Exposé sur l'axiomatique de Brelot

René Guitart

8 juin 1979

1 But de l'exposé

Dans le cadre de l'axiomatique de Marcel Brelot des fonctions harmoniques, R. W. Hervé a obtenu, en appliquant le théorème de Choquet sur les barycentres, l'analogue du théorème de représentation intégrale de Riesz-Martin. Elle en a déduit pour tout faisceau de Brelot F la construction d'un faisceau adjoint F', dont la considération apporte des informations sur la résolution de l'équation elliptique adjointe à une équation elliptique donnée.

Ces points seuls suffisent à justifier l'approche axiomatique. Nous ne les développerons pas ici. Nous nous contenterons d'exposer en quoi consiste l'axiomatique de Brelot des fonctions harmoniques, et son utilité dans le problème de Dirichlet sur un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^m$ pour les opérateurs localement uniformément elliptiques (suivant surtout M. Brelot, R.M.Hervé, G. Stampacchia).

2 Rappels classiques (pour Δ dans $\mathbb{R}^3$)

Partant de la formule d'Ostrogradski :

$$(1) \qquad \int_U \mathrm{div} F dV = \int_{\partial U} F.dS$$

on établit aisément, pour u de classe C^2 dans $U' \supset \overline{U}$ et $x \in U$ la formule de Green :

$$(2) \qquad u(x) = \underbrace{\frac{-1}{4\pi} \int_U \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dV(y)}_{\text{pot. volume}} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \Big[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}(y) \frac{1}{|x-y|}}_{\text{pot. simple couche}} - \underbrace{u(y) \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big)}_{\text{pot. double couche}} \Big] dS(y).$$

De là résulte pour u de classe C^2 et harmonique ($\Delta u = 0$) dans $U' \supset \overline{B}(x,R)$ la formule de la moyenne de Gauss :

$$(3) \qquad u(x) = \frac{-1}{4\pi R^2} \int_{S(x,R)} u(y).dS_R(y).$$

Koebe établit que réciproquement si u est continue et satisfait à (3) pour tout $x \in U'$ et R tels que $\overline{B}(x,R) \subset U'$, alors u est C^2 et harmonique. En fait, aujourd'hui c'est un calcul de régularisation par convolution, et on obtient même que $u \in C^\infty$.

Si $J_{x_0,a}$ est l'inversion de pôle x_0 et puissance a, alors, pour $u \in C^2$ on vérifie :

$$(4) \qquad \Delta\Big[\frac{(u \circ J_{x_0,a})(x)}{(x-x_0)}\Big] = \frac{a^2}{(x-x_0)^3}.\Delta u,$$

et cela permet, par recentrage, de déduire de (3) la formule de Poisson : pour u harmonique dans $U' \supset \overline{B}(0,R)$, $u \in C^2$, on a, pour tout $x \in B(0,R)$:

$$(5) \qquad u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S(0,R)} R \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^3}.u(y) dS_R(y).$$

Cette formule peut aussi se vérifier directement, ou encore en utilisant les harmoniques zonales et polynômes de Legendre, en imitant le calcul habituellement fait dans $\mathbb{R}^2$ avec les séries de Fourier, par superposition de solutions élémentaires et séparations des variables. Mais cela est impraticable dans R^m, $n \geq 4$ (encore que ...) alors qu'en considérant les analogues de (1) à (4) dans R^m, et en introduisant un "noyau de Poisson" :

$$(6) \qquad K(x,y) = \frac{R^{m-2}}{\text{aire}(S_m(0,R))} \cdot \frac{R^2 - |x|^2}{|y-x|^m},$$

et une "mesure harmonique"

$$(7) \qquad d\rho_x^{B(0,R)}(y) = K(x,y).dS_R(y),$$

on obtient, pour u harmonique dans $U' \supset \underline{B}(0,R)$, $u \in C^2$, et pour $x \in B(0,R)$, une "formule de Poisson dans R^m :

$$(8) \qquad u(x) = \int_{S(0,R)} u(y).d\rho_x^{B(0,R)}.$$

La formule de Poisson a de très nombreuses conséquences. Par exemple, vue la forme explicite de (6) on obtient immédiatement l'analyticité des fonctions harmoniques. Pour la suite de l'exposé, notons que de (3), et a fortiori de (5) (ou de ((8) dans R^m), on déduit le *principe du maximum* (Earnshaw, Gauss) : pour u harmonique dans $U' \supset \underline{B}(0,R)$, $u \in C^2$, on a

$$(9) \qquad \max_{\overline{B}(x_0,R)} u \leq \max_{\partial \overline{B}(x_0,R)} u.$$

En majorant et minorant $|y-x|$ par $R+|x|$ et $R-|x|$, on tire de (8), pour u harmonique, $u \in C^2$, $u > 0$ dans $U' \supset \underline{B}(x_0,R)$, avec $x \in B(x_0,r)$, les inégalités de Harnack :

$$(10) \qquad R^{m-2} \cdot \frac{R-r}{(R+r)^{m-1}} \leq \frac{u(x)}{u(x_0)} \leq R^{m-2} \cdot \frac{R+r}{(R-r)^{m-1}}.$$

Puis, de proche en proche par compacité, on obtient, pour U ouvert connexe de $\mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$ et K compacte de U, deux constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que, pour toute u harmonique > 0 dans U, $u \in C^2$, et pour tout $x \in K$ on ait :

$$(11) \qquad k_1.u(x_0) \leq u(x) \leq k_2.u(x_0).$$

On déduit de là le *deuxième théorème de Harnack* : si une suite croissante de fonctions harmoniques (donc C^2) dans U ouvert connexe de $\mathbb{R}^m$ est bornée en un point, alors elle converge, uniformément sur tout compact, vers une fonction harmonique.

Si l'on examine (2), on voit que :

$$(13) \qquad u(x) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial}{\partial n} G_x(y).dS(y),$$

pourvu que G_x soit une *fonction de Green* pour (U,x), c'est-à-dire la *solution fondamentale* de Δ en x nulle sur ∂U, soit :

$$(14-1) \qquad G_x^U(y) - \frac{1}{|x-y|} \text{ est harmonique, soit } \Delta G_x^U = -\text{dirac}_x,$$

$$(14-2) \qquad G_x^U(y) \to 0 \text{ quand, dans } U, y \to y_0 \in \partial U.$$

Dans le cas d'une boule $B(0,R)$ dans $\mathbb{R}^3$, on peut vérifier que

$$(15) \qquad G_x^{B(0,R)} = \frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|x|.|x-y'|}, \quad \text{avec} \quad y' = \frac{R^2 y}{|y|^2},$$

est une fonction de Green. On retrouverait, de (13) et (15), la formule (5). En général, il est très difficile de trouver explicitement les fonctions de Green. Quand à leur existence, cela équivaut à la *régularité* de U, c'est-à-dire à la résolubilité du problème de Dirichlet pour toutes les $f \in C^0(\partial U)$.

Le *problème de Dirichlet classique* s'énonce : étant donnés $U \subset \overline{U} \subset U'$, $f \in C^0(\partial U))$, trouver $u \in C^0(\overline{U})$ avec

$$(16) \qquad u_{|U} \in C^2(U) \ \text{ et } \ \Delta(u_{|U}) = 0, \quad u_{|\partial U} = f.$$

Ainsi si dans (16) on prend $f = -\frac{1}{|x-y|}$, on obtient un u tel que $u + \frac{1}{|x-y|} = G_x^U$.
La réciproque, difficile, résulte de l'étude par la méthode PWB que l'on fait plus loin, et de ce que, pour tout $y \in \partial U$, $G_{x_0}^U$ est une *barrière* pour y.
Il importe de voir que G_x^U joue dans U le rôle que joue $N_x(y) = \frac{1}{|x-y|}$ dans $\mathbb{R}^3$ (ou bien $\log(\frac{1}{(x-y)})$ dans $\mathbb{R}^2$, ou bien $|x-y|^{-(m-2)}$ dans $\mathbb{R}^m$). Notamment, on obtient

$$(17) \qquad N_x = \lim_{R\to\infty} G_x^{B(0,R)}.$$

Pour une mesure m sur $\mathbb{R}^3$ à support compact, la fonction

$$(18) \qquad (N.m)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dm(y)}{|x-y|},$$

est finie presque partout, et appelée le *potentiel nextonien* de m. On vérifie l'équation de Poisson :

$$(19) \qquad \Delta(N.m) = -4\pi m, \text{au sens des distributions.}$$

Donc $N.m$ est harmonique en dehors du support de m. On a rencontré de tels potentiels en (2) et (5).
Un cas particulier important est celui de la mesure harmonique $m = \rho_x^B$: dans ce cas, le support de ρ_x^B est ∂B, et même $(N.\rho_x^B)$ est continu (car continu sur son support, voir plus loin). On en déduit :

$$(20) \qquad (N.\rho_x^B = N_x - G_x^B.$$

Ainsi ρ_x^B est la *balayée* de dirac$_x$ (la mesure de Dirac en x) sur $R^3\backslash B$, c'est-à-dire est la distribution de masse sur ∂B créant hors de B le même potentiel que la masse $+1$ placée en x. La formule (15) se justifie alors en termes d'image électrique.

Si U est régulier, alors dans (1), u est unique, d'après le principe du maximum, et sera notée H_f^U. Alors, pour tout $x \in U$ la fonction

$$(21) \qquad f \mapsto H_f^U(x)$$

est une mesure positive sur ∂U, que naturellement on note encore $d\rho_x^U$, et que l'on appelle *mesure harmonique*.
On a donc :

$$(22) \qquad (N.\rho_x^U) = N_x - G_x^U = H_{N_x}^U.$$

Une fonction $f : U \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ semi-continue inférieurement (sci) est dite *hyperharmonique* si, pour tout U' régulier avec $\overline{U'} \subset U$ et tout $x \in U'$ on a

$$(23) \qquad f(x) \geq \int f(y) d\rho_x^{U'}(y).$$

On dira que f est *surharmonique* si f est hyperharmonique telle que $f \not\equiv +\infty$.
Une fonction surharmonique f est caractérisée par

$$(24) \qquad \Delta f \leq 0 \ \text{ au sens des distributions,} \quad f = \lim_{\text{inf. ess.}} (f).$$

Si m est une mesure ≥ 0 à support compact, et U régulier, alors

$$(25) \qquad (G^U.m)(x) = \int G_y^U(x) dm(y)$$

est surharmonique, finie en dehors du support de m.

D'après (12), si v surharmonique admet une minorante harmonique (ceci dans U régulier) alors v admet une plus grande minorante harmonique, et il existe une constante c déprendante de U telle que l'on ait la *décomposition de Riesz* :

$$(26) \qquad v = (G^U.\frac{-\Delta v}{c} + \text{pgmh}(v).$$

N.B. La théorie du potentiel ci-dessus, notamment la résolution du problème de Dirichlet par les fonctions de Green, a été adaptée dès 1924 aux opérateurs elliptiques de type div(D.grad$u$) par Sternberg (Math. Zeitschr. Bd 21).

Parmi les méthodes classiques que nous n'utiliserons pas dans cet exposé, citons : les harmoniques sphériques, les représentations conformes, la méthode alternée, la repésentation en potentiels de doubles couches, les noyaux intégraux.

Comme nous devrons considérer le *problème de Dirichlet variationnel*, il est bon de signaler les difficultés qui se sont présentés au 19ème siècle à ce sujet.
Si une fonction u minimise l'*énergie*

$$(27) \qquad E(u) = \int_U (\text{grad}u)^2.dV,$$

alors, d'après les équations variationnelles d'Euler-Ostrogradski, on a :

$$\Delta u = 0.$$

Riemann a cru que la réciproque était vraie, et a baptisé cela le *principe de Dirichlet* (bien qu'en fait ce principe remonte à Gauss). En fait si par "exemple U est un disque (dans $\mathbb{R}^2$) on peut obtenir que $\Delta u = 0$ implique que $E(u)$ est minimale parmi les $E(v)$, $v \in C^2$, à condition de supposer u à dérivées partielles bornées. Hadamard a observé que si $f \in C^0(S^1)$ a pour coefficients de Fourier a_n, b_n, et si u est la solution du problème de Dirichlet dans $B(0,1)$ pour f, alors

$$(29) \qquad E(u) = \sum_n n(a_n^2 + b_n^2).$$

Par suite pour

$$(30) \qquad f(z) = \sum_n \frac{\sin(n!z)}{n^2},$$

on a $E(u) = +\infty$.
La méthode variationnelle ne pourra pas être abordée de manière satisfaisante avant l'introduction par Hilbert (pour résoudre le problème de Dirichlet par la méthode des noyaux intégraux de Fredholm) de l'espace $l^2(\mathbb{N})$. On comprend pourquoi on ne pourra utiliser le principe variationnel que pour un $f \in C^0(\partial U)$ qui est *trace* d'une fonction F sur $\overline{U}$ d'énergie finie.

3 Opérateurs elliptiques : résultats dans les petites boules

On désire appliquer les méthodes du potentiel élaborée pour Δu à d'autres opérateurs, comme $\Delta u + cu$ (ondes stationnaires) ou encore, plus généralement, à l'*équation de diffusin* :

$$(31) \qquad \text{div}(D\text{grad}(u)) - \text{div}(uV).$$

L'étude à l'aide des solutions fondamentales est possible. Par exemple l'équation $\Delta u + k^2 u = 0$ a pour solution fondamentale en 0, la fonction $\frac{\exp(-ikr)}{r}$. On peut ensuite obtenir l'analogue de (2). Mais nous allons envisager une situation plus générale, et d'un point de vue différent.

3.1 Premier cas

Soit dans U ouvert de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, l'opérateur

$$(32) \qquad L_1(u) = a_{i,j}.u_{x_i,x_j} + b_i.u_{x_i} + c.u, \qquad a_{i,j} = a_{j,i},$$

où les sommations sont sous-entendues, avec des coefficients variables $a_{i,j}$, b_i, c, localement lipschitziens. On suppose L_1 *localement uniformément elliptique*, c'est-à-dire vérifiant, dans chaque ouvert V d'un recouvrement de U :

$$(33) \qquad \exists k \geq 1, \forall x \in V, \forall (x_i) \in \mathbb{R}^m, \quad \frac{1}{k}.\sum x_i^2 \leq \sum a_{i,j} x_i x_j \leq k.\sum x_i^2.$$

L'étude "à la Green" de (32) se fait classiquement en introduisant l'opérateur L_1' *adjoint* de L_1 :

$$(34) \qquad L_1'(u) = (a_{i,j}.u)_{x_i,x_j} - (b.u)_{x_i} + c.u.$$

La formule d'Ostrogradski permet dévaluer l'intégrale $\int_D (v.L_1(u) - u.L_1'(v))dV$ et(donne une "deuxième formule de Green". En présence d'une solution fondamentale on peut enfin, dans certain cas, obtenir l'analogue de (2). Cela marche par exemple pour $\Delta u + cu$.

Considérons le problème de Dirichlet classique (16) pour L_1 à la place de Δ. Le principe du maximum pout Δ est à vrai dire dû à son ellipticité uniforme : Hopf a montré qu'il était valable pour L_1 dans les conditions ci-dessus, avec $c \leq 0$, ou bien avec c quelconque mais dans des boules assez petites. Serrin en déduit les inégalités de Harnack. Les solutions du problème de Dirichlet sont donc uniques, croissantes. Leur existence, dans le cas des coefficients lipschitziens, sera admise ici (pour tout cela, voir le livre de C. Miranda, Zquazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, Ergeb. Math., 1955).

3.2 Second cas

Soit dans U ouvert de $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, l'opérateur

$$(35) \qquad L_2(u) = (a_{i,j}.u_{x_j})_{x_i} + a_{i,j}, \qquad a_{i,j} = a_{j,i},$$

à coefficients mesurables bornés, et loc. unif. elliptiques (soit (33)). De manière préalable on envisage pour L_2 le *problème de Dirichlet variationnel* qui s'énonce : étant donnés $U \subset \overline{U} \subset U'$ et $F \in W^{1,2}(U)$, trouver $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(U)$ avec

$$(36) \qquad L_2(u) = 0 \ \text{ au sens des distribution et avec } \ u - F \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(U).$$

On rappelle que $W^{1,2}(U)$ est constitué des fonctions de $\mathrm{L}^2(U)$ dont les dérivées partielles du premiers ordre (dérivées au sens des distributions) sont dans $\mathrm{L}^2(U)$. Alors $W^{1,2}(U)$ est un espace de Hilbert pour la norme :

$$(37) \qquad ||u||^2_{W^{1,2}} = \int_U (u^2 + (\text{grad } u)^2).dV.$$

La classe $\mathcal{C}_0^\infty(U)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(U)$, dans $\mathrm{L}^1(U)$, mais n'est pas dense dans $W^{1,2}(U)$; son adhérence dans $W^{1,2}(U)$ est notée $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(U)$. Enfin $W^{1,2}_{\text{loc}}(U)$ est la classe des fonctions qui sont dans $W^{1,2}(V)$ pour tout $V \subset \overline{V} \subset U$.

Dire que $L_2(u) = 0$ au sens des distributions revient à dire que, pour tout $v \in W^{1,2}(U)$ on a :

$$(38) \qquad a(u,v) := \int_U \Sigma a_{i,j}.u_{x_i}.v_{x_j}.dV = 0.$$

Pour résoudre (36), on prend $h = -L_2(F)$ et $v + F = u$ dans le résultat suivant :

$$(39) \quad \forall h \in \mathrm{L}^2(U), \exists! v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(U) \ \forall w \in W^{1,2}(U) \ \ a(u,w) =< h, w >, \text{et } v \text{ minimise } \ a(v,v) - 2 < h, v > .$$

Pour prouver (39), on part de l'inégalité de Schwarz et de l'écriture $f(x,y) = \int_0^x f_x(z,y)dz$, pour obtenir l'inégalité de Poincaré-Friedrichs :

$$(40) \qquad \int f^2 dV \leq k \int (\text{grad } f)^2 dV,$$

d'abord pour $f \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$, puis, par densité, pour $f \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(U)$ (avec U borné).
Ceci, joint à l'uniforme ellipticité et au fait que les coefficients de L_2 soient bornés, donne que $a(u,v)$ est continue et que

$$(41) \qquad A.||u||_{W^{1,2}} \leq a(u,u) \leq B.||u||_{W^{1,2}}.$$

On peut alors appliquer le lemme de Lax-Milgram et faire la projection adéquate dans le Hilbert $W^{1,2}$.

Une fois le problème variationnel résolu on peut démontrer (difficile) que :
1) Dans une boule, u solution de (36) est solution de (16) pour $F_{|\partial U}$.
2) Si $f \in \mathcal{C}^0(\partial U)$, on a $f = \lim T_n$, T_n trace (avec Weierstrass : il suffit de prendre pour T_n des polynômes) et surtout les solutions u_n associées aux T_n convergent, uniformément, vers u, solution de f.
3) Pour f continue, u admet un représentant continu (de Giorggi – Nash).

4 Les axiomes

Soit X un espace topologique localement compact à base dénombrable. On dit que H est une *axiomatique Brelot* si :
1— H est un sous-faisceau de $\mathcal{C}^0(-,\mathbb{R})$.
Pour tout ouvert U de X les éléments de $H(U)$ sont appelés fonctions harmoniques sur U. Ainsi cet axiome se dira : les fonctions harmoniques sont continues, et l'harmonicité est une propriété locale.
2 — Il existe une base d'ouvert réguliers de X, et en notant H_f^U la solution du problème de Dirichlet pour U régulier et $f \in \mathcal{C}^0(\partial U)$ on a $H_f^U \geq 0$ si $f \geq 0$.
Ainsi en posant $\int f(y)d\rho_x^U(y) = H_f^U(x)$ on détermine une mesure ρ_x^U appelée mesure harmonique, ou encore balayée de dirac$_x$ sur U. Par suite X se trouve muni de ce qu'on appelle un système de balayage c'est-à-dire une base $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts relativement compacts avec pour chacun une fonction, $\rho^{U_i} : U_i \to$ Radon (∂U_i). On en déduit, en posant $< B(m), f. >=< m, H_.^U(f) >$, les opérations de balayage

$$B_i : \text{Radon } (\overline{U_i}) \to \text{Radon } (\partial\overline{U_i}).$$

3 — Pour tout ouvert U de X, tout $x_0 \in U$, toute suite croissante $u_n \in H(U)$, si $u_n(x_0)$ est bornée, alors $u_n \to u \in H(U)$.
Ceci sera appelé axiome de convergence d'Harnack-Brelot.
Il a été démontré (Mokobodski, puis Loeb-Walsh sans l'hypothèse de base dénombrable) que, modulo les axiomes 1— et 2—, l'axiome 3 équivaut à 3bis —, et à 3'— :
3bis — (inégalité de Harnack) : pour tout U ouvert de X, tout $x_0 \in U$, tout compact $K \subset U$, il existe k tel que, pour toute $u \geq 0$, $u \in H(U)$, on ait

$$\sup_K u \leq k.u(x_0).$$

3' — i) pour tout ouvert U de X et $u \geq 0$, $u \in H(U)$, ou bien $u \equiv 0$ ou bien $u > 0$ partout.
ii) pour tout ouvert U de X et $x_0 \in U$, l'ensemble

$$F_{x_0} = \{u \in H(U); u > 0, u(x_0) = 1\}$$

est équicontinu (resp. compact).

Rapprochant un lemme de Cornea et un lemme de Choquet on a :

Lemme : soit X localement compact à base dénombrable, et soit F une famille filtrante inférieurement de fonctions continues. Alors il existe une suite décroissante f_n d'éléments de F avec $\lim f_n = \inf F$.

Du *lemme* on déduit aussitôt que l'axiome 3 — équivaut à l'axiome 3ter :

3ter — pour tout ouvert U de X, tout $x_0 \in U$, toute famille filtrante inférieurement $F \subset H(U)$, si F est bornée en x_0, alors $\inf F \in H(U)$.

5 Les exemples

1— Les fonctions continues solutions de $\Delta u = 0$ (voir le paragraphe 2).

2 — Comme cas particulier de résultats beaucoup plus généraux de Bony, on a que les solutions continues d'un opérateur différentiel du second ordre linéaire de la forme (32) et dont les coefficients sont constants satisfont à 3 — si et seulement si l'opérateur est elliptique ; on a alors une axiomatique Brelot. Dans Bony on voit d'ailleurs que pour toute axiomatique Brelot H où les constantes sont harmoniques il existe un opérateur elliptique non totalement dégénéré L tel que toute fonction $u \in \mathcal{C}^2$ de H vérifie $Lu = 0$. Mais en général il n'y a aucune raison pour que les fonctions de H soient $\mathcal{C}^2$.

3 — Dans le cas des opérateurs L_1 et L_2 plus haut ((32) et (35)) l'axiomatique est bien satisfaite, vu tout ce qui a été dit. Remarquons que comme à l'époque l'équivalence de 3 — et 3' — n'était pas connue complètement, R.-M. Hervé avait vérifié l'axiome sous la forme "forte" 3' — . Désormais il suffit de vérifier 3 ou 3bis, et comme on l'a dit, cela vient du principe du maximum.

4 — Si H est une axiomatique Brelot, et si h est finie continue > 0 dans X, alors $\frac{1}{h}H(U) = \{\frac{u}{h}; u \in H(U)\}$ est encore une axiomatique.

5 — Avec des hypothèses supplémentaires (voir la thèse de R.-M. Hervé) on peut, comme déjà dit au paragraphe 1, associer à une axiomatique H une axiomatique H' adjointe.

6 Le faisceau maximal des hyperharmoniques

Comme dans le cas classique, en théorie axiomatique on dira qu'une fonction $f : U \rightarrow]\infty, +\infty]$ sci est *hyperharmonique* si, pour tout $U' \subset \overline{U'} \subset U$, U' régulier, pour tout $x \in U'$, on a ($H_f^U(x)$ étant bien définie pour toute f sci) :

$$f(x) \geq H_f^U(x).$$

1) Les fonctions hyperharmoniques forment un *faisceau* F.

2) On a le principe du minimum (p.m.) : si dans U ouvert il existe $w \geq f > 0$ hyperharmonique $\neq +\infty$, alors pour toute f hyperharmonique on a :

$$\Big[(\forall y \in \overset{\infty}{\partial}\, U)\big(\text{lim.inf.}_{\,U \ni x \to y} f \geq 0\big)\Big] \Rightarrow (f \geq 0 \text{ dans } U).$$

De là se déduit le critère suivant (que l'on trouve dans Loeb) :

Une fonction $f : U \rightarrow]\infty, +\infty]$ sci appartient à $F(U)$ si et seulement si : pour tout $U' \subset \overline{U'} \subset U$, U' régulier, et pour toute $v \in F(\overline{U'})$ on a :

$$\big[f + v \geq 0 \text{ sur } \partial U'\big] \Rightarrow \big[f + v \geq 0 \text{ sur } \overline{U'}\big].$$

3) De la Pradelle ̣'eduit aussitôt du critère de Loeb la propriété remarquable :

Le faisceau F est maximal parmi les préfaisceaux de cônes convexes de fonctions sci $> -\infty$ vérifiant le p.m. pour les ouverts réguliers.

Cela est le point de départ d'une théorie axiomatique des fonctions hyperharmoniques, dont l'outil majeur est le balayage par rapport à un cône de fonctions surharmoniques positives (qui en présence d'une fonction de Green redonne, via le théorème de décomposition de Riesz, la description du paragraphe 4.2.).

4) "*Poissonnée*" : du caractère local de F on déduit que, pour U' régulier et f hyperharmonique, la "poissonnée"

$$f_{U'} = \begin{cases} f & \text{hors de } U' \\ H^{U'}_{f_{|\partial U'}} & \text{dans } U' \end{cases}$$

est encore hyperharmonique, et on a : $f_{U'} \leq f$.

5) *Enveloppes* : Soit $F_1 \subset F(U)$ une famille filtrante inférieurement de fonctions surharmoniques, saturée par construction de poissonnées sur des U' réguliers. Alors : $\inf F_1 = -\infty$ ou est harmonique.

En effet pour U' régulier on a, dans U', $\inf F_1 = \inf((F_1)_{U'})$. On conclut avec la forme 3ter de l'axiome 3.

7 Ensembles polaires.

Un ensemble $P \subset X$ est dit *polaire* si et seulement si il existe v hyperharmonique avec

$$P \subset \{x \in X; v(x) = +\infty\}.$$

Dans le cas classique de Δ dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, un compact est polaire si et seulement si il est un ensemble de singularité levable, c'est-à-dire si et seulement si toute fonction harmonique définie dans $V \backslash P$, où V est un voisinage de P, se prolonge en une fonction harmonique dans V exactement si elle est bornée.

On peut encore dire qu'un compact de $\mathbb{R}^3$ est polaire si et seulement si, pour toute mesure m d'énergie finie $\left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{dm(x)dm(y)}{|x-y|} < +\infty \right)$ on a $m(K) = 0$.

Enfin, en appelant *capacité* de K le nombre

$$\text{cap } (K) = \sup\{m(K); \text{supp } m \subset K, m \geq 0, N.m \leq 1\} = \inf\{m(\mathbb{R}^3); N.m \geq 1 \text{ dans } K\},$$

on a que K est polaire si et seulement si cap $(K) = 0$, autrement dit si et seulement si toute distribution de masses sur K crée un potentiel non borné.

On introduit, en théorie classique, la capacité de K dans U en substituant dans la formule G^U à N. On obtient alors la capacité du *condensateur* $(K \subset U)$ soit, si K est extérieurement régulier, $m(K)$ avec m sur K telle que $N.m = 1$ sur K et $N.m = 0$ sur ∂U. $N.m$est noté V_K et appelé *potentiel conducteur* ou potentiel d'équilibre ou encore potentiel capacitaire de K. L'étude des capacités classiques se fait toujours en étudiant d'abord le potentiel capacitaire. La théorie générale des capacités a été développée par Choquet. En particulier si l'on pose, pour U ouvert de $\mathbb{R}^3$

$$\text{cap}_* \ (U) = \sup_{K \subset U} \ \text{cap } (K),$$

puis pour E quelconque dans $\mathbb{R}^3$

$$\text{cap}^* \ (E) = \inf_{E \subset U} \ \text{cap}_* \ (U),$$

Choquet montre que cap* est croissante, que si $E_n \nearrow E$ alors cap* $E_n \nearrow$ cap* E, et que si $K_n \searrow K$ alors cap* $K_n \searrow$ cap* K (avec K_n, K compacts, E_n, E quelconques).

Les propriétés essentielles de cap sont la croissance, la continuité à droite, et la sous-additivité forte ($\forall K_1, K_2,$ cap $(K_1 \cup K_2) +$ cap $(K_1 \cap K_2) \leq$ cap $K_1 +$ cap K_2). En fait, cap est même "alternée d'ordre infini".

Nous pouvons enfin énoncer : *Une ensemble $P \subset \mathbb{R}^3$ est polaire si et seulement si cap*$^*(P) = 0$.

En théorie axiomatique on pourra espérer un tel résultat dès que, grâce à un noyau de Green (voir la thèse de R.-M. Hervé), on aura construit cap, puis cap*. Pour des opérateurs elliptiques comme L_1 ou L_2 on montre que leurs solutions fondamentales h_{x_0} satisfont à $k_1.N_{x_0} \leq h_{x_0} \leq k_2.N_{x_0}$, d'où des inégalités analogues pour les potentiels, puis pour les capacités associées. Ils'ensuit que *les ensembles polaires pour L_1, ou pour L_2, sont les mêmes que pour Δ.*. Il s'ensuit aussi que le critère de régularité de Wiener que nous énonçons plus loin est valable aussi pour les opérateurs elliptiques L_1, L_2. Donc : *les points réguliers pour L_1, ou pour L_2, sont les mêmes que pour Δ.*

On retiendra que les ensembles polaires sont les ensembles négligeables de la théorie du potentiel : une propriété vrai sauf sur un polaire sera dite vrai *quasi-partout*.

8 L'axiome de domination

Dans le cas classique, on sait que $\sup_{\mathbb{R}^3}(N.m) \leq \sup_{\text{supp }(m)}(N.m)$, c'est-à-dire que $N.m$ atteint ses maximum là où il y a des masses.

Avec le théorème de décomposition de Riesz on voit que les fonctions de la forme $(N.m)$ sont des *potentiels* au sens suivant : on dit que v hyperharmonique est un *potentiel* si $v > 0$ et si la pgmh de v ??? .

On peut donc formuler en théorie axiomatique l'axiome : pour tout potentiel v localement borné dans X, pour tout w surharmonique ≤ 0

$$(D) \quad [w \geq v \text{ sur supp } (v)] \Rightarrow [w \geq v \text{ partout}].$$

(le support de v est le complémentaire du plus grand ouvert où v est harmonique).

Théorème de convergence : Avec les axiomes 1, 2, 3, l'existence d'un potentiel et l'axiome (D) on a : si $(U_i)_{i\in i}$ est une famille de fonctions surharmoniques sur U localement bornée inférieurement, alors $v = \inf_i u_i$ ne diffère de $\hat{u}$ la régularisée sci de v que sur un ensemble polaire.

Dans le cas de L_1 l'axiome (D) est satisfait, et le théorème de convergence s'applique.

9 Résolution du problème de Dirichlet dans un ouvert U quelconque (P. W. B.)

Pour f sur U on pose

$$\overline{\mathcal{H}}_f^U = \Big\{v \text{ hyperh. bornée inf. sur } U, \text{ avec } (\forall y \in \partial U)(\text{lim. inf.}_{U\ni x\to y} v(x) \geq f(y))\Big\}, \quad \overline{H}_f^U = \inf \overline{\mathcal{H}}_f^U.$$

Comme $\overline{\mathcal{H}}_f^U$ est filtrante saturée, $\overline{H}_f^U$ est soit $+\infty$, soit $-\infty$, soit harmonique. On pose $\underline{H}_f^U = -\overline{H}_{-f}^U$, et on a $\underline{H}_f^U \leq \overline{H}_h^U$. Pour U régulier on a : $\overline{H}_f^U(x) = \int f d\rho_x^U$.

On dira que f est *résolutive* si $\underline{H}_f^U = \overline{H}_f^U$.

Comparaison avec le balayage de Poincaré : (B_n) étant un rtecouvrement de U par des boules ouvertes, $f \in \mathcal{C}^0(U)$ telle qu'il existe F sur $\overline{U}$ avec $F_{|\partial U} = f$ et F surharmonique, Poincaré "poissonne" F successivement sur $B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, B_1, \ldots$. La considération des polynômes harmoniques, et le théorème de Weierstrass, permettent ensuite de passer à f continue quelconque, et c'est tout.

Théorème de Perron Pour toute f si $\underline{H}_f^U$ et $\overline{H}_f^U$ sont finies et égales en un point de chaque composante connexe de U, elles le sont partout, et sont harmoniques. Si f est bornée et si le problème de Dirichlet est résoluble, alors f est résolutive et $H_f^U = \underline{H}_f^U = \overline{H}_f^U$.

Tout cela résulte aisément de tout ce qui précède.

Théorème de Wiener (avec un potentiel > 0). Les fonctions continues sont résolutives.

En théorie axiomatique, cela résulte du théorème d'approximation de R.-M. Hervé.

Par suite pour les f continues $H_f^U(x) = \int f d\rho_x^U$, ce qui définit la mesure harmonique ρ_x^U, pour U ouvert quelconque. Il en résulte, comme au paragraphe 4.2., l'opération de balayage B_U : Radon $(\overline{U}) \to$ Radon $(\partial\overline{U})$.

Théorème de Brelot (avec un potentiel > 0). Pour tout ouvert U, les fonctions résolutives sont les fonctions $d\rho_x^U$-mesurables (c'est indépendant de $x \in U$).

Par exemple dans le cas classique, dans le cas d'une boule, les fonctions résolutives sont exactement les fonctions dS_R-mesurables sur $S(0, R)$. Comme de plus tous les points de la boule sont réguliers, on voit que : pour f sur $S(0, R)$ le problème de Dirichlet est résoluble si et seulement si f est dS_R-mesurable, et alors la solution est donnée par la formule de Poisson (8).

Il nous reste à voir, lorsque f est résolutive, si H_f^U, harmonique dans U, se rapproche bien de f au bord. Cela va dépendre uniquement de la forme du bord, de l'existence ou non de points irréguliers : un point $y \in \partial U$ est dit *rg̈ulier* si, pour toute f résolutive, on a

$$H_f^U(x) \to f(y) \text{ quand } x \to y, x \in U.$$

Théorème de Lebesgue-Bouligand (avec un potentiel > 0). Un point $y \in \partial U$ est régulier si et seulement si il existe un voisinage ouvert V de y dans X, et une fonction surharmonique > 0 sur $V \cap U$ telle que $v(x) \to 0$ quand $x \to y$, $x \in V \cap U$.

L'étude générale des points réguliers conduit en théorie classique puis en théorie axiomatique à l'étude de l'*effilement* et de la *topologie fine*, choses très importantes, débordant même le cadre de la théorie du potentiel, mais dont nous ne parlerons pas ici.

Dans le cas de Δ dans $\mathbb{R}^3$, Zaremba a démontré le *critère du cône* : pour que $y \in \partial B$ soit régulier il suffit que l'on puisse le toucher de l'extérieur de U avec la pointe d'un cône.

En réalité cela résulte aussitôt du

Critère de Wiener : Pour que $y \in \partial U$ soit régulier il faut et il suffit que, pour tout $0 < r < 1$ on ait

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{cap } (\{x; x \notin U, r^{n+1} < |x - y| < r^n\})}{r^n} = \infty.$$

De là on déduit que le sommet d'une *épine de Lesgue* (dont le prototype est engendrée par la rotation autour de l'axe des x de la courbe $y = \exp(\frac{-1}{x}), x > 0$) est un point irrégulier (pour l'extérieur de l'épine).

Compte-tenu de ce qui a été dit plus haut sur les capacités, le critère de Wiener peut s'étendre a des opérateurs du genre L_1 (Tautz).

Revenons pour terminer dans le cadre de l'axiomatique :

Théorème de Kellogg-Evans. Avec un potentiel > 0 et avec l'axiome (D), pour tout ouvert U l'ensemble des points irréguliers est polaire.

Cela résulte du théorème de convergence.

Observation. Dans le cadre axiomatique on peut traiter un problème de Dirichlet sur la frontière de Martin, et d'autres variantes.

Pour pouvoir étudier le cas de l'équation de la chaleur, Bauer affaiblit l'axiome 3. Dans une axiomatique a visées probabilistes, Doob donne un axiome plus faible que 3. La *théorie des noyaux de Hunt* contient toutes les axiomatiques précédentes.

Enfin de nombreux aspects de la théorie axiomatique n'ont pas été développés ici (nous renvoyons les personnes intéressées à la bibliographie). Notre désir était simplement de proposer un texte introductif directement lisible.

References

[1] M. Brelot, *Éléments de la théorie classique du potentiel*, CDU, 1959.

[2] M. Brelot, *Axiomatique des fonctions harmoniques*, U. de Montréal, 1966.

[3] M. Ravaille, *Électrostatique, électricinétique*, éd. J. Baillère et fils (1964).

[4] M. Ravaille, Cours de physique, classe de math. sup. HX4, année scolaire 1965-66, Lycée Louis-le-Grand.

[5] E. Durand, Électrostatique : I. Les distributions. II. Problèmes généraux, Conducteurs. III. Méthodes de calcul des diélectriques. éd. masson et Cie (1966).

[6] M. Nozières, Cours de Physique Fondamentale, année scolaire 1966-67, Fac. des Sciences de Paris.

[7] L. Landau et E. Lifchitz, *Physique théorique, tome VIII : électrodynamique des milieux continus*, éd. MIR, Moscou (1969).

[8] R. Courant et D. Hilbert, tome II.

[9] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, hermann (1965).

[10] S Godounov, *Équations de la physique mathématique*, éd.MIR, Moscou.

[11] J. Dixmier, *L'intégrale de Lebesgue*, CDU.

[12] W. Rudin, *Real and complex analysis*, chp. 1, 2, 11, 12.

[13] A. Guichardet, *Calcul intégral*, coll. U, A. Colin (1969).

[14] V. Smirnov, *Cours de mathématiques supérieures, tome IV, 1ère partie (équations intégrales, calcul des variations, problème du minimum pour une fonctionnelle quadratique)*, éd. MIR, Moscou (1975).

[15] J. B. Conway, *Functions of one complex variable* (chp. X : Harmonic functions), GTM 11, Springer (1973).

[16] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle* (chp. II, III, IV), éd. Gauthiers-Villars (1968).

[17] G. Choquet, Invitation to potential théory (extrait du traité en 3 volumes *lectures on analysis.*

[18] M. Brelot, *Aspects multiples de la théorie du potentiel*, confŕence au séminaire M. Loi à l'ENS, décembre 1978.

[19] G. Julia, *L'espace hilbertien*, conférence au Palais de la Découverte, le 1er mars 1947.

[20] Notions in classical potential theory (chp. VI in *On topologies and boundaries in potential theory*, LN in Maths 175, Springer (1971).

[21] A.de la Pradelle, *Potentiel et fonctions harmoniques*, article dans l'Encyclopædia universalis.

[22] J. P.Kahane, *Série trigonométriques*, article dans l'Encyclopædia universalis.

[23] J. Dieudonné, ???

[24] H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien* (leçons à la Sorbonne en 1894-1895), éd. ??? (1899).

[25] O. D. kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Springer (1929).

[26] F. Vasilesco, *La notion de capacité*, ASI 571 (1937).

[27] F. Vasilesco, *La notion de point irrégulier dans le problème de Dirichlet*, ASI 660 (1938).

[28] C. de la Vallée-Poussin, *Le potentiel logarithmique. Balayage et représentation conforme*, éd. Gauthier-Villar (1949).

[29] G. Choquet, Theory of capacities, *Annales de l'Institut Fourier*, tome V (1953-54).

[30] P. A. Meyer, *Probabiltés et potentiel* (chp. III et IX), ASI 1318 (1966).

[31] J. Wermer, *Potential theory*, SLN in Maths 408, Springer (1974).

[32] R. M. Hervé, Cours de théorie du potentiel donné à Paris en 1969-1970.

[33] A. de la Pradelle, *Théorie du potentiel, théorie axiomatique locale*, cours de 3ème cycle donné à Paris VI en décembre 1975.

[34] C. Constantinescu and A. Cornea, *Potential theory on harmonic spaces*, Springer (1972).

[35] J. M. Bony, Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel, in *CIME* (1969).

[36] R. M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel (thèse), *Annales de l'Institut Fourier* 12 (1962).

[37] R. M. Hervé, Axiomatique Brelot pour $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_j a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0$, *Annales de l'Institut Fourier* 14,2 (1964).

[38] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson (Paris) et Academia (Prague) (1967).

[39] E. Magenes et G. Stampacchia, I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellitico, *Ann. Sc. Scu. Nor. Sup. Pisa* (1958).

[40] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall (1967).

[41] G. Stampacchia, *Équations elliptiques du second ordrze à coefficients discontinus*, été 1965, 16 SMS, Presse de l'Université de Montréal (1966).