1.2. Connexes de $\mathbb{C}$ 2
2. L'exponentielle complexe 4
   2.1. Définition 4
   2.2. L'exponentielle dans le champ réel 6
   2.3. L'exponentielle dans le champ complexe 6
   2.4. Module et argument d'un nombre complexe 9
   2.5. Vers le logarithme complexe 9
3. Rappels d'analyse de Fourier 10
4. Polynômes, fractions rationnelles 15
   4.1. Aspect algébrique des polynômes 15
      4.1.1. Polynômes de $k[X]$, k corps commutatif 17
      4.1.2. Polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ 17
   4.2. Relations coefficients-racines 19
   4.3. Formules de Newton et Waring 21
   4.4. Fractions rationnelles de $\mathbb{C}(X)$ 23
5. Exercices 24
6. Correction des exercices 26

II. Polynômes et séries entières
1. Aspect holomorphico-analytique des polynômes . . . 33
2. Zéros d'un polynôme non constant . . . 35
2.1. Théorème de d'Alembert-Gauss . . . 35
2.2. Théorème de Gauss-Lucas . . . 38
2.3. Formule de Jensen . . . 38
2.4. Mesure de Mahler et hauteur . . . 41
3. Formule d'interpolation de Lagrange . . . 45
3.1. Position du problème . . . 45
3.2. Applications de la formule de Lagrange . . . 46
3.2.1. Inégalité de Schur . . . 46
3.2.2. Inégalités de Bernstein et Markov . . . 48
4. Principe du maximum pour un polynôme . . . 50
5. Caractère analytique des séries entières . . . 53
5.1. Rappels . . . 53
5.2. Analyticité des sommes de séries entières . . . 54
6. Exercices . . . 57
7. Correction des exercices . . . 63

III. Fonctions holomorphes
1. Définitions et premières propriétés . . . 74
1.1. Définitions . . . 74
1.2. Premières propriétés . . . 75
1.3. L'exemple des fractions rationnelles . . . 76
1.4. Inversion et logarithme . . . 78
1.5. Une autre approche du logarithme . . . 79
2. Comparaison des points de vue . . . 81
2.1. Une première équivalence . . . 81
2.2. Le théorème fondamental . . . 82
3. Théorie de Cauchy . . . 83
3.1. Chemins et courbes . . . 83
3.2. Intégration le long d'une courbe . . . 85
3.3. Indice d'un point par rapport à une courbe . . . 86
4. Théorème de Cauchy . . . 93
4.1. Généralités . . . 93
4.2. Théorème de Cauchy pour un triangle . . . 93
4.3. Théorème de Cauchy pour un ouvert convexe . . . 95
4.4. Théorème de Cauchy local . . . 96
4.5. Inégalités de Cauchy . . . 100
5. Premières conséquences de l'identité $H(\Omega) = A(\Omega)$ . . . 102
5.1. Principe des zéros isolés . . . 102
5.2. Principe de prolongement des identités . . . 103

6. Principes du maximum 104
6.1. Cas des ouverts bornés 104
6.2. Lemme de Schwarz 105
6.3. Cas d'un ouvert quelconque 106
6.4. Principes de Phragmén-Lindelöf 108
6.4.1. Un premier énoncé 108
6.4.2. Un second énoncé 110
6.5. Une application importante 111
7. Exercices 112
8. Correction des exercices 116

IV. Théorème de Cauchy global
1. La notion de cycle 123
2. Un théorème fondamental de séparation 125
3. Théorème de Cauchy homologique 129
3.1. Cycles homologues à zéro 129
3.2. Un énoncé général 130
4. Développement de Laurent 131
5. Théorème de Runge 133
6. Homotopie et simple connexité 135
6.1. Chemins fermés homotopes 136
6.2. Ouvert simplement connexe 137
7. Propriétés globales des fonctions holomorphes 140
7.1. Premières conséquences 140
7.1.1. Propriété de moyenne 140
7.1.2. Existence d'une primitive 142
7.1.3. Existence du logarithme 143
7.1.4. Inversion holomorphe 143
7.1.5. Limites de fonctions holomorphes 145
7.2. Formule de Jensen et applications 146
8. Exercices 148
9. Correction des exercices 150

V. Théorème des résidus
1. Fonctions méromorphes 155
2. Théorème des résidus proprement dit 159
3. Des applications théoriques 161
3.1. Formule de Kronecker 162
3.2. Théorème de Rouché 162
3.3. Préservation de la non nullité 162

4. Applications aux calculs d'intégrales et de séries 163
4.1. Fraction rationnelle en $\sin t$ et $\cos t$ 163
4.2. Fraction rationnelle sans pôles réels 164
4.3. Transformée de Fourier d'une fraction rationnelle 165
4.4. Calcul d'une intégrale semi-convergente 167
4.5. Calcul d'une intégrale où intervient un logarithme 168
4.6. Utilisation de la $2i\pi$-périodicité de e^z 169
4.7. Calcul de sommes de séries 172
5. Exercices 175
6. Correction des exercices 179

VI. Propriétés des fonctions entières
1. Propriétés élémentaires de $\mathscr{E}$ 197
2. Le « petit » théorème de Picard 202
2.1. Le théorème de l'application ouverte de Bloch 202
2.1.1. Le cas des fonctions bornées 202
2.1.2. Le cas des fonctions quelconques 204
2.2. Fin de la preuve du théorème de Picard 205
2.3. Le cas des fonctions méromorphes 209
3. Équation de Guichard 210
3.1. Polynômes de Bernoulli 210
3.2. Solution générale de l'équation de Guichard 213
4. Exercices 215
5. Correction des exercices 218

VII. Produits infinis
1. Produits infinis numériques 225
1.1. Définitions 225
1.2. Un théorème fondamental 226
2. Produits infinis de fonctions 228
3. Les produits de Blaschke 228
4. Les produits de Weierstrass 231
4.1. Produits de Weierstrass généraux 231
4.2. Produits de Weierstrass sans exponentielles parasites . . . 235
4.3. Fonctions de Bessel 240
5. Le théorème de Mittag-Leffler 242
6. Les produits d'Euler 243
7. Exercices 245
8. Correction des exercices 250

VIII. Espaces de fonctions holomorphes, transformations conformes

1. L'espace de Fréchet $H(\Omega)$ 264
   1.1. Métrique complète sur $H(\Omega)$ 264
   1.2. Théorème des familles normales 265
2. Théorème de représentation conforme de Riemann 268
   2.1. Automorphismes du disque 268
   2.2. Le cas général 269
3. Espaces de Hilbert de fonctions analytiques 272
   3.1. Définition générale 272
   3.2. Noyau reproduisant 272
4. Exemples 274
   4.1. Espace de Hardy 274
   4.2. Espace de Bergman 278
   4.3. Espace de Dirichlet 286
5. Exercices 287
6. Correction des exercices 291

IX. Premières applications

1. Exponentielles-polynômes 303
2. Unicité de la transformée de Fourier 305
3. Rayon de convergence des séries de Taylor 306
4. Identité d'Abel 308
5. Polynômes orthogonaux 310
   5.1. Généralités 310
   5.2. Deux exemples 314
      5.2.1. Les polynômes de Legendre 314
      5.2.2. Les polynômes de Laguerre 317
6. Comportement au bord des séries entières 320
7. Matrice de Hilbert 321
8. Formule de réversion de Lagrange 324
9. Théorème de Müntz 327
10. Points extrémaux dans une algèbre de Banach 332
11. Exercices 334
12. Correction des exercices 336

X. Applications en Théorie des nombres
1. Irrationalité et transcendance 343
2. Polylogarithmes et Fonction ζ 344
3. Transcendance du nombre de Thue-Morse 352
3.1. Approximation diophantienne 352
3.2. Un théorème de Mahler 355
4. Fractions rationnelles dans $\mathbb{Q}(X)$ 359
5. Nombres de Pisot 362
5.1. Une classe remarquable de nombres algébriques 362
5.2. Un théorème de Salem 365
6. Exercices 368
7. Correction des exercices 372

XI. Applications en Probabilités
1. Indécomposabilité de la loi de Poisson 385
2. Problème des moments 387
3. Principe d'incertitude de Hardy-Heisenberg 390
4. Lois stables 393
5. Matrices aléatoires 399
5.1. Transformée de Stieltjes 399
5.2. Théorème de Lévy-Stieltjes 400
5.3. Loi de Wigner 402
6. Exercices 403
7. Correction des exercices 407

XII. Applications en Analyse fonctionnelle
1. Analogie 415
1.1. Un rappel 415
1.2. Analogie détaillée 416
2. Théorème de Fuglede 417
3. L'algèbre du disque 419
3.1. Les unimodulaires de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ 420
3.2. Génération convexe de la boule de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ 420
4. L'inégalité de von Neumann 422
5. Sous-espaces invariants du Volterra et application 425
5.1. Le théorème d'unicellularité 425
5.2. Théorème de Titchmarsh 429
6. Exercices 429
7. Correction des exercices 432

XIII. Théorème de Lidskii
1. Opérateurs à trace et norme nucléaire 437
1.1. Norme nucléaire en dimension finie 437
1.1.1. Un rappel 437
1.1.2. Une norme duale sur $\mathcal{L}(H)$ 438
1.2. Opérateurs à trace en dimension quelconque 439
1.2.1. Nombres d'approximation 440
1.2.2. L'idéal des opérateurs à trace 441
2. Puissances extérieures 445
2.1. Puissances tensorielles et extérieures d'un espace 445
2.2. Produit tensoriel et extérieur d'opérateurs 448
3. La formule de Lidskii et les déterminants de Grothendieck . . . 450
3.1. Le déterminant 451
3.2. La fonction entière caractéristique 454
3.3. Zéros de la fonction entière caractéristique 456
3.4. La conclusion 456
4. Exercices 457
5. Correction des exercices 459

Bibliographie **463**
Index **465**