TOUTE THEORIE EST ALGEBRIQUE ET TOPOLOGIQUE*

René Guitart

Résumé

We want to explain how any mathematical theory is committed to a pulsation between algebra and topology.
1) Our main aim is to show on one hand how *every theory is an algebraic one*, according to various notions of an algebraic theory, through *sketches* and up to *figurative algebras*, that is to say a question of equations between laws of composition of figures ; and on the other hand how *every theory is topological* or toposical (toposique), that is to say an expression of facts of continuity and a geometrical organisation of these facts (but this approach comes with an ambiguity). So we get insights into a possible construction of an *Algebraic Theory* similar to the *Algebraic Geometry* of Grothendieck.

It could be underlined also that on the way we prove two new facts which are essential to our analysis, one of a general nature, and the other which is a rather peculiar observation:
2.1) We lay stress on *figurative algebras*, and as a by-product we get that : every category of models is the full subcategory of a category of fractions of a category $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^{C}}$ generated by the representably representable objects.
2.2) We introduce axioms for an "end" operation (opération "bout") B on sequences on $[0,1]$ and we get : the continuity of a fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ is a strict algebraic fact, it is equivalent to the commutation $B \circ f^{\mathbb{N}} = f \circ B$, for $B : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ an everywhere defined *end* operation.

* *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.* XLIX-2 (2008), p. 83-128.

1 Introduction : figurations et bouts

Quand on parle de pulsation entre l'algèbre et la topologie, vient d'abord à l'esprit l'idée de *dualité* : il est considéré, en gros, que plus une catégorie $\mathcal{A}$ est algébrique, plus sa duale $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ est topologique, et réciproquement ; un théorème de dualité est une réalisation concrète de cette vue, qui établit une équivalence $\mathcal{T} \simeq \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, pour $\mathcal{T}$ une catégorie d'espaces et A une catégorie d'algèbres. On a deux théories distinctes, dont les modèles se correspondent mais dont les morphismes se renversent, et tout objet est pensé comme algébrique au sein de $\mathcal{A}$ et comme topologique au sein de $\mathcal{T}$.
Notamment, la plus basique des dualités est la dualité de Stone, et on peut pratiquement la prendre comme l'unique axiome pour construire les *univers algébriques* où toutes les structures peuvent se spécifier de façon équationnelle[29],[30] (voir ici la Proposition 9). Relevons aussi la possibilité de traiter Top en entier par dualité, avec notamment la construction de $\mathrm{Top}^{\mathrm{op}}$ comme quasi-variété[7].

Mais ici je veux surtout expliquer tout autre chose, à savoir comment une seule et même théorie, au demeurant quelconque, correspondant donc à une unique catégorie de modèles $\mathcal{M}$, peut être vue, simultanément, comme totalement algébrique *et* comme totalement topologique, et ce tant pour les objets que pour les morphismes.
Ce questionnement est l'approche d'un projet de *Théorie Algébrique* ou *Modélisation Algébrique*, qui consisterait — remplaçant les anneaux par les théories — à reprendre sur le thème du *Théorique* l'entreprise de *Géométrie Algébrique* conduite par Grothendieck sur le thème du *Géométrique*. Alors seulement l'analyse faite serait à relier à la question de la "dualité" ci-dessus évoquée, à la question des spectres et de leurs recollements, et au principe de la "topologie algébrique", du rapport fonctoriel entre catégories d'objets topologiques et catégories d'objets algébriques, recherche d'invariants.

Tout d'abord le second point du titre, qui se dit : "*toute théorie est topologique*", est essentiellement le sens de la construction fondamentale du topos classifiant d'une théorie ; ce sur quoi je ne reviens pas plus ici. Ce que je montrerai de général ici sera donc surtout la contre-partie (et la tension entre les deux parties), à savoir que "*toute théorie est* *algébrique*" — y compris la théorie nommée "topologie" — mais que cela est vrai topologiquement parlant, c'est-à-dire qu'il faut guider le dégagement de la structure algébrique de ladite théorie par des moyens topologiques et figuratifs. De plus l'algébricité stricte du topologique est bien réelle, mais peut se réaliser de plusieurs façons entre lesquelles règne une équivoque.

Chemin faisant, au cœur de cette analyse, je propose deux résultats intéressants pour eux-mêmes, le premier de portée large, et le second plus spécial. Ce sont :
a) L'introduction de la présentation des théories comme *figurations* sous la forme $Q : \mathrm{Ens}^S \to K$, et en conséquence le fait que toute catégorie de modèles est la sous-catégorie pleine d'une catégorie de fractions d'une catégorie $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^C}$ engendrée par les objets qui seront dits représentablement représentables.
b) L'axiomatisation d'une opération "bout" $B : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ sur les suites sur $[0,1]$, extension cohérente de l'opération de prise de la limite, l'expression de la continuité d'une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ comme un fait strictement algébrique, à savoir par la commutation $B \circ f^{\mathbb{N}} = f \circ B$.

Derrière ces résultats il y a en fait deux idées simples à retenir, qui permettent de voir comme algébrique toute théorie : d'une part la partie proprement combinatoire de ce qui est topologique peut être enkistée dans le jeu géométrique internes des arités d'une *figuration*, et d'autre part la partie proprement continue de ce qui est topologique peut être saisie donc par une opération *bout*, mais en fait cette opération n'est pas unique, et son choix relève d'une analyse d'équivoque topologique.

Dans le fond la question examinée ici est encore :

Comment est-il possible de croire que la topologie soit une théorie algébrique *?*

Et la réponse proposée est :

C'est possible en organisant et pensant topologiquement *l'accès à l'algébricité.*

2 L'algébricité et la localité

Pour Lagrange, le but de l'Algèbre "n'est pas de trouver les valeurs mêmes des quantités cherchées, mais le systèmes d'opérations à faire sur les quantités données pour en déduire les valeurs des quantités qu'on cherche, d'après les conditions du problème". Dans la suite, au début du XIXème siècle, Poinsot ou Serret affirment encore que "toute l'Algèbre se réduit, au fond, à l'analyse des équations". Une conception plus large se dégagera après la prise en compte des travaux de Galois, quand, suivant l'expression de Dirichlet, il faudra "substituer les idées aux calculs". Et cette exigence sera, progressivement jusqu'à nos jours, ressaisie par la mathématique comme objet, de sorte que l'on puisse in fine considérer que l'algèbre soit un *calcul des idées*, trouvant le système d'idées à faire opérer sur telle situation mathématique ...

George Peacock est probablement le premier, vers 1830, à réclamer explicitement et très-fermement le droit à l'"*arbitraire a priori*" dans le choix des axiomes des lois de compositions binaires, dans le cadre d'une algèbre symbolique générale des opérations. Il décrit[48] l'algèbre symbolique comme "la science qui traite les combinaisons de signes et symboles arbitraires par des moyens qui sont définis en raison de lois arbitraires". Pour le calcul général, Hankel affirme en 1867 l'importance de la pureté formelle, c'est-à-dire de l'indépendance par rapport à la "*substance des objets*". Whitehead[50], définit un *calcul* comme l'art de la manipulation de signes substitutifs suivant des règles fixées. Mais pour commencer il faut souligner cet événement que fut l'attitude de Peacock, attitude véritablement fondatrice de la théorie du *théorique opératoire* — alias le *calcul d'idées* — et marquant pour le coup un début de la recherche et du développement d'un sens mathématique précis pour l'expression : "toute théorie...".

Entre 1960 et 1970, les travaux de Lawvere[42], Bénabou[8], Chevalley, Ehresmann [21][23], Linton[43][44], Eilenberg et Moore[24], Gabriel et Ulmer[25], notamment, ont permis de comprendre l'idée de *théorie algébrique* — telle que manipulée d'abord par la théorie des modèles et l'algèbre universelle à la manière des Birkhoff, Tarski, etc., et disons, bien après Whitehead, Peirce, et quelques autres, telle qu'achevée dans le livre de 1965 de Cohn [14] — en des termes nouveaux, à savoir en termes de problèmes universels dans les catégories, ou encore en termes d'adjonctions. Les catégories avaient vu le jour dans l'esprit d'Eilenberg et Mac Lane vers 1942 — pour donner un sens à l'idée de *construction naturelle* en cohomologie de Čech — et la notion indispensable de foncteur adjoint avait été introduite par Kan en 1957, également pour un motif de topologie algébrique, notamment pour traduire la relation entre cylindre et espace des lacets. Lawvere[42] fut le premier à réinvestir systématiquement ces outils construits pour la topologie algébrique dans le champ de la théorie des théories et modèles. Les modèles d'une théorie algébrique s'avérèrent donc spécifiables — pour le dire maintenant en les termes "diagrammatiques" d'Ehresmann[21][23][19] — comme *réalisations* d'une *esquisse projective* σ_{proj}, c'est-à-dire comme les foncteurs R d'une catégorie petite (voire d'un petit graphe multiplicatif) S, dite base de l'esquisse σ_{proj}, vers la grosse catégorie Ens des ensembles, transformant certains cônes projectifs $p = (p_k : \Pi \to B_k)_{k\in K}$, avec K petite, spécifiés dans S, et dont la collection forme un ensemble P, en des limites projectives dans Ens. Ce qui fait que toute flèche $\omega : \Pi \to B$ de S devient, dans la réalisation R, une 'composition' ω_R dite 'en R'. Ce que l'on écrit ainsi :

$$R : S \to \text{Ens}, \quad \omega : \Pi \to B,$$

$$R(\Pi) \simeq \lim_{\substack{\leftarrow \\ k\in K}} R(B_k), \quad \omega_R = R\omega.(\simeq^{-1}) : \lim_{\substack{\leftarrow \\ k\in K}} R(B_k) \to R(B).$$

Ainsi par $\omega_R = R\omega.(\simeq^{-1})$ des éléments $x_k \in R(B_k)$, $k \in K$, dits donc de types B_k, supposés compatibles entre eux c'est-à-dire bien agencés — soit tels que pour toute flèche $t : B_k \to B_{k'}$ dans S on a $x_{k'} = R(t)(x_k)$ –, peuvent être "composés" pour former un élément x de type B, ce qui est noté :

$$\omega_R((x_k)_{k\in K}) = x.$$

Et bien sûr, très particulièrement, on rencontre la situation élémentaire d'origine : lorsque K est un ensemble à deux éléments vu comme catégorie discrète, disons $K = \{1, 2\}$, alors il n'y a pas de condition de compatibilité, et $\omega_R((x_k)_{k\in\{1,2\}}) = x$ est noté simplement

$$x_1 ._\omega x_2 = x.$$

Formellement, l'esquisse est donc le couple $\sigma_{\text{proj}} = (S, P)$, où S est sa base et où P est l'ensemble de cônes projectifs p qui y sont spécifiés. Une catégorie est dite *algébrique au sens des esquisses* ou *projectivement esquissable* si elle est équivalente à la catégorie, notée

$$\text{Real}(\sigma_{\text{proj}}) = \text{Ens}^{\sigma_{\text{proj}}},$$

des réalisations d'une esquisse projective σ_{proj}. Au plan technique, on insiste dans la définition sur la question de *taille*, soit le fait que S et les K et la collection P des p sont petites (c'est-à-dire des ensembles) ; sinon, on parle à la rigueur de "grosse" esquisse projective.

Il est intéressant alors pour notre unification ici de souligner qu'en 1952 Ehresmann proposait une définition des *structures locales* de la forme suivante[20] : Une *espèce de structure locale* W est une espèce de structure telle que pour toute structure s sur un ensemble E, $s \in W(E)$, il existe une *structure induite* sur certaines de ses parties, ces parties formant les ouverts d'une topologie, les inductions étant transitives, et avec l'*axiome du recollement* : si $E = \cup_{i \in I} E_i$ et si pour tout $i \in I$ on a une structure s_i sur E_i telles que $E_i \cap E_j$ soit ouvert dans E_i et E_j et que les structures induites de s_i et s_j sur $E_i \cap E_j$ soient identiques, alors il existe sur E une unique structure

$$\int_{i \in I} s_i = s$$

dont les E_i soient des ouverts et induisant les s_i. On ne peut que rapprocher ces formulations $\int_{i \in I} s_i = s$ des précédentes $\omega_R((x_k)_{k \in K}) = x$.

Proposition 1 [36] *Les spécifications de structures locales et celles de lois algébriques, soit d'un côté l'induction du local au global et le recollement et de l'autre côté la concaténation et la multiplication, sont de même nature, car ce sont deux cas particuliers de l'idée d'esquisse projective.*

$\triangleright$ Un cas important est donc celui d'une théorie de Lawvere, c'est-à-dire celui d'une théorie algébrique unisorte à arités finies — spécifiable donc par une esquisse projective de catégorie S où, avec un objet particulier $\star$, ne sont spécifiés que des cônes projectifs finis discrets destinés à décrire, pour toute réalisation R, des puissances n-ièmes finies quelconques de l'ensemble $R(\star) = X$, et où tout objet est sommet d'un tel cône, et noté $\star^n$, et ceci de sorte donc qu'une réalisation soit décrit par un ensemble X et des opérations $R\omega$ sur X d'arités les n finis, associées aux flèches $\star^n \xrightarrow{\omega} \star$ dans S, ce qui est noté :

$$R : S \to \text{Ens}, \quad \omega : \star^n \to \star,$$

$$R(\star) = X, \;\; R(\star^n) \simeq R(\star)^n, \quad \omega_R = R\omega.(\simeq^{-1}) : X^n \to X,$$

les opérations $R\omega$ ou ω_R, ou simplement notées ω_X, étant soumises aux équations données par les diagrammes commutatifs de S. La spécification sur un ensemble d'une ou plusieurs lois binaires $\cdot_\omega$ envisagée ci-dessus rentre dans ce cas. On obtient ainsi les structures algébriques usuelles : monoïdes, groupes, anneaux. En revanche, les corps ne sont pas même projectivement esquissables, à cause de l'opération d'inversion qui n'est pas définie sur l'élément 0.

Proposition 2 [42] *Pour toute théorie équationnelle* (Ω, Φ) *spécifiée par un domaine d'opérateurs* Ω *et par un ensemble* Φ *de relations de définition équationnelles, il existe une esquisse projective* $\tau(\Omega, \Phi)$ *telle que les algèbres de* (Ω, Φ) *soient les réalisations de* $\tau(\Omega, \Phi)$ *:*

$$\text{Alg}(\Omega, \Phi) \simeq \text{Ens}^{\tau(\Omega,\Phi)}.$$

Les théories de Bénabou sont plus générales que celles de Lawvere, admettant une famille $(\star_t)_{t\in T}$ de types d'objets, et les spécifications de produits $\prod_{i\in I} \star_{t(i)}{}^{n(i)}$ pour des fonctions $t : I \to T$. Il s'agit donc des esquisses projectives où les cônes spécifiés sont discrets. On décrit donc ainsi les algèbres multisortes à lois partout définies. Du point de vue des arités, elles ne sont plus de simples entiers, et Bénabou les rapporte à un calcul d'entiers "non-associatifs". On écrit encore $\tau(\Omega, \Phi)$ les esquisses projectives en question, quoique maintenant on autorise dans Ω des types ou sortes diverses, et des arités hétérogènes quelconques.

$\triangleright$ Un autre cas important est constitué par la théorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique. Par exemple, si X est un espace topologique et si $\Phi = (U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X, on forme une catégorie $I^{(2)}$ dont l'ensemble des objets est $I \cup I^2$, et où, pour tout

(i_1, i_2), l'on met deux flèches $(i_1, i_2) \to i_1$ et $(i_1, i_2) \to i_2$. Dans le dual $\mathrm{Ouv}(X)^{\mathrm{op}}$ de l'ensemble ordonné par inclusion $\mathrm{Ouv}(X)$ des ouverts de X, on considère le diagramme $\Phi^{(2)} = (U_w)_{w \in I^{(2)}}$ donné par $U_i = U_i$ et $U_{(i_1,i_2)} = U_{i_1} \cap U_{i_2}$. Il forme la base d'un cône projectif p_Φ de sommet $\cup_{i \in I} U_i$. Associée à l'espace X, on détermine donc une esquisse projective notée $\omega(X) = (\mathrm{Ouv}(X)^{\mathrm{op}}, \{p_\Phi; I \subset \mathcal{P}(X)\})$.

Un faisceau F sur X est alors une réalisation de l'esquisse projective $\omega(X)$, soit un foncteur $F : \mathrm{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ tel que, pour toute famille d'ouverts Φ, avec disons $\cup_{i \in I} U_i = W$, et donc $\cup_{w \in I^{(2)}} U_w = W$, on ait

$$F(\cup_{i \in I} U_i) \simeq \lim_{\leftarrow \, w \in I^{(2)}} F(U_w),$$

ce que l'on nomme la condition de "recollement des données locales" ; soit, pour le spécifier à la façon des esquisses projectives, en parallèle au cas ci-avant des théories de Lawvere :

$$F : \mathrm{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, \quad Id : \cup_{i \in I} U_i = W,$$

$$F(W) \simeq \lim_{\leftarrow \, w \in I^{(2)}} F(U_w), \quad F(Id).(\simeq^{-1}) : \lim_{\leftarrow \, w \in I^{(2)}} F(U_w) \simeq F(W).$$

On a donc :

Proposition 3 [folklore] *Pour tout espace topologique X on a*

$$\mathrm{Fais}(X) \simeq \mathrm{Ens}^{\omega(X)}.$$

Á l'origine, la notion de faisceau est due à Leray, qui la formulait un peu différemment de ce que nous venons d'énoncer. Grothendieck a élargi cette notion en remplaçant les espaces topologiques par les topologies J sur un site S, dites depuis "topologies de Grothendieck" $X = (S, J)$, construisant de même les catégories de faisceaux sur ces sites, $\mathrm{Fais}(X)$. Les esquisses correspondantes, analogues aux $\omega(X)$ données ci-dessus pour X espace topologique, seront notées encore $\omega(X)$, avec maintenant X une topologie de Grothendieck.

Puis, en mélant les cas à la Lawvere-Bénabou et les cas à la Leray-Grothendieck — qui sont en quelque sorte les deux extrêmes de l'idée unifiante d'esquisse projective –, le premier ayant un minimum de limites projectives, le second ayant un minimum de lois, on obtient, comme exemple nouveau, le cas de la théorie des faisceaux d'un type de structure algébrique déterminé sur un site déterminé, dont l'esquisse s'écrit

$$\omega(X) \otimes \tau(\Omega, \Phi),$$

et l'on est alors dans le cadre algébrique de base suffisamment souple pour les développements de la géométrie algébrique à la manière de Grothendieck. Nous laissons en exercice au lecteur de préciser si toute esquisse projective σ_{proj} a pour modèles dans Ens les modèles d'une esquisse composée $\omega(X) \otimes \tau(\Omega, \Phi)$, c'est-à-dire de dire si

$$\text{Ens}^{\sigma_{\text{proj}}} \sim \text{Ens}^{\omega(X)\otimes\tau(\Omega,\Phi)}.$$

En fait, pour la géométrie algébrique, il y a un autre outil indispensable, qui rend manipulable comme objet mathématique l'idée de variété, c'est le calcul des *pro-objets*, les pro-objets dans une catégorie donnée $\mathcal{C}$ étant des diagrammes filtrants d'objets de $\mathcal{C}$, et donc une traduction diagrammatique de l'idée de variété comme recollement d'objets simples. Il importe de voir la différence entre l'introduction des faisceaux, qui traite algébriquement des effets de la localisation, et les pro-objets qui exhibent un état non-algébrique de dispersion. Et j'énoncerai :

Proposition 4 [méthode grothendieckienne — point 1] *Le développement de la géométrie algébrique dans ses ressources fonctorielles commence en rendant usuelles et courantes les catégories du type*

$$[\text{pro} - (\text{Ens}_{\text{fin}}{}^{\tau(\Omega,\Phi)})]^{\omega(X)}$$

soit des catégories de faisceaux d'algèbres pro-finis.

En réalité cette méthode est plus complexe, et comporte, notamment avec les *champs*, le passage à une deuxième dimension. On peut alors suggérer, en complément à la question ci-avant sur la composition tensorielle $\omega(X) \otimes \tau(\Omega, \Phi)$, que l'ajout à ces esquisses-là de l'usage des pro-objets soit suffisant pour 'tout' décrire ; autrement dit demander si la méthode grothendieckienne est complète. Ce n'est pas impossible, car le calcul des pro-objets déborde le cadre du strictement algébrique :

on doit plutôt le rattacher au calcul des *esquisses mixtes* et *esquisses concrètes* que nous envisageons plus loin. Et comme on sait qu'avec les esquisses mixtes grosses on peut décrire toutes les catégories dont les idempotents scindent, la question sur la complétude de la méthode n'est pas déraisonnable. Il s'agirait en détail de construire les esquisses mixtes dont les réalisations soient les catégories du genre des catégories $[\mathrm{pro}-(\mathrm{Ens_{fin}}^{\tau(\Omega,\Phi)})]^{\omega(X)}$ ou du moins du genre $[\mathrm{Proj}(\mathrm{Ens}^{\tau(\Omega,\Phi)})]^{\omega(X)}$, et surtout, réciproquement, de représenter ainsi les catégories de modèles d'esquisses mixtes a priori quelconques. Autrement dit, *il faudrait donc comparer systématiquement la théorie des esquisses mixtes et la théorie des schémas.*

Mais, si l'on reste encore un moment au stade des esquisses projectives, le théorème-clé est celui-ci, bien connu aujourd'hui, et dont on trouve des équivalents en termes de complétions chez Ehresmann[22] :

Proposition 5 *Le foncteur d'inclusion canonique* $\mathrm{Cano_{proj}}$ *de* $\mathrm{Ens}^{\sigma_{\mathrm{proj}}}$ *dans* Ens^S *admet un adjoint à gauche* L *:*

$$(L : \mathrm{Ens}^S \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\sigma_{\mathrm{proj}}}) \ \dashv \ (\mathrm{Cano_{proj}} : \mathrm{Ens}^{\sigma_{\mathrm{proj}}} \longrightarrow \mathrm{Ens}^S),$$

ce qui signifie que, naturellement en R *et en* X*, on a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^{\sigma_{\mathrm{proj}}}}(L(X), R) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^S}(X, \mathrm{Cano_{proj}}(R)).$$

Ce théorème, dans le cas des théories de Lawvere, revient au théorème de construction des algèbres libres, et, dans le cas des faisceaux de Grothendieck, est le théorème du faisceau associé à un préfaisceau. Au stade des esquisses mixtes ou des pro-objets, la clé sera le théorème d'existence de petits diagrammes localement libres ; nous y revenons tantôt.

Le recours à Ens — bâtie sur la donnée d'un univers ou modèle de la théorie des ensembles de Zermelo-Fränkel — comme sémantique i.e. comme réceptacle universel des théories, comme lieu des supports des modèles, n'a rien de nécessaire a priori. Car on peut considérer, au lieu des réalisations $R : (S, P) \longrightarrow \mathrm{Ens}$, des $R : (S, P) \longrightarrow (S', P')$, réalisations entre esquisses projectives, soit des foncteurs $R : S \longrightarrow S'$ tels que

$$\forall p \ (p \in P \Rightarrow R \circ p \in P').$$

Ehresmann s'était d'emblée placé sur ce terrain — y compris d'ailleurs pour les esquisses mixtes. De telles réalisations sont vues comme des modèles d'une esquisse dans une autre. Du reste c'est ce désengagement de la version ensembliste de la question qui permet librement de concevoir la question de la construction du *type* d'une esquisse, c'est-à-dire du développement propre des preuves dans une esquisse donnée. Le cours de troisième cycle d'Ehresmann en 1968 — auquel j'assistais, en compagnie d'Albert et Élisabeth Burroni et de Christian Lair, notamment — développait cette perspective.

On arrive ainsi à une conception purement diagrammatique des théories *et* des modèles *et* des preuves. Au point que ne sont plus nécessaires dans leurs détails ni la théorie des ensembles comme fond, ni la logique du premier ordre comme régime démonstratif. Ce sont les cônes qui remplacent les formules, et les enchaînements de factorisations dans des diagrammes sont les démonstrations. On appréciera le déplacement de la question de l'*algébricité*, depuis l'*équationnel formel* de Peacock — avant la théorie des ensembles bien sûr–, via l'*algèbre universelle ensembliste* de Tarski, et jusqu'au *diagrammatique pur* d'Ehresmann — déjà dans l'après coup de l'ensemblisme.

Proposition 6 *Le point de vue ehresmannien des esquisses permet la suspension de la question d'une sémantique ensembliste de référence, et ouvre la possibilité d'une théorie purement diagrammatique des modèles et preuves.*

De plus, à côté de ce qui s'unifie ainsi en terme d'esquisses projectives et très-diagrammatiquement, nous savions aussi, à la fin des années 1960 — en particulier par les travaux d'Eilenberg et Moore[24] et de Linton[43][44] — qu'une théorie algébrique unisorte, d'arités non nécessairement finies, se trouve spécifiable aussi par la donnée d'une *monade* $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ sur Ens — c'est-à-dire d'un foncteur $T : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}$ équipé de deux transformations naturelles $\eta : Id \to T$, l'unité, et $\mu : TT \to T$, la multiplication, avec $\mu.\eta_T = Id_T = \mu.T\eta$ et $\mu.T\mu = \mu.\mu_T$ — de sorte que chaque modèle apparaissant comme une *algèbre* (X, θ) de la monade $\mathbb{T}$, c'est-à-dire la donnée d'un ensemble *support* X et d'une *loi* θ satisfaisant à deux équations :

$$\theta : TX \to X, \quad \theta.\eta_X = Id_X, \;\; \theta.T\theta = \theta.\mu_X.$$

Une catégorie est dite *algébrique au sens des monades* si elle est équivalente à la catégorie des algèbres d'une monade T sur Ens, notée

$$\mathrm{Alg}(\mathrm{T}) = \mathrm{Ens}^{\mathrm{T}}.$$

En réalité TX équipé de μ_X est le modèle libre engendré par X de la théorie définie par T, soit l'algèbre des termes de la théorie à constantes dans X. Autrement dit, le point de vue des monades consiste certes à se limiter au cas unisorte, mais aussi à ne retenir primitivement, dans les théories projectivement esquissables, que le fait de l'existence de l'adjonction $F \dashv \mathrm{Cano}_{\mathrm{proj}}$. Du coup, nombre de situations qui ne sont atteignables que par grosses esquisses projectives peuvent être directement considérées. On peut spécifier une théorie en indiquant par avance ce que l'on veut avoir comme structures libres de ladite théorie, charge à nous ensuite d'en analyser diagrammatiquement la composition. Donc $LX = (TX, \mu_X)$ définit un foncteur $L : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Alg}(\mathrm{T})$ adjoint à gauche au foncteur d'oubli $U : \mathrm{Alg}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathrm{Ens}$ défini par $U(X, \theta) = X$. Si l'on écrit T comme limite inductive de foncteurs représentables, soit $T \simeq \lim_{\to(\alpha;j))} \mathrm{Hom}(\alpha, -)$ ou $TX \simeq \lim_{\to(\alpha;j))} X^{\alpha}$, avec $j : \mathrm{Hom}(\alpha, -) \to T$ transformation naturelle, alors, avec $R(\star) = X$, on retrouve les opérations ω_R d'arités les α sous la forme

$$\omega_R = \theta.j_X : X^{\alpha} \xrightarrow{j_X} TX \xrightarrow{\theta} X.$$

Et dans l'autre sens, θ est la 'réunion' de toutes les lois $R\omega$ en une seule flèche. La beauté de ce procédé synthétique réside alors dans le fait qu'en réunissant ainsi les lois $R\omega$, on réunisse aussi, spontanément, toutes les équations que l'on aura imposées dans la définition de la théorie fixée, et que cela s'exprimera toujours sous la forme canonique : $\theta.\eta_X = Id_X$ et $\theta.T\theta = \theta.\mu_X$.

Si dans ce procédé il est possible de se limiter à des $\alpha = n$ finis, on dit que la monade est de rang fini, et l'algébricité correspondante équivaut à celle par une théorie de Lawvere. On a alors une parfaite coïncidence entre l'équationnalité et l'existence de structures libres. On observera bien que, quand on part d'une théorie de Lawvere de base S, évidemment, la monade associée $\mathbb{T}$ change avec la nature de S, mais les deux équations d'algèbre ne changent pas de forme quand S change — tout en prenant dans chaque cas la signification algébrique de la circonstance. En ce sens on peut dire qu'elles constituent un *f*ormat *i*ntrinsèque *s*ynthétique de la *s*pécification *a*lgébrique (ou *fissa*, de l'argot "faire fissa" : faire vite. En arabe *fissa* signifie : "à l'heure même"). Et ces deux axiomes du fissa des T-algèbres sont en effet une *unitarité* et une *associativité*, ce qui permet de comprendre, comme le soutiennent plusieurs, dont Bénabou et Burroni, que *tout est monoïde.*

Proposition 7 *L'idée des monades de présenter une théorie par le système de ses modèles libres, ramène la conception de toute théorie algébrique à la simple idée de monoïde, et la notion d'algèbre de monade constitue un* fissa *ou* format intrinsèque de la spécification algébrique.

Lorsque $\mathbb{T}$ n'est pas de rang fini, on peut encore décrire la théorie par une esquisse projective petite si l'on peut se limiter à des ordinaux α tels que $\alpha < \rho$, c'est-à-dire si $\mathbb{T}$ est de rang $< \rho$. Mais il existe de nombreuses monades sans rang limité, et dans ces cas là il faudrait en effet des esquisses projectives grosses.

Un bel exemple, construit par Manes, est la théorie des compacts :

Proposition 8 [47] *Les algèbres de $\mathcal{U}$ la monade des ultrafiltres sur* Ens *sont les espaces topologiques compacts, et ainsi la théorie des compacts est algébrique au sens des monades.*

Ainsi, si X est un espace compact, se trouve définie $\theta : \mathcal{U}X \to X$ en posant $\theta(W) = \lim W$, pour tout ultrafiltre W sur X. On trouve les opérations correspondantes $\lambda_U : X^A \to X$ d'arité un ensemble A, en considérant, pour chaque ultrafiltre U sur A, et, pour chaque fonction $f : A \to X$, l'ultrafiltre $f(U)$ sur X image de U, puis en posant

$$\lambda_U(f) = \theta(f(U)).$$

L''union' de ces opérations, lorsque A et U varient, redonne θ.

Un autre exemple, plus fondamental encore je pense, est celui de la monade notée $\Pi = (2^{2^{(-)}}, \eta, 2^{\eta_{2^-}})$, dont d'ailleurs la monade des parties $\mathcal{P}$ et la monade des ultrafiltres $\mathcal{U}$ sont en fait deux sous-monades. Les propriétés formelles de cette monade m'ont conduit, entre 1970 et 1976, à l'introduction des *univers algébriques*[31], un cadre équationnel pour la topologie générale comme calcul des relations continues. Comme exemple d'univers algébriques nous avons les ensembles, les ensembles flous, et n'importe quel topos.

En fait $\mathcal{U}$ est une sous-monade de Π. On peut considérer $\mathcal{U}$ comme associée à une *monade virtuelle* — notion que j'ai détaillée jadis — de la forme $\Pi[\rho] = (2^{2^{(-)}}, \eta, \mu = 2^{\eta_{2^-}}, \rho)$, avec $\rho_X : \Pi(X) \to \Pi(X)$ des idempotents, de sorte que les $\mathcal{U}$-algèbres s'identifient aux algèbres de $\Pi[\rho]$, qui sont les (X, λ) avec $\lambda : \Pi(X) = 2^{2^X} \to X$ satisfaisant

$$\lambda.\rho_X = \lambda, \quad \lambda.\eta = \lambda, \quad \lambda.\Pi(\lambda).\rho_{\Pi(X)}.\Pi(\rho_X) = \lambda.\mu_X.\rho_{\Pi(X)}.\Pi(\rho_X).$$

Clairement, ici, comme Π est une vraie monade, la monade virtuelle $\Pi[\rho]$ détermine une monade sur la complétion idempotente de Ens, d'où la vraie monade $\mathcal{U}$, avec $\mathcal{U}(X) = \mathrm{Im}(\rho_X)$.

Proposition 9 [29][30][31] *Dans l'univers algébrique des ensembles sont équationnelles, et donc 'algébriques', la topologie, et notamment la notion d'espace compact, ainsi que toutes les théories du premier ordre.*

Mais n'oublions pas d'ajouter, pour les monades et leurs algèbres, que tout est formulable, et effectivement formulé par les inventeurs, en fait d'emblée *de façon relative à une catégorie quelconque* C servant de base, au lieu de Ens : une *monade* sur C est un foncteur $T : C \to C$, deux transformations naturelles, etc., une T-algèbre est un objet $X \in C$, etc. la catégorie des T-algèbres est notée $\mathrm{Alg}(\mathrm{T})$ et aussi C^{T}, et encore, puisque ce sont Eilenberg et Moore qui l'on introduite, $\mathrm{EM}(\mathrm{T})$. Alors $LX = (TX, \mu_X)$ définit un foncteur $L : C \longrightarrow \mathrm{Alg}(\mathrm{T})$ adjoint à gauche au foncteur d'oubli $U : \mathrm{Alg}(\mathrm{T}) \longrightarrow C$ défini par $U(X, \theta) = X$. Si l'on note $\mathrm{Alg}(\mathrm{T})_L$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Alg}(\mathrm{T})$ par laquelle L factorise — catégorie considérée par Kleisli, et souvent noté aussi $\mathrm{Kl}(\mathrm{T})$— et si $\grave{L} : C \to \mathrm{Alg}(\mathrm{T})_L$ est la factorisation en question, définie donc par L, la donnée d'une algèbre équivaut— d'après Linton[43][44] — à celle d'un (X, A) où $A : \mathrm{Alg}(\mathbb{T})_L{}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est un foncteur tel que

$$A \circ \grave{} L^{\mathrm{op}} = \mathrm{Hom}_C(-, X).$$

En notant $\bar{1}_{TX} : LTX \to LX$ le morphisme d'algèbres libres déterminé par l'identité $1_{TX} : TX \to TX$, on retrouve la loi $\theta : TX \to X$ par : $\theta = A(\bar{1}_{TX})(1_X)$. Aussi le point de vue des monades est non seulement un fissa (cf. Prop. 7), mais, mieux, est un *fissa relatif.*

À la suite des *relational algebra* de Barr[6], Burroni a, vers 1971, élargi la veine indiquée ci-avant des théories vues en termes de monades, en complétant l'idée d'algèbre d'une monade $\mathbb{T}$ par celle de $\mathbb{T}$-*catégorie*[11]. Cela lui permettait d'obtenir, avec la monade de Manes des ultrafiltres décrivant les espaces compacts, une description des topologies, en l'occurrence comme $\mathcal{U}$-catégories.

Proposition 10 [6][11] *Les espaces topologiques sont des $\mathcal{U}$-algèbres relationnelles. Les espaces topologiques sont des $\mathcal{U}$-catégories.*

Une $\mathbb{T}$-*catégorie* est d'abord un $\mathbb{T}$-*graphe*, soit la donnée

$$TX \xleftarrow{a} \pi \xrightarrow{b} X$$

— une $\mathbb{T}$-algèbre correspondant au cas où $a = 1_{TX}$ et $b = \theta$ — soumis à des 'analogues' des équations caractérisant les $\mathbb{T}$-algèbres.
En fait on peut remarquer qu'un $\mathbb{T}$-graphe détermine un graphe dans les algèbres libres de $\mathbb{T}$, soit dans $\mathrm{Alg}(\mathbb{T})_L$, soit

$$(TX, \mu_X) \xleftarrow{\mu_X.Ta} (T\pi, \mu_\pi) \xrightarrow{Tb} (TX, \mu_X)$$

et, a fortiori il s'agit d'un graphe dans les algèbres de $\mathbb{T}$, soit un élément de $Alg(\mathbb{T})^{(\rightrightarrows)}$.

On serait donc conduit à étudier, en parallèle avec les $\mathbb{T}$-catégories, les graphes dans $Alg(\mathbb{T})$, soit la catégorie $Alg(\mathbb{T})^{(\rightrightarrows)}$, puis les catégories dans $Alg(\mathbb{T})$, soit la catégorie $Alg(T)^{\sigma_{\mathrm{Cat}}}$, où σ_{Cat} est l'esquisse projective de la structure de catégorie. Burroni n'a pas développé les choses dans cette direction, bien que, plus tard, le lien entre les monades et les graphes l'ait bien inspiré — mais en quelque sorte dans le sens inverse — dans ses études sur les algèbres graphiques [12] et l'algébricité au-dessus des graphes, c'est-à-dire dans la considération des catégories du type $(\mathrm{Ens}^{(\rightrightarrows)})^{\mathrm{T}'}$, pour T' une monade sur $\mathrm{Ens}^{(\rightrightarrows)} = \mathrm{Graph}$. Il est alors ici trivial mais utile de préciser qu'évidemment pour toute monade T sur Ens il existe une monade T' sur $\mathrm{Ens}^{(\rightrightarrows)}$ telle que

$$Alg(\mathrm{T})^{(\rightrightarrows)} \simeq (\mathrm{Ens}^{(\rightrightarrows)})^{\mathrm{T}'}.$$

Le croisement ainsi suggéré entre T-catégories et algèbres graphiques pourrait être approfondi, spécialement pour la monade $\mathcal{U}$ des ultrafiltres. Dans le cas de $\mathrm{T} = \mathcal{U}$ cela donne, grâce aux Prop.8 et Prop.10 :

Proposition 11 Top *se plonge dans la catégorie des graphes compacts qui est algébrique au sens des monades sur la catégorie des graphes, d'où un foncteur canonique*

$$\mathrm{Top} \to \mathrm{Graph}\,.$$

Une suggestion complémentaire ici serait de reconsidérer le fait que $\mathcal{U}$ soit une sous-monade de Π. De même les $\mathcal{U}$-catégories sont déterminables comme des Π-graphes satisfaisant certaines équations dans $\Pi[\rho]$. Mais ce sont aussi des graphes dans $(Alg^{\Pi}) \simeq \mathrm{Ens}^{\mathrm{op}}$. De la sorte on arriverait à un plongement plein de Top, catégorie des espaces topologiques, dans la catégorie $\mathrm{Graph}^{\mathrm{op}}$, elle-même algébrique sur Graph ...

Et, nonobstant la question de la détermination algébrique des topologies, le simple rapport entre les Π-catégories et les co-catégories serait à étudier. On sait qu'une catégorie et la catégorie duale ne peuvent être toutes deux petitement projectivement esquissables que s'il s'agit d'un treillis complet. Ainsi Ens étant projectivement esquissable, $\mathrm{Ens}^{\mathrm{op}}$ ne l'est pas. Associée aux *univers algébriques*, la notion de Π-*esquisse mixte* où, en sus de cônes projectifs et inductifs sont spécifiés des constructeurs d'objets jouant le rôle des $\Pi(X)$, rémédie à cette limitation.

3 Esquisses mixtes, schémas, figurations.

Maintenant — pour continuer à comprendre l'algébricité de la topologie —- nous devons élargir tant le point de vue des esquisses projectives que le point de vue des monades ; les *esquisses mixtes* et les *figurations* auxquelles on arrivera, peut-être trop générales pour mériter la spécificité du terme 'algébrique', constitueront bien en revanche la position mathématique en surplomb nécessaire pour interroger l'algébricité des situations. Une sorte de point de vue algébrique sur la question de l'algébricité..., un contexte algébrique dans lequel il reste à chercher la frontière entre l'algébrique et le non-algébrique — notamment aux alentours de la procédure grothendieckienne pour la Géométrie Algébrique.

À la fin des années 70, Christian Lair et moi-même — prolongeant des travaux d'Andreka et Németi[5] et de Diers[17] — avons montré que

Proposition 12 [38] *Les théories du premier ordre se décrivent en terme d'*esquisses mixtes.

Suivant la définition originelle d'Ehresmann, qui donnait notamment l'exemple de l'esquisse mixte de corps, une *esquisse mixte* s'obtient en ajoutant à une esquisse projective petite un ensemble I de spécifications dans S de cônes inductifs $(q_l : C_l \to \Sigma)_{l\in L}$, avec L petite, à transformer par les réalisations en limites inductives dans Ens, ce que l'on écrit :

$$R : S \to \mathrm{Ens}, \quad \lim_{\to\, l\in L} R(C_l) \simeq R(\Sigma).$$

Formellement, l'esquisse mixte est la donnée $\sigma = ((S, P), I) = (\sigma_{\mathrm{proj}}, I)$, où $(S, P) = \sigma_{\mathrm{proj}}$ est la composante projective de σ et où I est l'ensemble des cônes inductifs spécifiés dans la base S. Au plan technique, on insiste encore sur la question de *taille*. Une catégorie est *mixtement esquissable* si elle est équivalente à la catégorie des réalisations d'une esquisse mixte σ, catégorie notée

$$\mathrm{Real}(\sigma) = \mathrm{Ens}^{\sigma}.$$

Cette notion d'esquisse mixte paraît naturelle à quiconque a réalisé que, naturellement justement, de nombreux énoncés mathématiques signifient directement qu'une certaine limite inductive est isomorphe à une certaine limite projective, soit quelque chose que l'on note, à partir de données cohérentes de morphismes $m_{k,l} : C_l \to B_k$, en cette manière :

$$\lim_{\to\, l\in L} C_l \overset{\simeq}{\to} \lim_{\leftarrow\, k\in K} B_k.$$

Ainsi en est-il d'un énoncé comme : le collage de deux segments par leurs extrémités est topologiquement isomorphe au sous-ensemble du plan cartésien défini par l'équation $x^2 + y^2 = 1$. Les esquisses mixtes permettent de manipuler et tirer profit directement de tels énoncés, sans les traduire en termes logiques traditionnels, comme dit en Prop.12.

Proposition 13 [10] *On peut construire une esquisse mixte "grosse" de la structure d'espace topologique.*

Ce résultat de Burroni m'a frappé à l'époque, en 1970, et certainement, plus tard, il m'a motivé vers les esquisses mixtes. Et ce d'autant plus qu'il ne s'agissait pas d'un exemple isolé, mais que cela relevait du dégagement d'une méthode, qu'il appelait la *typification*, et qui consistait à décrire les foncteurs T utiles à la description de structures, comme par exemple le foncteur T d'une monade sur Ens, et notamment le foncteur $\mathcal{U}$ (cf. Prop. 8, Prop. 10), comme limite inductive de représentables (théorème de Yoneda-Grothendieck) et à inclure cette description dans l'esquisse.

On note Proj($\mathcal{C}$) la catégories des *proj-objets* dans $\mathcal{C}$ définie de même que la catégorie pro $-\mathcal{C}$ des pro-objets de $\mathcal{C}$, sauf qu'on enlève la condition que les indexations soient des catégories filtrantes. Un objet de Proj($\mathcal{C}$) est un petit diagramme dans $\mathcal{C}$, disons $(X_i)_{i\in I}$, et

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Proj}(\mathcal{C})}((X_i)_{i\in I}, (Y_j)_{j\in J}) = \lim_{\leftarrow\, j\in J} \lim_{\to\, i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j).$$

Avec le théorème d'existence du *petit diagramme localement libre*, qui affirme l'existence de proj-objet libre, sorte de Lovenheim-Skolem catégorique gérant en quelque manière l'éclatement des structures libres que l'on pourrait tenter de construire dans les cas non-algébriques mais descriptibles en termes de petite esquisse mixte, nous avons pu entamer sérieusement l'étude générale des théories considérées comme ainsi décrites, par esquisses mixtes donc :

Proposition 14 [Existence de petit diagramme localement libre], [37] *Pour toute esquisse mixte petite $\sigma = ((S,P),I)$ le foncteur*

$$\mathrm{Proj}(\mathrm{Ens}^\sigma) \longrightarrow \mathrm{Proj}(\mathrm{Ens}^S)$$

admet un adjoint à gauche.

En fait, l'existence du proj-adjoint en question est réductible au point de l'existence, pour tout $X : S \to \mathrm{Ens}$ du petit diagramme localement libre engendré $L_X : I_X \to \mathrm{Ens}^\sigma$, où donc I_X est une petite catégorie, et tel que soit fourni un cône projectif $((\phi_X)_i : X \to L_X(i))_{i\in I_X}$ avec — Cano désignant l'inclusion canonique de Ens^σ dans Ens^S — la condition

$$\forall R \in \mathrm{Ens}^\sigma \quad \varinjlim_{i\in I_X} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^\sigma}(L_X(i), R) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^S}(X, \mathrm{Cano}(R)).$$

On en tire donc, en prenant $X = \mathrm{Hom}_S(\Sigma, -)$, que pour tout objet Σ de S et toute réalisation R de σ, $R(\Sigma)$ se décompose comme limite inductive en

$$\varinjlim_{i\in I_{\mathrm{Hom}_S(\Sigma,-)}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^\sigma}(L_{\mathrm{Hom}_S(\Sigma,-)}(i), R) \simeq R(\Sigma). \qquad (\star)$$

Si $j_{\mathcal{C}} : \mathrm{Proj}(\mathcal{C}) \to (\mathrm{Ens}^{\mathcal{C}})^{\mathrm{op}}$ est le foncteur déterminé pour $X = (X_i)_{i\in I}$ par

$$j_{\mathcal{C}}(X)(C) = \varinjlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, C),$$

pour $\Sigma \in S$ on pose $\bar{\Sigma} = j_{\mathrm{Ens}^\sigma}(L_{\mathrm{Hom}_S(\Sigma,-)})$, et on pose aussi, pour tout R, $\mathrm{Eva}_\Sigma(R) = R(\Sigma)$. On a alors deux foncteurs $\mathrm{Eva}_\Sigma, \bar{\Sigma} : \mathrm{Ens}^S \to \mathrm{Ens}$ et une transformation naturelle $t_\Sigma : \bar{\Sigma} \to \mathrm{Eva}_\Sigma$. La condition $(\star)$ de décomposition inductive de $R(\Sigma)$ pour R ci-avant s'écrit encore

$$\bar{\Sigma}(R) \simeq \mathrm{Eva}_\Sigma(R).$$

Dans la catégorie $\mathcal{K} = \mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S}$ on a donc le morphisme $t_\Sigma : \bar{\Sigma} \to \mathrm{Eva}_\Sigma$, l'objet $\hat{R} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^S}(R, -)$, et la condition est devenue :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\hat{R}, t_\Sigma) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\hat{R}, \bar{\Sigma}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\hat{R}, \mathrm{Eva}_\Sigma),$$

soit — en notant $\hat{\hat{R}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\hat{R}, -) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^S}(R, -), -)$ (un objet de $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S}}$) — la condition 'algébrique' que le foncteur $\hat{\hat{R}} : \mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S} \to \mathrm{Ens}$ inverse $t_\Sigma \in \mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S}$, c'est-à-dire que :

$$\hat{\hat{R}}(t_\Sigma) : \hat{\hat{R}}(\bar{\Sigma}) \simeq \hat{\hat{R}}(\mathrm{Eva}_\Sigma) \qquad (\star\star).$$

Le passage de $(\star)$ à $(\star\star)$ fait disparaître les '$\lim_{\to i \in I}$' et le prix à payer est l'apparition des $\hat{\hat{R}}$. L'intérêt de la manœuvre est d'exprimer séparément, à partir de $(\star)$, une condition *équationnelle* $Z(t_\Sigma) : Z(\bar{\Sigma}) \simeq Z(\mathrm{Eva}_\Sigma)$, et une condition *représentationnelle* $Z \simeq \hat{\hat{R}}$. C'est en ce sens précis que l'on dira que tout est algébrique, à des représentabilités près...

Proposition 15 *Les foncteurs* $R : S \to \mathrm{Ens}$ *qui sont réalisations de* σ *sont tels que* $(\star)$ *c'est-à-dire tels que* $(\star\star)$*, soit des* $Z : \mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S} \to \mathrm{Ens}$ *tels que* $Z(t_\Sigma)$ *soit un isomorphisme* et *que* Z *soit 'représentablement représentable, c'està-dire isomorphe à un* $\hat{\hat{R}}$.

Considérons la question du rapport entre esquisses mixtes et schémas. Rappelons[16][26] qu'un *espace géométrique* ou *espace localement annelé* $E = (X, \mathcal{O}_X)$ est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux

$$\mathcal{O}_X : \mathrm{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$$

tel que, pour tout $x \in X$, la fibre $\mathcal{O}_{X,x}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{O}_{X,x} = \lim_{\to U \ni x} \mathcal{O}_X(U)$$

soit un anneau local c'est-à-dire avec un unique idéal maximal m_x.
Par exemple, si A est un anneau, on considère $\mathrm{Spec}(A)$ (lire 'spectre premier de A') l'espace géométrique dont les points sont les idéaux premiers de A, avec la topologie de Zariski — ou une base d'ouverts est formée des $D(f) = \{p \in \mathrm{Spec}(A); f \notin p)\}$, f parcourant A, un ouvert quelconque pouvant s'écrire

$$D(I) = \{p \in \mathrm{Spec}(A); I \nsubseteq p\},$$

avec I un idéal de A — et dont le faisceau est donné sur un ouvert $U = D(I)$ et avec $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f)) = A_f = A[f^{-1}] = A[X]/(fX-1)$ par

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) = \lim_{\leftarrow D(f)\subseteq U} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(f)).$$

La fibre en p est donc $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),p} = A[(A-p)^{-1}]$.

On désigne par Ann la catégorie des anneaux, et par Esg la catégorie des espaces géométriques, où un morphisme $(\psi,\theta) : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ est une application continue $\psi : X \to Y$ avec $\theta : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X \circ \psi^{-1}$, telles que, pour tout $x \in X$, l'induit $\theta_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,\psi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ soit local i.e. vérifie $\theta_x^\sharp(m_{\psi(x)}) \subseteq m_x$.
Ainsi on dispose du foncteur pleinement fidèle

$$\mathrm{Spec} : \mathrm{Ann}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Esg}.$$

Ensuite, pour tout espace géométrique E on note $\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}_X(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Esg}}(E, \mathrm{Spec}(Z[T]))$ l'anneau des sections globales de E, ou 'fonctions' sur E, on a canoniquement $A \simeq \mathcal{O}(\mathrm{Spec}(A))$, et on a l'adjonction

$$(\mathcal{O} : \mathrm{Esg} \longrightarrow \mathrm{Ann}^{\mathrm{op}}) \ \dashv\ (\mathrm{Spec} : \mathrm{Ann}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Esg}),$$

soit naturellement $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(A, \mathcal{O}(E)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Esg}}(E, \mathrm{Spec}(A))$.

Tout espace géométrique E détermine un foncteur

$$\mathcal{S}E = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Esg}}(\mathrm{Spec}(-), E) : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ens},$$

et si $E = \mathrm{Spec}(A)$ alors $\mathcal{S}\,\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(A, -) =_{\mathrm{def}} Sp(A)$.
Pour tout foncteur $\mathcal{X} : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ens}$ on détermine, par extension de Kan, une *réalisation géométrique* $r(\mathcal{X}) = \lim_{\to a\in\mathcal{X}(A)} \mathrm{Spec}(A)$. On a naturellement $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Esg}}(r(\mathcal{X}), E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ann}}}(\mathcal{X}, \mathcal{S}(E))$, soit l'adjonction :

$$(r : \mathrm{Ens}^{\mathrm{Ann}} \longrightarrow \mathrm{Esg}) \ \dashv\ (\mathcal{S} : \mathrm{Esg} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\mathrm{Ann}}),$$

On a l'adjonction composée $\mathcal{O} \circ r \dashv \mathcal{S} \circ \mathrm{Spec}$, et avec $O(\mathcal{X}) =_{\mathrm{def}} \mathcal{O}(r(\mathcal{X}))$ naturellement $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(A, O(\mathcal{X})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ann}}}(\mathcal{X}, Sp(A))$, soit

$$(O : \mathrm{Ens}^{\mathrm{Ann}} \longrightarrow \mathrm{Ann}^{\mathrm{op}}) \ \dashv\ (Sp : \mathrm{Ann}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\mathrm{Ann}}),$$

Alors un *schéma* — soit un *pré-schéma* dans l'ancienne terminologie, où les schémas étaient les pré-schémas séparés — peut se définir de deux façons équivalentes, l'une 'géométrique', l'autre 'fonctorielle'. Ou bien comme espace géométrique $E = (X, \mathcal{O}_X)$ dont tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert $V \subseteq X$ tel que $(V, \mathcal{O}_X \lceil V)$ soit un schéma affine i.e. de la forme Spec(A). Ou bien comme foncteur $\mathcal{X}$: Ann $\rightarrow$ Ens '*local*' et possédant un '*recouvrement d'ouverts affines*' ([16], p.12). L'équivalence entre les deux manières est réalisée par $r \dashv \mathcal{S}$. Ainsi chaque anneau A, objet typiquement algébrique, est remplacé par son schéma affine Spec(A), objet constituant en quelque sorte la pensée topologique de l'anneau en question — dont on constate qu'elle suffit à reconstituer l'anneau même — puis de tels objets sont collés entre eux pour constituer les objets fondamentaux du discours algébrico-géométrique. Tel est, pour la géométrie algébrique à la manière de Grothendieck, le premier pas de la formulation du rapport fondamental entre l'idée d'anneau et l'idée d'espace, la façon dont les idées d'équation et de topologie se croisent pour constituer la géométrie algébrique. Résumons :

Proposition 16 [méthode grothendieckienne — point 2] *Le développement de la géométrie algébrique dans ses ressources fonctorielles demande — en sus du point 1 (Prop. 4) — la notion d'espace géométrique, la considération du foncteur* Spec : $\mathrm{Ann}^{\mathrm{op}} \rightarrow$ Esg *et de l'adjonction subséquente* $r \dashv \mathcal{S}$*, à travers laquelle la notion de* schéma *admet deux définitions équivalentes, l'une géométrique, l'autre fonctorielle.*

Ceci rappelé, partant de l'esquisse de topologie (Prop. 13), on peut effectivement continuer et obtenir une esquisse mixte dont les réalisations soient les schémas. Autrement dit, comme l'idée de topologie, tout ce qui figure dans la définition ci-dessus des schémas, les idées d'anneaux, d'anneaux locaux, de voisinages affines, tout cela donc s'esquisse, se spécifie en termes de limites projectives et inductives. Une variante intéressante serait de considérer à la base non pas l'esquisse de topologie mais l'esquisse d'esquisse projective, puis de caractériser, parmis les esquisses projectives celles de la forme $\omega(X)$, pour X espace topologique, etc. Et on peut même aussi esquisser la catégorie des schémas au-dessus d'un schéma fixé X, par une esquisse mixte $\sigma[X]$. On peut d'ailleurs procéder suivant la définition géométrique, ou suivant la définition fonctorielle.

Proposition 17 *De même que la catégorie* Top*, pour tout schéma* X*, la catégorie des schémas au-dessus de* X *admet une esquisse mixte "grosse"* $\sigma[X]$.

Notre question du rapport entre esquisses mixtes et schémas se formule alors d'abord ainsi : examiner la généralité du genre $\sigma[X]$ au sein des esquisses mixtes quelconques, et notamment déterminer si en pratique en mathématiques on a besoin d'autres esquisses mixtes que celles-là. Si la réponse était négative, cela signifierait en effet la complétude de la méthode grothendieckienne dont nous parlions plus haut. On pourrait donc associer à toute esquisse τ un schéma X_τ tel que $\tau \equiv \sigma[X_\tau]$. Sinon, il serait intéressant de voir ce qui alors échapperait à la géométrie algébrique, ou si l'on veut ce qui ne serait pas 'algébrique'... au sens de Lagrange ... ou de Grothendieck.

Mais ensuite, en réponse plus approfondie à cette question, on pourra aussi envisager parallèlement l'élaboration d'une discipline dite *Théorie Algébrique* modelée sur le parangon de la *Géométrie Algébrique*, en remplaçant, au départ de la mise en place ci-dessus, la catégorie Ann des anneaux par la catégorie Esq des esquisses projectives. L'idée alors est de considérer que les théories de A-modules sont exemplaires au sein des théories algébriques. Ainsi, on pourra chercher une théorie spectrale des esquisses projectives, soit la construction d'un spectre $\mathrm{Spec}(\sigma_{\mathrm{Proj}})$ associé à toute esquisse projective et en constituant une suffisante pensée topologique. Ce à quoi le théorème du diagramme localement libre sera indispensable : il s'agira d'abord d'élaborer une bonne notion d'esquisse projective locale, puis de construire le diagramme localement libre associé à σ_{Proj} dans la catégorie des esquisses projectives locales en question. Les esquisses mixtes pertinentes seraient alors celles correspondantes à des faisceaux en esquisses projectives locales... et toute théorie serait localement algébrique. Ainsi encore, de même que Grothendieck considère que le cadre naturel de l'algèbre linéaire est la catégorie Mod des modules (A, M), où $A \in \mathrm{Ann}$ et $M \in A$–Mod, on posera que le cadre naturel des questions d'algébricité est la catégorie Real des *réalisations* $(\sigma_{\mathrm{proj}}, R)$, avec $\sigma_{\mathrm{proj}} \in \mathrm{Esq}$ et $R \in \mathrm{Ens}^{\sigma_{\mathrm{proj}}}$. On pourrait faire de même sous l'angle des *monades* en considérant la catégorie Alg des algèbres de monades, ayant pour objets les $(C, \mathrm{T}, (X, \theta))$ où C est une catégorie, T une monade sur C et (X, θ) une algèbre de T ; mais alors il y a deux notions naturelles de morphismes, suivant que l'on désire relever aux algèbres ou étendre aux algèbres libres un foncteur de C à C'. On pourrait aussi commencer avec les *opérades* ..., voire avec le cadre plus général encore de la catégorie Mon des monoïdes (C, M) ou *monoïdes M en des catégories monoïdales variables C.*

Mais restons avec la question des esquisses mixtes. Voici maintenant trois autres formulations utiles ici de ce qu'est une théorie 'en général' : les *initialisations*, les *axiomatisations*, et les *esquisses concrètes*. À travers ces notions, on peut en fait plus aisément développer concrètement les exemples de théories mixtement esquissables, car :

Proposition 18 [37][33] *Tout ce qui se spécifie avec l'une des notions d'*initialisation*, d'*axiomatisation *ou d'*esquisse concrète *se spécifie avec les autres, c'est-à-dire que ces notions sont en un sens équivalentes entre elles et avec celle d'*esquisse mixte. *Mais l'équivalence est faible, car, dans les traductions, les tailles des données spécificatrices ne sont pas conservées nécessairement. Par là s'établit le pont entre les modèles d'esquisses et les modèles de sites, et la question des topos classifiants.*

Une *initialisation* — notion mise en relief par le groupe ADJ vers 1975 [2][39] — consiste en la donnée d'une catégorie S et d'un ensemble de couples de sous-catégories emboîtées $D \subseteq C \subseteq S$, un modèle étant un élément R de Ens^S tel que

$$R\lceil_C \simeq \mathit{Libre}_{\lceil_D}(R\lceil_D),$$

ce qui signifie que pour tout foncteur $\Gamma : C \to \mathrm{Ens}$ on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^C}(R\lceil_C, \Gamma) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^D}(R\lceil_D, \Gamma\lceil_D).$$

On comprend qu'il s'agit de *spécifier des objets comme libres* sur d'autres, comme par exemple l'ensemble des entiers est un monoïde libre sur 1. Cela revient à spécifier $R\lceil_C$ comme une extension de Kan, calculable par limites inductives, et donc peut s'exprimer par esquisse mixte.

Une *axiomatisation* — notion dégagée par Andreka et Nemeti vers 1978 [5] — consiste en la donnée d'une catégorie S et d'une famille de cônes projectifs *discrets* $(q_e : V \to D_e)_{e\in E}$ dans la catégorie Ens^S, un modèle étant un élément R de Ens^S tel que

$$R : S \to \mathrm{Ens}, \quad \coprod_{e\in E} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^S}(D_e, R) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^S}(V, R) \quad \text{soit surjectif.}$$

Ici, le style est celui des *modèles de sites* — qu'on ne confondra pas avec la description des *faisceaux sur un site* que nous avons envisagée plus haut — où l'on exprime des *conditions de recouvrements*, à ceci près qu'on n'impose aucune représentabilité à V ou aux D_e.

Une *esquisse concrète* — notion introduite par Lair et moi-même vers 1979 [38]— consiste en la donnée d'une catégorie S et d'une famille de cônes projectifs chacun du type $(q_k : V \to D_k)_{k\in K}$ dans la catégorie Ens^S. Un modèle est alors un élément R de Ens^S tel que

$$R : S \to \mathrm{Ens}, \quad \lim_{\to\, k\in K} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^S}(D_k, R) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^S}(V, R).$$

La donnée $d = (d_k : V \to D_k)_{k\in K}$ détermine un morphisme

$$t\langle d\rangle : j_{\mathrm{Ens}^S}(D) \to \hat{V} \in \mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S},$$

que l'on appellera la formule de d, et alors la condition ci-dessus pour que R soit un modèle signifie que $\hat{\hat{R}}$ inverse la formule, et se réécrit :

$$\hat{\hat{R}}(t\langle d\rangle) : \hat{\hat{R}}(j_{\mathrm{Ens}^S}(D)) \simeq \hat{\hat{R}}(\hat{V}).$$

On comparera avec la Prop.15 sur les diagramme localement libres et réalisations d'esquisses mixtes.
Par exemple, si $\mathrm{Yon}_S : S^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}^S$ est le plongement de Yoneda relatif à S, avec, pour tout B de S, $\mathrm{Yon}_S(B) = \mathrm{Hom}_S(B, -)$, on a un tel cône dans Ens^S sous la forme $(\mathrm{Yon}_S\, q_l : \mathrm{Yon}_S\, \Sigma \to \mathrm{Yon}_S\, C_l)_{l\in L}$, pour chaque cône inductif dans S, $(q_l : C_l \to \Sigma)_{l\in L}$. Et aussi, à chaque cône projectif $(p_k : \Pi \to B_k)_{k\in K}$ dans S est associé le cône projectif (à une seule jambe) dans Ens^S, qui est la flèche de factorisation $(\lim_{\to k\in K} \mathrm{Yon}_S\, B_k \to \mathrm{Yon}_S\, \Pi)$. Cette notion relie les esquisses mixtes et les modèles de sites, l'approche par les esquisses et celle par les topos classifiants, et ceci — comme on voit — au plus près de la notion de

diagramme localement libre. Toutefois dans l'esquisse concrète on n'impose pas que les D_k soient des modèles. Si on le suppose, alors chaque $(D_k)_{k\in K}$ devient localement libre sur son V, et on parlera d'*esquisse concrète régulière*. Vu le théorème du diagramme localement libre, on ne nuit pas à la généralité en se limitant aux esquisses concrètes régulières :

Proposition 19 *Les* esquisses concrètes régulières *décrivent les mêmes théories que les esquisses concrètes ou les esquisses mixtes.*

Que ce soit pour les axiomatisations ou les esquisses concrètes, on pourrait songer à remplacer la catégorie Ens^S par une catégorie quelconque C. En fait la généralité là est un peu trompeuse car, en utilisant le plongement de Yoneda $\mathrm{Yon}_{C^{\mathrm{op}}} : C \to \mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}$ donné pour tout A de C par $\mathrm{Yon}_{C^{\mathrm{op}}}(A) = \mathrm{Hom}_C(-, A)$, les cônes projectifs $(q_k : V \to D_k)_{k\in K}$ dans C donnent lieu à des cônes $(\mathrm{Yon}_{C^{\mathrm{op}}}(q_k) : \mathrm{Yon}_{C^{\mathrm{op}}}(V) \to \mathrm{Yon}_{C^{\mathrm{op}}}(D_k))_{k\in K}$ dans $\mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}$, et les modèles R dans C des premiers s'identifient aux modèles X dans $\mathrm{Ens}^{C^{\mathrm{op}}}$ des seconds qui, de plus, sont représentables par un objet R de C, soit tels que : $X \simeq \mathrm{Hom}_C(-, R)$.

En tous cas — nonobstant des précisions nouvelles possibles du genre de celle que je donnerai tantôt dans la dernière partie de cet article, pour les compacts numériques de dimension finie (ou *cndf*) et la continuité — il semblait acquis au début des années 1980 que les théories en général, étaient, dans leur version analytique, exprimables via les esquisses mixtes ou leurs variantes ci-dessus, telles les conditions de structures libres et les conditions de recouvrements. Et acquis aussi que, pour les versions plus synthétiques, les monades restaient un horizon idéal. Nombre de praticiens s'arrangeaient ainsi de traiter la *théorie des théories* d'une façon bâtarde, par le couple de la théorie des monades d'un côté et de la théorie des esquisses projectives de l'autre. On fera le parallèle avec le couple de la géométrie synthétique euclidienne et de la géométrie analytique cartésienne. Sauf qu'à faire mâtiner ces idées par celle de pro-objet, on aboutit en effet, avec notamment les *esquisses concrètes*, à une théorisation où la question de la présentation par propriétés diagrammatiques universelles (le côté analytique et pragmatique des 'esquisses'), et celle de la spécification des constructions localement libres (le côté synthétique et fissa des 'monades') finissent par fusionner, comme un accomplissement de la pulsation entre syntaxe et sémantique.

Un bon cadre pour mettre en forme cette pulsation, et notamment penser ensemble les deux façons d'être diagrammaticien — je veux dire l'ehresmannienne, analytique et élémentaire, où tout se spécifie syntaxiquement par cônes, et l'autre, à la manière des monades, où tout est dit, sémantiquement, par l'exhibition des structures libres, que l'on peut voir comme des diagrammes de termes — me paraît être celui des *algèbres figuratives*, dont je dois maintenant donner les bases.

Une *théorie figurative* ou *figuration*[33] est la donnée de deux catégories F et S — dites catégorie des figures (ou arités) et substitutions et catégorie des supports et transformations — la donnée d'une catégorie C dite des compositions, avec un foncteur $L : F \longrightarrow C$ bijectif sur les objets, et la donnée d'un foncteur $D : F^{\mathrm{op}} \times S \longrightarrow \mathrm{Ens}$. Pour chaque *figure* ou *arité* α, Le foncteur $D^\flat(\alpha) = D(\alpha, -) : S \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est considéré comme une *figure concrète* à réaliser, et un élément d de $D^\flat(\alpha)(X) = D(\alpha, X)$, est considéré comme une réalisation concrète dans le support X de la figure α, il est éventuellemnt noté $d : \alpha \to X$, ou bien $\alpha \stackrel{d}{\to} X$ ou encore $X \stackrel{d}{\leftarrow} \alpha$, et dit simplement *dessin* de α dans X. Alors une *algèbre figurative* est un couple (X, A) où X est un objet de S et où $A : C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un foncteur tel que

$$A \circ L^{\mathrm{op}} = D(-, X).$$

Si $c : L(\beta) \longrightarrow L(\alpha)$ est un morphisme de C alors

$$A(c) : D(\alpha, X) \longrightarrow D(\beta, X) : \quad d \mapsto A(c)(d) := dc$$

est pensée comme l'action de la loi c qui transforme un dessin d de figure ou arité α dans X, $\alpha \to X$, en un dessin dc de figure ou arité β dans X, $\beta \to X$, ce que nous explicitons par l'écriture :

$$(\alpha \stackrel{d}{\to} X) \stackrel{L(\beta) \stackrel{c}{\to} L(\alpha)}{\longmapsto} (\beta \stackrel{dc}{\to} X).$$

Et pour mettre en même temps en évidence que les compositions sont des coefficients qui opèrent à droite sur les dessins nous écrirons simplement :

$$(X \stackrel{d}{\leftarrow} \alpha)(L(\alpha) \stackrel{c}{\leftarrow} L(\beta)) = (X \stackrel{dc}{\leftarrow} \beta).$$

Dans une figuration, on appelle *diagrammes de figures* un foncteur $\delta : I \longrightarrow F$, et une figure ϕ est dite concaténée de δ suivant d si $d = (d_i : \delta_i \to \phi)_{i\in I}$ est un cône inductif tel que, pour tout S on ait $D(\phi, S) \simeq \lim_{\leftarrow i\in I} D(\delta_i, S)$. On exprime donc ainsi une condition de faisceau pour les foncteurs $D(-, S)$. On considère alors que ϕ est constituée d'un arrangement suivant I des fragments δ_i, et on dit que ϕ est *composée* ou *complexe* relativement à ses composants *simples* les δ_i, et on écrit : $\phi = \int_{i\in I}^{D} \delta_i$.

Lorsque, pour un α donné, $D^\flat(\alpha) = D(\alpha, -) : S \to \mathrm{Ens}$ n'est pas représentable comme un $\mathrm{Hom}_S(r(\alpha), -)$, on considère que α est une arité (ou figure) *paradoxale*, qui ne peut pas être conçue (représentée) comme un objet $r(\alpha)$ de S.

L'analyse d'une théorie figurée commence donc avec la considération de la complexité et de la paradoxalité des figures. Bien entendu, si l'on étend S^{op} en Ens^S, toute figure α devient non-paradoxale, puisqu'alors représentable par $D^\flat(\alpha)$.
Alors la condition de recollement idéal $\phi = \int_{i\in I}^{D} \delta_i$ s'écrit bien sûr dans Ens^S sous la forme projective : $D^\flat(\phi) \simeq \lim_{\leftarrow i\in I} D^\flat(\delta_i)$.

En fait (cf. [32]) D détermine un distributeur — au sens de Bénabou — $\Delta : F \not\longrightarrow S$, L détermine un distributeur $\Lambda : F \not\longrightarrow F$, soit $\Lambda = L^\circ \otimes L$, avec $L \dashv L^\circ$, et l'on a un morphisme $\upsilon' : 1 \to \Lambda$; d'où un distributeur composé $P = \Delta \otimes \Lambda : F \not\longrightarrow S$ et une transformation $\upsilon : \Delta \to P$. On retient donc, pour spécification d'une *figuration*, la donnée de deux distributeurs $\Delta, P : F \not\longrightarrow S$ et d'un morphisme $\upsilon : \Delta \to P$, et on appelle *algèbre* un distributeur $\Sigma : S \not\longrightarrow 1$ et un $\lambda : \Sigma \otimes P \to \Sigma \otimes \Delta$ tels que :

$$\lambda.(\Sigma \otimes \upsilon) = 1_{\Sigma\otimes\Delta}.$$

Par là on touche aux descriptions des théories cohomologiques et calculs de satellites, mais c'est déjà une autre histoire.
Voici une autre variante de la définition des figurations. Le foncteur canonique $Q : \mathrm{Ens}^S \to D^\flat * L^{\mathrm{op}}$ dans la somme amalgamée de $D^\flat$ et L^{op} est bijectif sur les objets, et une algèbre de la figuration équivaut à la donnée d'un foncteur $\Theta : D^\flat * L^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ tel que, pour un certain X de S, avec $\mathrm{Eva}_X = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^S}(\mathrm{Hom}_S(X, -), -) = \hat{\hat{X}}$ défini par $\mathrm{Eva}_X(R) = R(X)$, on ait $\Theta \circ Q = \mathrm{Eva}_X$.

Proposition 20 *Une figuration équivaut à un foncteur*

$$Q : \mathrm{Ens}^S \to K$$

bijectif sur les objets, une algèbre étant alors spécifiée dans le 'fissa' :

$$\Theta \circ Q = \mathrm{Eva}_X.$$

Lorsque $S = F$ et que $D = \mathrm{Hom}_S$, en considérant que C joue le rôle de la catégorie $Alg(\mathrm{T})_L$ des T-algèbres libres, on voit que l'on retrouve les algèbres de monades. Ainsi envisagée, à partir de la version à la Linton de la théorie des algèbres de monades, notre définition ci-avant avait déjà été proposée en substance par Lambek — voir ses *catégories opérationnelles*, et aussi par Coppey[15] — voir sa notion de *$\mathcal{D}$-algèbre*, comme une libération de la contrainte d'avoir à utiliser un représentable $\mathrm{Hom}_S(-, X)$.

Sur les origines de l'idée de figuration voir [32] ; il faut considérer donc le travail de Coppey [15], et, en 1972 aussi, les notions d'*ébauche*[27] et *machine*[28], où l'on procédait, sans usage de propriétés universelles, à la spécifications de *lois locales*. Une théorie était considérée comme "ébauchée" par la donnée d'une *machine*, une machine étant définie comme un foncteur $M : A \to \mathcal{D}(B)$, où $\mathcal{D}(B)$ est la catégorie des petits diagrammes $D : I \to B$ dans B, un morphisme de D vers D' étant un couple (F, ϕ) d'un foncteur $F : I \to I'$ et d'une transformation naturelle $\phi : D \to D' \circ F$. On pense alors aux $M(\omega)$ comme à des opérations locales sur B. Comme en fait on a un plongement canonique $\mathcal{D}(B) \to \mathrm{Cat}^{B^{\mathrm{op}}}$, la donnée de M détermine un foncteur $M^\sharp : A \to \mathrm{Cat}^{B^{\mathrm{op}}}$, ou un foncteur $H : B^{\mathrm{op}} \times A \to \mathrm{Cat}$. Sous cette forme H le lien avec les figurations est clair, et sous la forme $M^\sharp$, c'est le lien avec les ensembles de parties $\mathcal{P}(X)$ et les relations binaires qui se voit bien. Cela suggère l'idée de *figuration 2-dimensionnelle* ou *2-figuration*, où Cat — ou Graph — remplacerait Ens.

Lorsque S est la catégorie Graph des graphes, que F est une sous-catégorie de S, et que $D = \mathrm{Hom}$, on obtient les *algèbres graphiques* de Burroni [12] — et les machines ou 2-figurations sont cousines de ses *algèbres 2-graphiques*. Les fabrications, des algèbres figuratives d'un côté, des algèbres graphiques de l'autre, ont eu lieu à la même époque, mais avec des motivations assez différentes. Dans sa perspective, Burroni pouvait poser et résoudre le problème de l'algébricité sur les graphes, sur le topos Graph considéré par lui, et à juste titre, comme plus fondamental que Ens pour les pratiques catégoriciennes. Depuis, le développement qu'il a donné aux *algèbres polygraphiques* a montré la fécondité de sa conception. De mon côté, la motivation était plutôt de garantir un cadre général suffisant a priori où les pratiques synthétiques du genre "monades" et les pratiques analytiques du genre "esquisses mixtes" — et ce que je nommais plus haut pulsation entre syntaxe et sémantique — puissent s'unifier ou du moins se confronter naturellement, à la suite de l'idée d'esquisse concrète.

On peut encore relier le figuratif au graphique par le fait suivant, que montrent Adámek et Rosický :

Proposition 21 [1], p. 113. *Toute catégorie mixtement esquissable, soit de la forme* Ens^σ*, c'est-à-dire (suivant la caractérisation de Lair[40][41]) toute catégorie* modelable *c'est-à-dire* accessible*, admet un plongement plein accessible dans la catégorie* Graph *des graphes*

$$\mathrm{Ens}^\sigma \to \mathrm{Graph}\,.$$

Vu ce que nous venons d'exposer sur le lien entre le mixtement esquissable et le figuratif, cela suggère la thèse à préciser : *au sein du figuratif le graphique occupe une position d'universel.* On pourra alors chercher à construire le figuratif général sur la base du graphique.

La première formulation est la plus praticable pour construire effectivement *ce que l'on se figure* d'une situation théorique donnée. Les idées à mettre en œuvre sont assemblées dans F, et, simultanément, S est déterminée de sorte que ces idées — les α — puissent s'y concrétiser — par les foncteurs $D^\flat(\alpha)$ telles que pour tout $X \in S$ l'ensemble $D^\flat(\alpha)(X)$ soit bien celui des réalisations de α dans X. Sous cette forme on peut présenter aisément et naturellement l'essentiel de ce que l'on introduit comme "théorie". Par exemple la géométrie euclidienne travaille avec des figures comme droites, segments et cercles, des constructions de base comme la prise du centre d'un cercle ou de la médiatrice d'un segment ; ce sont bien des compositions figuratives, de l'arité "point" vers l'arité "cercle" pour la première, de l'arité droite vers l'arité segment pour la seconde. On obtient donc une figuration de la géométrie euclidienne en prenant ces figures et pour supports les espaces affines euclidiens. De même pour les géométries à la Klein. De même les algèbres partielles, comme les corps, se décrivent : dans un corps il y a une opération de prise de l'inverse, pour les non-nuls, ce qui est donc une composition de l'arité “élément” vers l'arité “élément non-nul”. On décrit de même le calcul des imaginaires. De même le calcul infinitésimal, etc. C'est au fabricant de toute figuration de considérer suffisamment de structuration préalable pour les objet X de S de sorte à savoir définir et construire les $D^\flat(X)$ auxquels il songe. L'idéologie directrice n'est donc pas éloignée de celle des spectres et schémas, où justement chaque espace géométrique E est, dans sa saisie diagrammatique, compris par son spectre $\mathcal{S}E : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ens}$; alors Ann joue le rôle de S, $\mathrm{Esg}^{\mathrm{op}}$ celui de F, et $\mathcal{S}$ celui de $D^\flat$.

L'idée pratique essentielle pour les figurations est d'imaginer une *géométrie illimitée a priori* pour les arités des opérations. Cette idée peut sembler démesurée, comme disent les joueurs de Go de certains coups. Mais à la fin des années 70, je songeais que dans la situation d'algébricité basique “à la Lawvere” il y avait deux aspects soudés, l'équationalité et l'existence d'adjoint à gauche ou de structures libres — et c'est cela qu'en son temps avait mis en relief au plan catégorique la thèse de Lawvere — et que l'on pouvait peut-être y gagner à les séparer, puisque l'on disposait maintenant du théorème du diagramme localement libre. Et puis, le fait de l'illimitation est bien la condition nécessaire pour *faire entrer le non-algébrique dans le rôle interne de la gestion de la géométrie desdites arités*, de sorte à ne laisser en surface que les opérations. Disons que l'approche est mixte — entre opération et topologie — de vouloir des opérations, données dans C, sur la base d'une sorte d'espace, décrit donc par F.

La troisième formulation ci-avant — celle avec $Q : \mathrm{Ens}^S \to K$, se rapproche directement de la description des algèbres d'une monade sur Ens^S, et non plus sur S. Il faudrait préciser les conditions, notamment que Q soit bijectif sur les objets. Ainsi les algèbres figuratives, d'une part, sont équationnelles, et, d'autre part, sont représentables.

Montrons comment l'on sait a priori que ‘tout’ peut se figurer. Si S

est une catégorie, et si $S' = \mathrm{Ens}^S$, $F' = (\mathrm{Ens}^{S'})^{\mathrm{op}}$, et $D^\flat(\alpha)(X) = \alpha(X)$, on forme une figuration où peut s'exprimer le fait qu'une flèche donnée quelconque $w : \alpha \to \beta$ de F' est à inverser par une algèbre (X, A)). Pour cela on prend C' constituée, en sus de F' via L', d'une flèche extra $c : L'(\beta) \to L'(\alpha)$ vérifiant $c.L'(w) = 1_{L'(\alpha)}$, $L'(w).c = 1_{L'(\beta)}$. Mais alors, cela s'applique si l'on considère une théorie décrite par une esquisse concrète de base S, de 'formule' $\hat{\hat{R}}(t\langle d\rangle) : \hat{\hat{R}}(j_{\mathrm{Ens}^S}(D)) \simeq \hat{\hat{R}}(\hat{V})$. On obtient donc une figuration, que, du reste, l'on peut lire à la troisième manière — celle des $Q : \mathrm{Ens}^S \to K$ — comme la donnée de

$$\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S} \to \mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S}[t\langle d\rangle^{-1}].$$

Proposition 22 *Toute théorie mixtement esquissable peut se spécifier par* lissage de la situation *en montant des S aux* $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S}$*, et par, dans une telle catégorie, le* calcul des fractions *et la détermination des objets* représentablement représentables*.*

Ici, dans le thème envisagé de la pulsation entre l'algébrique et le topologique, il est opportun d'en terminer en indiquant comment ces "théories" au-delà du projectif, et qui, sous divers habillages pratiques — et jusqu'aux formulations en termes d'algèbres figuratives — fournissent à peu près tout, sont cependant directement associées à des esquisses projectives grosses. C'est une observation d'Ageron[4] que les esquisses mixtes peuvent se remplacer par des esquisses projectives grosses. Mais nous pouvons voir la chose encore ainsi : si σ est une esquisse mixte — par exemple associée à une esquisse concrète ou à une figuration – alors sous de faibles conditions de 'cohérence', il existe un site classifiant $X[\sigma]$, et dans le topos dit *classifiant* $\mathrm{Ens}^{\omega(X[\sigma])}$, des faisceaux sur $X[\sigma]$ (soit des réalisations de l'esquisse projective $\omega(X[\sigma])$, construite comme $\omega(X)$ en Prop.3), un "modèle" de σ noté $\Sigma_0 : \sigma \to \mathrm{Ens}^{\omega(X[\sigma])}$ et universel, soit tel que les modèles de σ dans tout topos $\mathcal{E}$ soit les composés $m.\Sigma_0$ de Σ_0 par les morphismes géométriques $m : \mathrm{Ens}^{\omega(X[\sigma])} \to \mathcal{E}$. On remarque que les points du topos classifiant sont les éléments du diagramme localement libre sur le vide.

Proposition 23 [34] *Les modèles d'un site sont des faisceaux d'algèbres de Boole sur ce site — soit des structures algébriques exprimables par limites projectives et la double monade des parties* Π*.*

En fait "toute théorie est topologique" est l'idée régulatrice qui pousse aux constructions de topos classifiants de théories[46][45][9]. Ainsi, dans de nombreux cas, la description par σ est pensable, en terme des transformations continues m depuis l'espace ou topos classifiant, soit via une esquisse projective $\omega(X[\sigma])$. Ainsi *toute théorie "est" une topologie* ou un topos, déterminé par une esquisse projective. On dissociera les deux rôles d'une esquisse projective σ_{Proj} : d'une part comme descriptrice algébrique de $\mathrm{Ens}^{\sigma_{\mathrm{proj}}}$, et d'autre part comme descriptrice de la catégorie $\mathcal{G}\big(\mathrm{Ens}^{\sigma_{\mathrm{proj}}}, \mathrm{Ens}\big)$ des foncteurs géométriques de $\mathrm{Ens}^{\sigma_{\mathrm{proj}}}$ vers Ens. Cette alternative est le nerf de la question de la dualité.
Et comme une esquisse projective est une donnée algébrique, c'est-à-dire projectivement esquissable, on retrouve ce sentiment, déjà exprimé plus haut par un autre biais, que si l'on ajoute au strictement algébrique le topologique ou la continuité, tout s'exprime. Ce qui va bien sûr *dans le sens de l'Histoire*, puisqu'en effet, empiriquement c'est, après la séparation en algèbre et topologie, à une recomposition des deux idées que l'on a assisté, avec par exemple la notion de fibré comme formulée par Ehresmann ; et cette notion mixte, ou la notion toute aussi mixte de schéma de Grothendieck, semble bien 'suffisante' pour le mathématicien au travail en quête de structures. Le paradoxe apparent ici se résume :

Proposition 24 *Toute théorie est algébrique parce que toute théorie est topologique.*

4 Le calcul des bouts

Au plus près de la tradition de l'algèbre universelle, on sait, suivant Edgar, qui utilise la description de Kelley des topologies, que la classe des espaces topologiques est équationnellement définissable, par des équations sur les opérations Lim_δ indexées par les ensembles dirigés $\delta = (D, \leq)$, attribuant une limite à certaines familles $f : D \to X$; mais alors ces opérations ne sont pas partout définies et univoques sur tel espace X considéré : ou bien on les voit comme opérations à valeurs dans X mais partielles, $X^D \hookleftarrow C \to X$, ou bien on les voit comme partout définies mais à valeurs dans l'ensemble des parties de X, $X^D \longrightarrow \mathcal{P}(X)$. Évidemment, il n'est pas difficile de 'figurer' le système des opérations 'partielles' considéré comme système d'opérations formellement totales $X^\delta \to X$, pour δ parcourant la catégorie des ensembles dirigés, en notant $D(\delta, X) =_{\text{def}} X^\delta$ l'ensemble C des δ-suites convergentes.

Proposition 25 [18] Top *est équationnellement définissable, et donc projectivement esquissable, par une grosse esquisse projective.*

Nous allons examiner maintenant ce qu'il en est dans le cas de l'intervalle réel $[0,1]$ de ces lois partielles, qui sont les opérateurs de prise de la limite, et voir qu'on peut faire mieux et les remplacer par un seul opérateur partout défini, d'arité $\mathbb{N}$, qui s'appellera le calcul du bout.

Nous aurons besoin de la caractérisation suivante :

Proposition 26 *— 1. Toute suite s dans* $[0,1]$ *admet une suite extraite monotone croissante ou une suite extraite monotone décroissante.*
— 2. Une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue si et seulement pour toute suite s monotone telle que $\lim(s) = u$ *et dont l'image $f(s)$ par f est monotone, on a* $\lim(f(s)) = f(u)$*.*

Le premier point est bien connu et vaut dans tout ensemble totalement ordonné, j'en ai appris de Jean Coret l'argument en deux points : (1) Si l'on suppose qu'il existe une partie infinie A de $\mathbb{N}$ telle que pour tout n de A il n'existe qu'un nombre fini de p dans A tels que $s(n) \leq s(p)$, alors pour tout n de A il existe un $p > n$, p dans A, tel que $s(p) \leq s(n)$, et le premier de ces p on le note $\sigma(n)$. Avec a le premier élément de A, on définit l'extraction e par $e(0) = a$ et $e(n+1) = \sigma(e(n))$, et la suite $s \circ e$ est monotone décroissante. (2) Si, à l'exact contraire de (1), on suppose que pour toute partie infinie A de $\mathbb{N}$, il existe un n dans A et une infinité de p dans A tels que $s(n) \leq s(p)$, le premier de ces n on peut le noter $\sigma(A)$, et l'ensemble infini des p de A tels que $n < p$ et $s(n) \leq s(p)$, on peut le noter $\Sigma(A)$. On définie l'extraction e par $e(0) = \sigma(\mathbb{N})$ et $e(n) = \sigma(\Sigma^n(\mathbb{N}))$. Alors $s \circ e$ est monotone décroissante. Pour le deuxième point, on commence par noter que $\lim(s) = u$ si et seulement si toutes les suites monotones extraites de s convergent vers u. En effet si s admet un point d'accumulation a, une suite extraite de s converge vers a, et donc, d'après le premier point, une suite monotone extraite de cette dernière existe, et converge vers a. Donc les points d'accumulation sont les limites des suites extraites monotones. Pour montrer que si $\lim(s) = u$ alors $\lim(f(s)) = f(u)$, soit donc à prouver que toute suite t extraite monotone de $f(s)$ converge vers $f(u)$. La suite extraite de s correspondante (dont t est l'image) converge vers u, et donc il en existe une suite extraite monotone r qui converge vers u, et d'image $f(r)$ monotone car extraite de la première extraite t. Par hypothèse $f(r)$ converge vers $f(u)$. Alors, puisque t est monotone et que l'une de ses suites extraites converge vers $f(u)$, t converge vers $f(u)$.

L'idée suivante nous vient évidemment de l'Analyse Non-Standard. On considère l'intervalle non-standard ${}^*[0,1] = [0,1]^{\mathbb{N}}/U$ des suites dans $\mathbb{N}$ modulo U, c'est-à-dire que $s \equiv_U t$ ssi $\{n; s(n) = t(n)\} \in U$. On désigne par s_U la classe d'équivalence de s. Alors l'ordre sur ${}^*[0,1]$ défini par $s_U \leq t_U$ si et seulement si $\{n; s(n) \leq t(n)\} \in U$ est total.

Proposition 27 *Si U est un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$ contenant le filtre de Fréchet Φ des complémentaires de parties finies, on peut poser, pour toutes $s, t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$, $s_U \simeq t_U \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \{n; |s(n) - t(n)| < \epsilon\} \in U$,*

$$B_U(s) := \mathrm{Sup}\{x; \{n; x \leq s(n)\} \in U\} = \mathrm{Inf}\{x; \{n; x \geq s(n)\} \in U\} \quad (*)$$

Alors pour $s \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $w \in [0,1]$ sont équivalentes :
(1) $B_U(s) = w$,
(2) $s_U \simeq w$,
(3) $\forall x, y \in [0,1](x \leq s_U \leq y \Rightarrow x \leq w \leq y)$,
(4) $\forall x, y \in [0,1]\big((x < w \Rightarrow x < s_U) \wedge (w < y \Rightarrow s_U < y)\big)$.
De plus pour $s, t \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ on a : $s_U \leq t_U \Rightarrow B_U(s) \leq B_U(t)$.
Et aussi si $s \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $u \in [0,1]$ on a : $\lim(s) = u \Rightarrow B_U(s) = u$, et dans tous les cas $B_U(s)$ est une valeur d'adhérence de s.

Désignons le terme de gauche de $(*)$ par $r^-(s_U)$ et le terme de droite par $r^+(s_U)$. L'égalité $(*)$ affirmée résulte de ce que l'on a bien sûr l'inégalité $r^-(s_U) \leq r^+(s_U)$, et qu'en cas de non-égalité on pourrait choisir un $a \in [0,1]$ tel que $r^-(s_U) \leq a \leq r^+(s_U)$, pour lequel on aurait donc ou bien $a \leq s_U$ ou bien $s_U \leq a$, puisque l'ordre sur ${}^*[0,1]$ est total. Mais c'est impossible car le premier cas entraîne $a \leq r^-(s_U)$ et le second entraîne $r^+(s_U) \leq a$. Ainsi $B_U(s)$ est bien défini. L'équivalence des quatre conditions est évidente. Pour le point suivant, cela vient de l'inclusion

$\{x; x \leq s_U\} \subseteq \{x; x \leq t_U\}$ en prenant les sup respectifs. Et pour la limite si $x < u$ alors $\{n; x \leq s(n)\} \in \Phi \subset U$ et donc $x \leq s_U$, et donc $B_U(s) = \sup\{x; x \leq s_U\} \geq \sup\{x; x \leq u\} = u$. De même $B_U(s) \leq u$.
En fait $B_U(s) = w$ ssi $\{n \in \mathbb{N}; \sup(0, a - \epsilon) < s(n) < \inf(a + \epsilon, 1)\} \in U$, pour tout $\epsilon > 0$, et donc $B_U(s)$ est un point d'accumulation de s.

Proposition 28 *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application et $w \in [0,1]$. Alors sont équivalents :*
(1) f est continue en w.
(2) $\forall s \in [0,1]^{\mathbb{N}}\big((s_U \simeq w) \Rightarrow (f(s)_U \simeq f(w)\big)$.
(3) $\forall s \in [0,1]^{\mathbb{N}}\big(B_U(s) = w) \Rightarrow B_U(f(s)) = f(w)\big)$.
Par suite, une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue si et seulement si pour toute suite $s \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ on a $B_U(f(s)) = f(B_U(s)$, soit

$$B_U \circ f^{\mathbb{N}} = f \circ B_U.$$

(1) implique (2) : Prenons $s_U \simeq w$, x, y tels que $x \leq f(s)_U \leq y$ et montrons que $x \leq f(w) \leq y$: sinon, si par exemple on avait $f(w) < x$, on considérait a et b tels que $a < f(w) < b < x \leq y$, et d'après la continuité de f en w, il existerait u et v tels que $u < w < v$ et que, pour tout z tel que $u \leq z \leq v$ on ait $a \leq f(z) \leq b$; mais $s_U \simeq w$ et $u < w < v$ assurent que $u < s_U < v$, soit $\{n; u < s(n) < v\} \in U$ et a fortiori $\{n; u < f(s(n)) < v\} \in U$, soit $a \leq f(s)_U \leq b$, ce qui contredit $x \leq f(s)_U \leq y$.
(2) implique (1) : D'après la proposition 26, considérons seulement une s monotone d'image par f monotone, avec $\lim(s) = w$. Pour montrer que $\lim(f(s)) = f(w)$ il suffit, la suite étant monotone, de montrer qu'il existe une extraction e telle que $\lim(f(s \circ e)) = f(w)$. Comme $\lim(s) = w$ on a $s_U \simeq w$, et donc, avec (2), $f(s)_U \simeq f(w)$. On termine alors en considérant une suite strictement croissante c convergente vers $f(w)$ et une suite strictement décroissante d convergente aussi vers $f(w)$: pour tout n, $c(n) < f(w) < d(n)$ entraîne $c(n) < f(s))_U < d(n)$, et donc $A_n = \{n'; c(n) < f(s(n') < d(n)\} \in U$ est infini. On pose $e(0) = \inf A_0$, et pour tout entier n on pose $e(n+1) = \inf\{n'; n' > e(n) \wedge n \in A_{n+1}\}$. Le point (3) et la fin sont alors immédiats, vue la proposition 27.

Considérons l'intervalle réel fermé $I = [0,1]$. Nous appelons fonction *bout* une fonction $B : I^{\mathbb{N}} \longrightarrow I$ qui commute aux fonctions α affines par morceaux et continues, ainsi qu'avec le produit et l'inf de toute paire d'éléments de I — soit $\alpha(B(s)) = B(\alpha \circ s)$, $B(s.s') = B(s).B(s')$ et $B(\inf(s, s')) = \inf(B(s), B(s'))$ — et telle que pour tout entier n il existe une suite s telle que $B(s) \neq s(n)$.

Proposition 29 *Pour tout ultrafiltre U contenant le filtre de Fréchet Φ, la fonction B_U est une fonction* bout*, et inversement si B est un* bout *on détermine un ultrafiltre non trivial*

$$U_B = \{X \subseteq \mathbb{N}; B(\mathrm{Car}(X)) = 1\}.$$

Les associations $U \mapsto B_U$ et $B \mapsto U_B$ sont réciproques, et il y a ainsi une correspondance bijective entre les fonctions bouts *sur $[0, 1]$ et les ultrafiltres non triviaux sur $\mathbb{N}$.*

Clairement les fonctions B_U sont des fonctions bouts. En fait pour toute suite s, $B_U(s)$ est nécessairement un point d'accumulation, et donc si l'on prend la fonction caractéristique de $X \subseteq \mathbb{N}$, soit la fonction définie par $\mathrm{Car}(X)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{si } x \notin X \end{cases}$, nécessairement $B_U(\mathrm{Car}(X)) \in \{0, 1\}$. En fait la fonction B_U détermine U car $X \in U$ ssi $B_U(\mathrm{Car}(X)) = 1$. Réciproquement si B est un bout, alors U_B est un ultrafiltre non trivial, et $B = B_U$, en voici la démonstration. On montre d'abord que si B est un bout (abstrait, non associé a priori à un ultrafiltre) alors $B(s)$ est un point d'accumulation de s. En effet si $a \in I$, en considérant la commutation de B avec la fonction constante $a^\kappa : I \to I$, et la suite constante $a^\cdot$ on a, pour toute suite s, $B(a^\cdot) = B(a^\kappa \circ s) = a^\kappa(B(s)) = a$. Donc si $]u, v[\cap \mathrm{Val}(s) = \emptyset$, alors $B(s) \notin]u, v[$: sinon on considère la fonction f linéaire par morceaux valant β avant $B(s) - \epsilon$, valant α en $B(s)$ et β après $B(s) + \epsilon$, avec $\beta < \alpha$, et $u < B(s) - \epsilon < B(s) + \epsilon < v$, et on a : $\alpha = f(B(s)) = B(f \circ s) = B(\beta^\cdot) = \beta$. Donc $B(s)$ est toujours une valeur de s ou une valeur d'adhérence de s. En particulier si $s = \mathrm{Car}(X)$, pour $X \subseteq \mathbb{N}$, alors $B(s)$ vaut 0 ou 1, et notamment $B(\mathrm{Car}(\emptyset)) = 0$, si bien que $\emptyset \notin U_B$. Si $X \in U_B$ et $X \subset X'$, alors $1 = B(\mathrm{Car}(X)) = B(\mathrm{Car}(X). \mathrm{Car}(X')) = B(\mathrm{Car}(X)).B(\mathrm{Car}(X')) = B(\mathrm{Car}(X))$. Et si $X \in U_B$ alors $B(\mathrm{Car}(\mathbb{N} - X) = B(1 - \mathrm{card}(X)) = 1 - B(\mathrm{Car}(X))$.

Montrons ensuite qu'avec $U = U_B$, on a $B = B_U$. D'abord si $s \leq t$, $B(s) \leq B(t)$: en effet $s \leq t$ s'écrit $s = \inf(s,t)$, et alors $B(s) = B(\inf(s,t)) = \inf(B(s), B(t))$, soit $B(s) \leq B(t)$. Ensuite, comme $B_U(s)$ est un sup, pour montrer que $B_U(s) \leq B(s)$ il faut montrer que si $B(\mathrm{Car}(\{n; x \leq s(n)\})) = 1$ alors $x \leq B(s)$: or, avec $X = \{n; x \leq s(n)\}$ et $g = x^{\cdot}.\mathrm{Car}(X)$, on a $g \leq s$, et alors $x = x.1 = B(x^{\cdot})B(\mathrm{Car}(X)) = B(x^{\cdot}.\mathrm{Car}(X)) = B(g) \leq B(s)$. Et comme $B_U(s)$ est aussi un inf, on montre de même que $B(s) \leq B_U(s)$.
De là résulte aisément que :

Proposition 30 *Soit* $B : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ *une fonction* bout *fixée arbitrairement. Alors une fonction* $f : [0,1] \to [0,1]$ *est continue si et seulement si pour toute suite* $s \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ *on a* $f(B(s)) = B(f \circ s)$*, c'est-à-dire si et seulement si* f *commute avec* B *:*

$$f \circ B = B \circ f^{\mathbb{N}}.$$

Si donc on considère que B est une opération partout définie d'arité infinie dénombrable (ou ω) sur I, les applications continues sont les morphismes d'algèbre de (I, B) vers (I, B).

Si K est un espace *compact numérique de dimension finie*, ou *cndf,* c'est-à-dire si K peut s'écrire, avec p et c entiers et $u, v : I^p \longrightarrow I^c$ deux applications continues :

$$K = \{(x_1, ..., x_p) \in I^p; u(x_1, ..., x_p) = v(x_1, ..., x_p)\},$$

toute suite s dans K s'identifie à la donnée de p suites s^1, ..., s^p dans I, et l'on équipe K d'une opération bout $B\langle K\rangle$ définie par

$$B\langle K\rangle(s) = B\langle K\rangle(s^1, ..., s^p) = (B(s^1), ..., B(s^p)).$$

On pose $\beta_B(K) = (K, B\langle K\rangle)$. Ainsi la catégorie $\mathrm{Comp}_{\mathrm{nf}}$ des applications continues entre *cndf* est une sous-catégorie *pleine* de la catégorie algébrique ${}^{\omega}\mathrm{Ens}$ ayant pour objets les couples (E, B) où E est un ensemble et $B : E^{\mathbb{N}} \longrightarrow E$ une fonction quelconque, un morphisme de (E, B) vers (E', B') étant une fonction $f : E \longrightarrow E'$ telle que, pour toute suite $s : \mathbb{N} \to E$, on ait $f(B(s)) = B'(f \circ s)$, ce qui s'écrit aussi :

$$f \circ B = B' \circ f^{\mathbb{N}}.$$

On ne confondra pas cette catégorie ${}^{\omega}\mathrm{Ens}$ avec la catégorie des algèbres de la monade sur Ens d'endofoncteur $(-)^{\omega}$. Notamment *une fonction bout n'est jamais une telle algèbre*, car alors pour toute suite double $s(n,m)$ dans I, on aurait $B(n \mapsto B(s(n))) = B(n \mapsto s(n,n))$.

Proposition 31 *Chaque fonction bout B détermine un foncteur plein et fidèle*

$$\beta_B : \mathrm{Comp}_{\mathrm{nf}} \longrightarrow {}^{\omega}\mathrm{Ens}.$$

De la sorte $\mathrm{Comp}_{\mathrm{nf}}$ *est plongé dans un environnement algébrique au sens le plus strict, avec une loi infinitaire partout définie. Mais justement ici apparaît une ambiguïté sur le choix du plongement, ou de la fonction bout utilisée. Comme les ultrafiltres sur un ensemble X constituent un espace compact $\mathcal{U}(X)$, les fonctions B, ou pour mieux dire les plongements β_B constituent un espace $\mathcal{B}$ analogue à* $\mathcal{U}(\mathbb{N})$*, qui représente une* ambiguïté d'accès à l'algébricité stricte.

On a réussi a éliminer le caractère partiel de l'opération de limite sur les suites, en introduisant le bout pour toute suite, gagnant ainsi une algébricité stricte, mais en revanche s'est introduite une espèce d'ambiguïté sur le plongement qui en effet varie avec B ou le U qui le détermine. L'élimination ici du partiel par le choix d'un U demanderait à son tour à être étudiée, en termes cohomologiques ou galoisiens, car il s'agirait là de mesurer une ambiguïté. Bien entendu, on ne change rien au problème d'ambiguïté inhérent à la situation si l'on considère plutôt que I est équipé non pas d'une fonction bout B mais de l'ensemble $\mathcal{B}$ de toutes les fonctions bout possibles, voire de l'ensemble plus vaste $\mathcal{C}$ de toutes les fonctions d'arité $\leq \omega$ sur I qui commutent avec toutes les fonctions continues de I dans I. Toutefois cette version des faits permet le rapprochement avec le résultat de Sangalli[49] affirmant que toute "clôture abstraite finitaire" ("abstract finitary clone") C est isomorphe à la clôture de toutes les opérations, sur un ensemble X_C, qui sont préservées par un monoïde M_C de transformations de X_C. On devrait de même, avec les bouts et $\mathcal{B}$, étudier la clôture infinitaire $\mathcal{C}$ et retrouver I.

5 Conclusion : topologiquement, tout est algébrique

Dans le travail de la pulsation entre les deux sens du diagrammatique, contenus dans l'objet *diagramme localement libre*, pensé comme un spectre, ou encore dans l'idée de *topos classifiant*, c'est l'ambiguïté — au sens galoisien — qui doit être en première ligne, considérée comme subsumant *une vue géométrique de l'équivoque de l'algébricité*.

Dans le double cadre général des esquisses mixtes et des figurations — dans le premier cas la priorité est sur la syntaxe, dans le second elle est sur la sémantique — on peut examiner la question de l'algébricité des théories, avec, comme outil de base, le théorème du diagramme localement libre — 'lieu' du travail même de la métamorphose de l'équivoque de la mise en forme algébrique — qui représente, nous y insistons, le point de jonction entre les deux sens, syntaxique et sémantique, du diagrammatique. Dans les *esquisses mixtes*, les limites inductives spécifiées permettent de traiter d'opérations partielles ou équivoques. Et ce traitement se retrouve dans les *figurations* via la souplesse du cadre des dessins D, où notamment peut jouer le foncteur parties $\mathcal{P}$: alors le défaut d'algébricité est absorbé dans la géométrie des arités $\phi \in F$, ou aussi bien — quand $\mathcal{P}$ est mis en avant — dans la composition des relations. Le rapprochement avec les *machines* fait comprendre qu'en fait on traite de 'lois locales'. Avec les *esquisses concrètes*, on arrive à ne plus distinguer entre syntaxe et sémantique, quand les diagrammes localement libres fournissent les *esquisses concrètes régulières*. On n'omettra pas de mettre en œuvre le rôle naturel ici du graphique dans la représentation des catégories modelables ou accessibles en jeu.

Tout spécialement, le cas de la théorie dite *topologie* est central. D'abord parce que, historiquement parlant, il n'est pas de structures réelles autres que les structures algébrico-topologico-différentielles, et on devrait bien a posteriori chercher une explication théorique à ce fait ! Ensuite parce que, à la manière de la *Géométrie Algébrique*, on peut en fait envisager le développement de la *Théorie Algébrique*, en terme de recollement de spectres de théories algébriques, c'est-à-dire suivant une pensée topologique.

La topologie s'esquisse donc mixtement, mais l'esquisse est grosse. Comme l'indique Ageron, l'esquisse de Burroni peut être rendue purement projective, en restant grosse bien sûr. On le voit d'ailleurs avec le théorème d'Edgar. La notion de topologie est donc "presque algébrique". Les topologies se décrivent aussi dans le cadre des monades — cadre réputé "algébrique" — comme $\mathcal{U}$-catégories. On peut aussi considérer qu'elles se comprennent dans le cadre des algèbres graphiques, en utilisant la monade $\mathcal{U}'$ sur $(\mathrm{Ens}^{(\rightrightarrows)})$, et la monade Π sur Ens.

Ou bien aussi, les topologies sont algébriques, et les schémas ensuite, parce que ce qui compte c'est non pas l'espace X mais l'esquisse projective $\omega[X]$, et l'algébricité de la spécification d'une esquisse projective de ce type, algébricité qu'il faudrait détailler. Il s'agirait de construire une esquisse dont les modèles soient les esquisses projectives du genre $\omega[X]$. Il existe une esquisse mixte ayant cette propriété.

On peut aussi certainement construire une autre "algébricité" des topologies en termes de 2-algèbres et de pseudo-algèbres. Ainsi si l'on exprime une topologie sur un ensemble X en termes d'opérateurs de fermeture sur $\mathcal{P}(X)$, les applications continues d'un espace X vers un espace Y sont des morphismes de pseudo-algèbres, c'est-à-dire des diagrammes non pas commutatifs mais "sous-commutatifs".

D'un autre côté encore, on peut axiomatiser les propriétés de la monade des parties $\mathcal{P}$ sur Ens, pour obtenir les *univers algébriques*, de sorte que, dans un tel cadre, qui constitue bien entendu un langage d'ordre supérieur, les topologies soient définissables par des équations. Ce qui est lié à leur Π-esquissabilité.

Ainsi, à des "détails" près — grosseur des cônes, caractère non borné du rang, partialité ou multivocité des lois, sous-commutativité, intervention du foncteur $\mathcal{P}$ ou ordre supérieur du langage– on peut voir les topologies comme algébriques, en plusieurs sens. Même dans le cas des espaces compacts, l'algébricité au sens des monades montrée par Manes ne se réduit pas exactement à des opérations de rangs bornés et partout définies.

Ainsi il y a beaucoup de points de vue suivant lesquels le topologique est algébrique. Et du reste en cette affaire les trois niveaux principaux qui sont ceux des esquisses projectives petites, des esquisses mixtes petites, des esquisses mixtes ou projectives grosses quelconques ou des figurations générales, sont analogues, comme le suggère Ageron[3], aux trois niveaux d'étude des espaces : les compacts, les complets, les espaces topologiques généraux.

En même temps, de façon presque duale, on constate que l'essentiel de ce qui excède le strictement algébrique se laisse capturer par ajout de topologique, et l'on a donc l'ambition d'affermir l'algébricité du topologique lui-même, qui on le voit est presque ça, mais pas tout-à-fait, de sorte à assurer du même coup l'algébricité de 'tout'.

Au niveau le plus général, tout est algébrique, oui, peut-être, on a certainement les outils généraux pour rendre cela vrai, à commencer par la montée dans les S, Ens^S, $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S}$, $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^{\mathrm{Ens}^S}}$, et ainsi de suite, et les calculs de fractions dans ces catégories, et l'analyse de la représentabilité en icelles ; mais l'outil fondamental ici est précisément de nature topologique, puisqu'il s'agit de travailler dans des complétions adéquates, et qu'entre ces complétions règne d'abord l'organisation topologique de systèmes de choix.

C'est donc en termes topologiques, ou topologico-graphiques, que l'on s'interrogera sur l'algébricité des théories, et notamment de la théorie dite *topologie*. L'horizon du développement envisageable est quelque chose comme ceci : toute théorie est algébrique, mais en quelque sorte elle l'est localement, et en un sens algébrico-diagrammatique du terme "localement" — manière de dire qui est *aussi* comme une actualisation de l'usage général dans la détermination des théories de l'opération lim, d'origine topologique en effet ; l'analyse précise de ceci en chaque cas doit révéler en somme l'ambiguïté de l'accès à l'algébricité stricte recherchée. Cela vaut en particulier pour la théorie dite *topologie*. On le constate précisément avec les calculs de *bouts* et des plongements β_B et la problématique qui s'ensuit pour l'ambiguité de l'algébricité stricte du topologique. On arrive à ce 'principe' : *In fine, l'algébricité stricte règne. Mais l'accès à ce règne est d'une nature spécifiquement ambigüe, et il n'est possible que sous la condition d'une pensée topologique et de l'invention de protocoles de complétion.*

Références

[1] J. Adamek & J. Rosický, *Locally Presentable and Accessible Categories*, London Math. Soc. Lecture Note Series 189, Cambridge University Press (1994).

[2] ADJ, Abstract Data Types as Initial Algebras and the Correctness of Data Representations, *Proc. Conf. on Computer graphics, Pattern Recognition, and Data Structure*, Beverley Hills, 1975, p. 89-93.

[3] P. Ageron, Quelques aspects de la dualité entre logique et topologie, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.* tome 33, 3 (1992), p. 195-198.

[4] P. Ageron, Esquisses inductives et presque inductives, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.* tome 42, 3 (2001), p. 229-240.

[5] H. Andreka and I. Nemeti, Injectivity in categories to represent all first order formulas, I, *Dem. math.* XII, 3, 1979.

[6] M. Barr, Relational algebras, *Springer Lecture Notes in Mathematics* 137 (1970), p. 39-55.

[7] M. Barr, M.C. Pedicchio, $\mathrm{Top}^{\mathrm{op}}$ is a quasi-variety, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.* tome 36, 1 (1995), p. 3-10.

[8] J. Bénabou, Structures algébriques dans les catégories, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, tome 10, 1 (1968), p. 1-126.

[9] C. Butz and P.T. Johnstone, Classifying Toposes for First Order Theories, *BRICS Report Series*, RS 97-20, Aarhus, 1997, 34 p.

[10] A. Burroni, Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies, *Esq. Math.* 5 (1970).

[11] A. Burroni, T-catégories (catégories dans un triple), *Cahiers Top. Géo. Diff.,* tome 12, 3 (1971), p. 215-321.

[12] A. Burroni, Algèbres graphiques (sur un concept de dimension dans les langages formels), *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.* tome 22, 3 (1981), p. 249-265.

[13] E. Burroni et A. Burroni, Structures Algébriques : Thème et Variations, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.* tome 33, 3 (1992), p. 207-216.

[14] P.M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper & Row, and John Weatherhill, 1965.

[15] L. Coppey, Théories algébriques et extension de préfaisceaux, *Cahiers Top. Géo. Diff.,* tome 13, 1 (1972), p. 3-40, Compléments à l'article "Théories algébriques et extension de préfaisceaux", *Cahiers Top. Géo. Diff.,* tome 13, 3 (1972), p. 265-273.

[16] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes Algébriques* tome I Géométrie algébrique – Généralités. Groupes commutatifs, Masson & Cie, Paris, North-Holland, Amsterdam, 1970.

[17] Y. Diers, *Catégories localisables*, Thèse d'Etat, Paris, 1977.

[18] G.A. Edgar, The class of topological spaces is equationally definable, *Algebra Universalis* 3 (1973), 139-146.

[19] A. et C. Ehresmann, Categories of sketched structures, *Cahiers Top. Géo. Diff.* tome 13, 2 (1972), p. 407-517.

[20] C. Ehresmann, Structures locales et revêtements, mutigraphié à Rio de Janeiro en 1952, in *Charles Ehresmann œuvres complètes et commentées*, vol. II-1, Amiens 1981, p. 3-24.

[21] C. Ehresmann, *Introduction to the theory of structured categories*, Technical Report 10, University of Kansas, Lawrence, 1966. Reprint in *Charles Ehresmann œuvres complètes et commentées*, vol. III-2, Amiens 1980, p. 591-676.

[22] C. Ehresmann, Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *Cahiers Top. Géo. Diff.,* tome 9, 1 (1967), p.33-126, et tome 9, 2 (1967), p.127-180.

[23] C. Ehresmann, Esquisses et types de structures algébriques, *Bull. Inst.. Pol. Iasi* 14 (1968), 1-14.

[24] S. Eilenberg and J.C. Moore, Adjoint functors and triples, *Illinois J. Math.* 9 (1965), 381-398.

[25] P. Gabriel and F. Ulmer, *Lokal Präsentierbare Kategorien*, Springer Lecture Notes in Mathematics 221 (1971).

[26] A. Grothendieck et J.A. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique* I, Springer (1971).

[27] R. Guitart, 'Sur l'ébauche des structures', 3d Congress of Bulgarian math. (1972), p. 71 in *Logique, relations et structures dans les catégories*, Thèse de doctorat d'État, Université de Picardie, Amiens, 1979, 660 p.

[28] R. Guitart, Remarques sur les machines et les structures, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, tome 14, 2, (1974), p. 113-144.

[29] R. Guitart, 'Equational translation of set theoritical notions', Oberwolfach, august 1974 (3 p.), et 'Traduction équationnelle de notions ensemblistes', *C.R.Acad.Sc.*, Paris, t. 279, 30 sept. 1974, p. 541-543.

[30] R. Guitart, 'Structures dans les univers algébriques' (1977), p. 325-370 in *Logique, relations et structures dans les catégories*, Thèse de doctorat d'État, Université de Picardie, Amiens, 1979, 660 p.

[31] R. Guitart, Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ?, *Cahiers Top. Géo. Diff.,* tome 23, 2 (1982), p.115-148.

[32] R. Guitart, From where do figurative algebras come ?, *Diagrammes* 7, 1982.

[33] R. Guitart, Introduction à l'Analyse Algébrique, I et II, *Mathématiques et sciences humaines*, tome 96 (1986), p. 49-63, et tome 97 (1987), p. 19-45 (Conférence aux Journées ATALA AFCET "Arbres en linguistique : un modèle informatique", 26-27 novembre 1981, Paris).

[34] R. Guitart, On the geometry of computations I et II, *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.*, tome 27, 4, (1986), p. 107-137, et *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.*, tome 29, 4, (1988), p. 297-326.

[35] R. Guitart, 'Toute théorie est algébrique', in *Journée mathématique en l'honneur d'Albert Burroni : Catégories, théories algébriques et informatique*, le Vendredi 20 septembre 2002, à l'Université Paris 7. Institut de mathématique de Jussieu, Prépublication 368, Avril 2004, p. 79-102. Voir aussi une conférence du même titre du 9 déc. 2006, sur le site http//www.diffusion.ens.fr/index.php ?idconf=1588&res=conf

[36] R. Guitart, 'Charles Ehresmann, au carrefour des structures locales et algébriques' in *"Charles Ehresmann : 100 ans"*, *Cahiers Top. Géo. Diff.,* tome 46, 3 (2005), p. 172-175.

[37] R. Guitart et C. Lair, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, *Diagrammes* 4 (1980), p. 1-106.

[38] R. Guitart et C. Lair, Limites et colimites pour représenter les formules, *Diagrammes* 7 (1982), p. 1-24.

[39] Hupbach-Kaphengst-Reichel, Initiale algebraische Spezifikation von Datatypen, parameterisierten datatypen und Algorithmen, VEB Robotron, Centrum für Forschung und Technik, Dresden, 1980.

[40] C. Lair, Catégories modelables et catégories esquissables, *Diagramme* 6, (1981) p. 1-20.

[41] C. Lair, Catégories qualifiables et catégories esquissables, *Diagrammes* 17 (1987), p. 1-153.

[42] W.F. Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories*, Dissertation, Columbia University, 1963.

[43] F.E.J. Linton, Some aspects of equational categories, in *Proc. Conf. Cat. Algebra La Jolla* 1965, Springer, 1966, p. 84-94.

[44] F.E.J. Linton, An outline of functorial semantics, *Springer Lecture Notes in Mathematics* 80 (1969), p. 7-52.

[45] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer, 1992.

[46] M. Makkai and G. Reyes, *First Order Categorical Logic*, *Springer Lecture Notes in Mathematics* 611, 1977.

[47] E.G. Manes, A triple theoretic construction of compact algebras, *Springer Lecture Notes in Mathematics* 80 (1969), p. 91-118.

[48] G. Peacock, *A treatise on algebra* (1830).

[49] A.A.L. Sangalli, On the structure and representation of clones, *Algebra Universalis* 25, 1 (1988), 101-106.

[50] A.N. Whitehead, *A treatise on Universal Algebra, with Applications I*, Cambridge University Press (1898).

René Guitart, U. Paris Diderot Paris 7,
IMJ, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris
guitart@math.jussieu.fr