PRUEBA ELEMENTAL DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

RICARDO PÉREZ-MARCO

Abstract. Sin pretensiones de originalidad, presentamos una demostración elemental del Teorema Fundamental del Algebra, que no precisa Análisis Complejo y con uso mínimo de nociones de Topologa, de manera que puede impartirse en un primer curso de Cálculo Diferencial.

1. Enunciado.

Teorema 1. *Un polinomio no constante $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ con coeficientes complejos tiene una raíz.*

La demostración se basa en los siguientes puntos elementales:

• Quitando a $\mathbb{C}$ un número finito de puntos queda un conjunto conexo.

Esto resulta de que el conjunto resultante es conexo por arcos pues siempre podemos unir dos puntos mediante una línea poligonal que evita el conjunto finito de puntos eliminados. Por supuesto, esta propiedad es falsa para la recta real $\mathbb{R}$, para la cual cualquier punto es un punto de corte.

• Un polinomio tiene un número finito de raíces.

Esto resulta de poder dividir P por $z - \alpha$ cada vez que $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz.

• El Teorema de la Función Implícita.

El cual es un teorema básico de un primer curso de Cálculo Diferencial.

2. Demostración detallada.

Basta considerar un polinomio mónico P de grado $d \geq 1$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto finito de los puntos críticos de P, estos son las raíces de P', y $\mathcal{D} = P(\mathcal{C})$ el conjunto finito de los valores críticos de P.

• Sea $R = \{c \in \mathbb{C};$ el polinomio $P(z) - c$ tiene al menos una raíz simple y ninguna doble$\}$.

• $R \subset \mathbb{C} - \mathcal{D}$. Porque si $c \in \mathcal{D}$, entonces $c = P(z_0)$ para algún punto crítico $z_0 \in \mathcal{C}$, por lo tanto $P'(z_0) = 0$ y $P(z) - c = 0$ tiene z_0 como raíz doble. Observese que $\mathbb{C} - \mathcal{D}$ es abierto y conexo puesto que $\mathcal{D}$ es finito.

• R es abierto. Esto es una aplicación simple del Teorema de la Función Implícita. Sea $c_0 \in R \subset \mathbb{C} - \mathcal{D}$, y $z_0 \in \mathbb{C}$ una raíz de $P(z) - c_0$. Aplicando el Teorema la Función Implícita a la ecuación $F(z, c) = P(z) - c = 0$, puesto que $\frac{\partial F}{\partial z}(z_0, c_0) = P'(z_0) \neq 0$, existe una vecindad U de c_0 tal que para

2010 *Mathematics Subject Classification.* 30C15, 12D10.
Key words and phrases. Roots, complex polynomials, fundamental theorem of algebra.

$c \in U$ tenemos una raíz $z(c)$ de $P(z) - c$. Tomando U suficientemente pequeño, y por continuidad de P' y de $c \mapsto z(c)$, tenemos que $P'(z(c)) \neq 0$ y la raíz $z(c)$ es simple. Puesto que $\mathbb{C} - \mathcal{D}$ es abierto, podemos tomar $U \subset \mathbb{C} - \mathcal{D}$ y $P(z) - c$ no tiene ninguna raíz doble, por lo tanto $U \subset R$.

• R es cerrado en $\mathbb{C} - \mathcal{D}$. Consideremos una sucesión $c_n \to c_\infty \ \in \mathbb{C} - \mathcal{D}$, con $c_n \in R$. Podemos elegir una raíz simple z_n de $P(z) - c_n$. La sucesión (z_n) es acotada puesto que (c_n) es acotada, en tanto que sucesión convergente, y, cuando $z \to \infty$, $P(z)/z^d \to 1$ pues P es un polinomio mónico, por lo tanto, cuando z es grande, z no puede ser raíz de $P(z) - c_n$. Luego, podemos extraer una subsucesión convergente $(z_{n_k})_k$. Por continuidad, el límite es una raíz de $P(z) - c_\infty$, por lo tanto, este polinomio tiene raíces. Además, todas sus raíces son simples pues $c_\infty \in \mathbb{C} - \mathcal{D}$.

• R es un conjunto no vacío. Para cada $a \in \mathbb{C}$ tenemos que para $c = P(a)$, $P(z) - c$ tiene al menos $z = a$ como raíz. Si tomamos $a \in \mathbb{C} - P^{-1}(\mathcal{D})$, entonces para cualquier raíz z_0 de $P(z) - c$ con $c = P(a)$ tenemos $P(z_0) = P(a) \notin \mathcal{D}$, luego $z_0 \notin P^{-1}(\mathcal{D})$, pero $\mathcal{C} \subset P^{-1}(\mathcal{D})$, $z_0 \notin \mathcal{C}$, y la raíz z_0 es simple.

• Por lo anterior, el conjunto R es no vacío, abierto y cerrado en el conjunto conexo $\mathbb{C} - \mathcal{D}$, lo cual demuestra que $R = \mathbb{C} - \mathcal{D}$.

Finalmente, una de dos:

- Si $0 \in \mathcal{D}$, entonces $0 = P(z_0)$ para un punto crítico z_0 de P, que también es una raíz de P.
- Si $0 \notin \mathcal{D}$, entonces $0 \in R = \mathbb{C} - \mathcal{D}$ y la ecuación a $P(z) - 0 = 0$ tiene raíces simples.

En todos los casos, P tiene una raíz. Q.E.D.

3. Comentarios.

• La demostración precedente está inspirada de una bella demonstración de Daniel Litt [1], que trabaja en el espacio global de polinomios mónicos de grado $d \geq 1$ (biholomorfo a $\mathbb{C}^d$). Quitando la variedad algebraica $\mathcal{D}_d$ de polinomios con una raíz doble, que está definida por la anulación del discriminante de los polinomios. Utiliza entonces que el complemento de una varedad algebraica estricta en $\mathbb{C}^d$ es conexo. Esencialemente nuestra demostración consigue lo mismo de una forma más elemental trabajando en un espacio de polinomios de dimensión 1. En particular, sólo precisamos saber que el complemento de un conjunto finito en el plano es conexo (lo cual, para $d = 1$, es lo mismo que la conexidad del complemento de un subconjunto algebraico propio de $\mathbb{C}^d$). También evitamos usar discriminantes.

• Por supuesto, para un Teorema tan fundamental y con tantas demostraciones, es ilusorio pretender originalidad. La demostración más próxima que hemos encontrado en la literatura es una demostración publicada en el American Mathematical Monthly de Anindya Sen [2] que es ligeramente menos elemental al utilizar la propiedad topológica de un polinomio de ser propio .

• Es interesante observar, que todos los argumentos de la demostración son válidos cuando el cuerpo de base es el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$, salvo la propiedad fundamental que cuando quitamos un punto a $\mathbb{R}$ queda un espacio disconexo.

Agradecimientos. Agradezco a mis amigos Marie-Claude Arnaud, Kingshook Biswas, David Blázquez, Alain Chenciner y Yann Levagnini por sus comentarios y sugerencias que han mejorado notablemente la presentación. En particular a Kingshook por una simplificación.

References

[1] LITT, D.; *Yet another proof of the Fundamental Theorem of Algebra*, Manuscript, 2011. Ver también, www.daniellitt.com/blog/2016/10/6/a-minimal-proof-of-the-fundamental-theorem-of-algebra.

[2] SEN, A.; *Fundamental Theorem of Algebra-Yet another proof*, The American Mathematical Monthly, **107**, 9, p. 842-843, 2000.

CNRS, IMJ-PRG, Unversité de Paris, Boîte courrier 7012, 75005 Paris Cedex 13, France

E-mail address: ricardo.perez.marco@gmail.com