Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Sur une question de Dulac et Fatou

Ricardo PÉREZ MARCO

Résumé – Il n'existe pas d'orbite convergente vers une orbite périodique indifférente irrationnelle d'une application holomorphe distincte de l'orbite périodique elle-même.

On a question of Dulac and Fatou

Abstract – *There is no orbit converging to an indifferent irrationnal periodic orbit for an holomorphic map distinct from the periodic orbit itself.*

H. Dulac étudie dans sa thèse [1] (1904) les singularités de feuilletages holomorphes dans $\mathbf{C}^2$. Il étudie les séparatrices de telles singularités. À propos du feuilletage défini par

$$(x+\cdots)\,dy+(-\alpha\,y+\cdots)\,dx=0,$$

on peut lire de sa plume ([1], p. 3) :

« *...on sait, depuis bien longtemps, qu'il n'existe que deux courbes intégrales réelles passant par l'origine. En est-il de même dans le champ complexe ? C'est une question qui restait en suspens et que les géomètres penchaient à trancher par l'affirmative (Picard,* Traité d'analyse, *II, p. 30). Or je prouve, au contraire, tout au moins dans le cas où* α *est rationnel, qu'il existe une infinité d'intégrales* $y\,(x)$ *s'annulant avec* x *(*x *tendant vers zéro suivant une loi convenable)...* »

Il résoud ce type de problèmes dans tous les cas (y compris ceux d'une singularité d'ordre élevé), sauf lorsque α est négatif, non nul et irrationnel; en langage moderne, lorsque la singularité est dans le domaine de Siegel non résonnant. On sait [2] que, via une construction d'holonomie, ce problème est relié à la dynamique des germes de difféomorphismes holomorphes ayant un point fixe indifférent. La classification analytique de telles singularités est en fait équivalente à celle de la dynamique des germes holomorphes modulo conjugaison analytique ([3], [4]). La question ouverte de Dulac ([1], p. 4, 2e cas, 1) s'énonce (et est équivalente à) dans le cadre des germes holomorphes :

Soit $f\,(x)=\lambda\,z+\mathcal{O}\,(z^2)$ *un germe holomorphe ayant un point fixe indifférent irrationnel en* 0, i.e. λ *n'est pas racine de l'unité. Existe-t-il une orbite positive de* f *convergente vers* 0 *et distincte de* 0 ?

Il est clair que ceci ne peut se produire dans le cas où f est linéarisable. On sait depuis [5] que la non-linéarisabilité est équivalente à l'existence d'une orbite qui *accumule* le point fixe (critère de Moussu-Dulac). On peut être tenté de penser que ceci équivaut à l'existence d'une orbite convergente.

P. Fatou a été confronté au même problème dans son étude de la dynamique des fractions rationnelles [6]. En se référant au point fixes (« points doubles » dans le langage de Fatou) de germes holomorphes indifférents irrationnels non linéarisables, on peut lire ([6], p. 221) :

« *...Existe-t-il alors des domaines dont les conséquents tendent vers le point double ? Nous ne pouvons actuellement ni en donner d'exemple, ni prouver que la chose soit impossible...* »

Note présentée par Jean-Christophe YOCCOZ.

0764-4442/95/03211045 \$ 2.00 © Académie des Sciences

Le théorème suivant répond à ces questions :

THÉORÈME 1. – *Il n'existe pas d'orbite convergente vers un point fixe indifférent irrationnel d'une application holomorphe distincte du point fixe lui-même.*

Cette question et des questions reliées, élevées au rang de conjectures, se trouvent dans des textes plus récents. Par exemple, notre théorème prouve la conjecture 1.2 de [7], p. 73, et montre que la conjecture 1.5 ([7], p. 77) est toujours fausse.

1. Soit $f(x) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ un germe de difféomorphisme holomorphe avec $|\lambda| = 1$. Un domaine de Jordan C^1 contenant 0 est dit *admissible* (pour f) si f ainsi que f^{-1} sont définis et univalents dans un voisinage de l'adhérence de U. Dans cette situation [5], l'auteur a établit l'existence d'un *compact de Siegel* $K \subset \overline{U}$, qui est un compact connexe plein, contenant le point fixe 0 et un point du bord de U, qui est totalement invariant par la dynamique locale de f. Un compact de Siegel est un *hérisson* si le point fixe 0 est irrationnel non linéarisable ou linéarisable avec un domaine de linéarisation maximal relativement compact dans U. Dans ce cas, le nombre de rotation α, $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$, est irrationnel. La construction fondamentale de [5] montre que la dynamique de f à l'extérieur de K est conjuguée à la dynamique d'un difféomorphisme analytique du cercle g de nombre de rotation α. Plus précisément, si h est une représentation conforme de l'extérieur du disque unité fermé (dans la sphère de Riemann) vers l'extérieur de K, on a que $g = h^{-1} \circ f \circ h$ s'étend en un difféomorphisme analytique du cercle unité. La topologie d'un hérisson est mauvaise ([5], [8]), il n'est jamais localement connexe, contient des points non accessibles, etc. L'idée de base pour démontrer le théorème 1 est d'étudier, malgré la mauvaise topologie, la dynamique de f sur un hérisson non linéarisable K et au voisinage de celui-ci. On se place sous les hypothèses : K hérisson non linéarisable. Des techniques plus élaborées permettent d'obtenir des résultats beaucoup plus précis que ceux énoncés ici, qui représentent le strict minimum nécessaire à la démonstration du théorème 1 (sauf pour quelques corollaires spectaculaires immédiats). Elles seront présentées ultérieurement dans [8]. On note $(q_n)_{n \geqq 0}$ la suite des dénominateurs des réduites de α. On a

THÉORÈME 2. – *Il existe une sous-suite infinie $A \subset \mathbf{N}$ telle que les itérés $(f^{q_n})_{n \in A}$ convergent uniformément sur K vers l'identité.*

COROLLAIRE 1. – *Tout point d'un hérisson est récurrent.*

COROLLAIRE 2. – *Le centralisateur de $f_{/K}$ dans le groupe d'homéomorphismes de K est non dénombrable.*

THÉORÈME 3. – *L'ensemble ω-limite ou α-limite d'un point extérieur à K ne peut être contenu dans U s'il intersecte K.*

COROLLAIRE 3. – *Il existe un unique hérisson associé à tout domaine admissible U.*

Évidemment les théorèmes 2 et 3 entraînent le théorème 1.

2. L'outil principal pour démontrer ces théorèmes repose sur la proposition technique suivante pour les difféomorphismes analytiques du cercle :

PROPOSITION 1. – *Soit g un difféomorphisme analytique du cercle unité $\mathbf{S}^1$ de nombre de rotation irrationnel α. Il existe un ensemble infini $A \subset \mathbf{N}$, tel que pour $n \in A$ il existe deux courbes de Jordan $\gamma_1^{(n)}$ et $\gamma_0^{(n)}$ homotopes et extérieures à $\mathbf{S}^1$ ($\gamma_0^{(n)}$ extérieure à $\gamma_1^{(n)}$), convergentes vers $\mathbf{S}^1$ quand $n \to +\infty$, telles que :*

(i) *L'itéré g^{q_n} (resp. g^{-q_n}) est bien défini dans un voisinage de l'anneau fermé déterminé par $\mathbf{S}^1$ et $\gamma_0^{(n)}$; pour $z \in \gamma_0^{(n)}$, il existe un anneau $B^{(n)}(z)$ séparant z et $g^{q_n}(z)$ (resp. $g^{-q_n}(z)$) de $\mathbf{S}^1$ dont le module est supérieur à M_n, avec $M_n \to +\infty$, $n \in A$.*

(ii) *Pour chaque point* $z \in \gamma_0^{(n)}$, *on peut construire des segments* $J_1^{(n)} \subset \gamma_1^{(n)}$ *et* $J_0^{(n)} \subset \gamma_0^{(n)}$, $z \in \gamma_0^{(n)}$, *de façon qu'ils forment les côtés opposés d'un quadrilatère fermé* R_n *entre les deux courbes de Jordan tel que*

(a) *Tout point à l'extérieur de* $\gamma_0^{(n)}$ *ayant un itéré à l'intérieur de* $\gamma_1^{(n)}$, *doit avoir un itéré dans* R_n. *On peut aussi construire une courbe de Jordan* $\gamma^{(n)}$ *entre les deux courbes de Jordan, tel que tout point dans* $\gamma^{(n)}$ *ait un itéré dans* R_n.

(b) *Il existe un anneau* A_n *séparant* R_n *de* $\mathbf{S}^1$, *de module supérieur à* $M_0 > 0$, *constante universelle suffisamment grande.*

Cette proposition technique est une conséquence des outils géométriques développés par J.-C. Yoccoz dans [10] pour traiter le problème de linéarisation globale des difféomorphismes analytiques du cercle. Le point crucial de son approche est un contrôle différentiable de la dynamique des itérés sur le cercle (ce qui est désormais relativement classique [11], [12]), combiné avec un lemme de Denjoy-Yoccoz [10] qui permet de contrôler les orbites dans un voisinage complexe du cercle à partir du contrôle réel.

3. Démonstration du théorème 2. – On transporte par la représentation conforme h les courbes de Jordan quasi-fixes $\gamma_i^{(n)}$, $\eta_i^{(n)} = h(\gamma_i^{(n)})$. En utilisant la proposition 1 (i), et l'invariance conforme des modules d'anneaux combiné avec des estimées à la Teichmüller, on a que la courbe de Jordan $\eta_0^{(n)}$ est quasi-fixe par $f^{q_{n+1}}$. On obtient ainsi la proximité de f^{q_n} à l'identité sur $\eta_0^{(n)}$. En appliquant le principe du maximum on obtient cette même proximité à l'identité pour $f_{/K}^{q_n}$ et le théorème 2 est ainsi démontré.

Le corollaire 1 est clair. Pour démontrer le corollaire 2 on construit une suite d'itérés de f, $f_n = f^{q_{n_k}} \circ \cdots \circ f^{q_{n_1}}$, en prenant une sous-suite $(n_k) \subset A$ croissant suffisamment vite pour s'assurer que (f_n) et (f_n^{-1}) convergent vers des homéomorphismes de K inverses l'un de l'autre. On construit ainsi un ensemble non dénombrable d'homéomorphismes de K commutant à f.

4. Démonstration du théorème 3. – Considérons un point x_0 de K commun avec le bord de U, et un segment l extérieur à K aboutissant en z_0 orthogonalement à la tangente de ∂U en x_0. Pour $n \in A$ assez grand, soit $z_0 \in l \cap \eta_0^{(n)}$, et $z_0' = h^{-1}(z_0)$. En appliquant le point (ii) de la proposition 1 à z_0' on obtient un quadrilatère R_n. En transportant par h, on obtient un quadrilatère Q_n fondamental pour la dynamique entre le courbes de Jordan $\eta_i^{(n)}$. En utilisant le point (ii) (b) il n'est pas difficile de voir que pour $n \in A$ assez grand, le quadrilatère fermé Q_n se trouve à l'extérieur de U. Soit maintenant un point z extérieur à K. En prenant $n \in A$ assez grand de façon que z soit à l'extérieur de $\eta_0^{(n)}$, on voit que des itérés arbitrairement grands de z sont dans des Q_n, donc à l'extérieur de $\overline{U}$, ce qui finit la démonstration.

Le corollaire 3 s'obtient en considérant le hérisson maximal K_m associé à U. Pour un hérisson K strictement inclus dans K_m, on choisit x_0 comme auparavant. On utilise alors le point (ii) (a) de la proposition 1, on note $\eta^{(n)} = h^{-1}(\gamma^{(n)})$. Si $K \neq K_m$, on observe que pour $n \in A$ assez grand $\eta^{(n)}$ intersecte K_m. Le point d'intersection aurait un itéré dans Q_n et donc sortirait de $\overline{U}$, ce qui contredit la définition de K_m.

4. Signalons que des résultats similaires s'obtiennent aussi pour les hérissons linéarisables, annulaires ou généralisés (terminologie de [5]).

Note remise le 2 août 1995, acceptée le 10 août 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] H. DULAC, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, *J. École polytechnique*, II série, cahier IX, 1904, p. 1-125.

[2] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 4e série, 13, 1980, p. 469-523.

[3] J. MARTINET et J.-R. RAMIS, Classification analytique des équations non linéaires résonnantes du premier ordre, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 4e série, 16, 1983, p. 671-625; Problèmes de modules pour les équations différentielles non linéaires du premier ordre, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 55, 1982, p. 63-164.

[4] J.-C. YOCCOZ et R. PÉREZ MARCO, Germes de feuilletages holomorphes à holonomic prescrite, *Complex methods in dynamical systems, Astérisque*, 222, 1994, p. 345-371.

[5] R. PÉREZ MARCO, Fixed points and circle maps, *prépublication*, Université Paris-Sud, 94-67, 1994.

[6] P. FATOU, Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 47, 1919, p. 161-271; 1920, p. 33-94; 48, 1920, p. 208-304.

[7] M. LYUBICH, The dynamics of rational transforms: The topological picture, *Russian Math. Surveys*, 41, 4, 1986, p. 43-117.

[8] R. PÉREZ MARCO, Topology of Julia sets and hedgehogs, *prépublication*, Université Paris-Sud, 94-48, 1994.

[9] R. PÉREZ MARCO, Hedgehog's dynamics (à paraître).

[10] J.-C. YOCCOZ, Linéarisation des difféomorphismes analytiques du cercle, *manuscrit*, 1989.

[11] M. R. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 49, 1979.

[12] J.-C. YOCCOZ, Conjugation différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 4e série, 17, 1984, p. 333-359.

CNRS URA 1169, Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. n° 425, 91405 Orsay, France;
UCLA, Math. Dept., 405 Hilgard Ave., Los Angeles, CA-90024, USA.