Université Paris Cité

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Discipline : Mathématiques

Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche

Université Paris Cité

présenté publiquement le 22/01/2026

par M. Romain PETRIDES

Problèmes variationnels en géométrie spectrale et applications

Devant la commission d'examen formée de :

Mme Ailana FRASER, University of British Columbia, *Rapportrice*
M. Colin GUILLARMOU, Université Paris Saclay, *Rapporteur*
Mme Isabelle GALLAGHER, Université Paris Cité, *Examinatrice*
M. Frédéric HÉLEIN, Université Paris Cité, *Rapporteur interne*
M. Iosif POLTEROVICH, Université de Montréal, *Examinateur*
M. Tristan RIVIÈRE, ETH Zürich, *Examinateur*

Remerciements

Tout d'abord, j'exprime ma gratitude envers Ailana Fraser, Colin Guillarmou et Frédéric Hélein pour l'honneur qu'ils me font de rapporter ce mémoire. Je remercie également Isabelle Gallagher, Iosif Polterovich et Tristan Rivière pour leur participation au jury.

Je remercie à nouveau Frédéric Hélein pour sa lecture attentive de la version préliminaire du manuscrit et ses remarques pertinentes.

Je remercie mes collaborateurs : Emmanuel Humbert, Mikhail Karpukhin, Paul Laurain, Bruno Premoselli, Daniel Stern et David Tewodrose. Chacun a pu me faire découvrir d'une nouvelle façon la joie de travailler à plusieurs. Je remercie également Giada Franz, Laurent Hauswirth, Paul Laurain, Eric Toubiana, Rabah Souam, etc qui contribuent inlassablement au dynamisme du Séminaire de Géométrie, tous les lundis.

Après ma thèse, j'ai effectué ma recherche à l'IMJ-PRG, dans un cadre idéal de travail. Je remercie tous ses membres (passés et actuels, administratifs compris) qui contribuent à de riches discussions, scientifiques ou non, en particulier les membres de l'équipe Géométrie et Dynamique, comme Marie-Claude, Anton et André pour leurs conseils précieux à la direction de l'équipe. De même, je remercie tous les membres de l'UFR à l'Université Paris Cité pour leur accueil, leur dévouement et la bonne ambiance qu'ils apportent à Sophie Germain. Une mention spéciale pour mes co-bureaux (Eric et Jack) et pour mes collègues de sport (Benoît, Cyril, François, Hussein, Matteo, Muriel, etc) avec qui j'ai pu pratiquer de l'escalade, de la course à pieds, du futsal etc, mais aussi de musique (Benoît, Catherine, Frédéric, Hussein, Isabelle, etc) qui m'ont notamment fait découvrir les concerts annuels de Sophie Germain.

Je garde bien sûr en tête Olivier Druet qui m'a aidé à grandir mathématiquement et pour les quelques riches discussions que nous avons pu avoir depuis ma thèse, ainsi que toutes celles et ceux que j'ai rencontrés entre la prépa et la thèse en passant par l'ENS de Lyon, et que je recroise avec plaisir, en particulier François, Adriane, Thomas, Cécile, Blanche, Benoît, Kévin, Alessandro, Tomás, Joon, Pierre-Antoine, Julien, Bruno, Pierre-Damien, Christian, Sébastien, etc

Enfin, une gratitude infinie envers mon entourage familial pour tout le soutient, et plus encore pour celle qui m'accompagne depuis plusieurs années maintenant : merci Pamela !

Introduction

Dans ce mémoire d'habilitation, je présente les travaux que j'ai effectués après mon doctorat dans les domaines de l'analyse géométrique et de la géométrie spectrale. Une grande partie de mes résultats se situe à l'interface entre la théorie des surfaces minimales et l'optimisation de valeurs propres d'opérateurs différentiels en fonction de la géométrie d'une variété.

Les surfaces minimales forment un champ très vaste d'étude qui demeure fondamental en géométrie différentielle, en calcul des variations et en physique mathématique. Elles peuvent être vues comme une généralisation du problème des géodésiques. Dans des contextes variés, on cherche à les construire, voire à les classifier, ou comprendre leur rigidité. Elles sont aussi des outils centraux en analyse géométrique. Dans mes travaux, je me concentre sur leur description paramétrique par des applications conformes et harmoniques. Ce point de vue a été primordial dans la résolution du problème de Plateau par Douglas [Dou31] et Radó [Rad30] ou encore Morrey [Mor48]. Cela a renforcé l'intérêt d'obtenir des résultats d'existence et de régularité des applications harmoniques, ainsi que des EDP elliptiques non linéaires de la même famille qui paramètrent des généralisations des surfaces minimales (surfaces à courbure moyenne constante, surfaces de Willmore, etc). Comme on le verra, ce point de vue permet aussi de relier des surfaces minimales particulières aux points critiques de fonctionnelles spectrales.

En optimisation spectrale, les valeurs propres sont des fonctionnelles qui dépendent de la forme et de la topologie du domaine, de l'opérateur associé, et/ou de la structure géométrique ambiante. On cherche à les borner et à optimiser ces bornes. On décrit également les formes critiques qui réalisent ces bornes si elles existent. Le problème le plus emblématique formulé par Rayleigh a été résolu de manière indépendante par Faber [Fab23] et Krahn [Kra25] : les domaines qui minimisent la première valeur propre de l'opérateur de Laplace avec des conditions au bord de Dirichlet parmi les domaines de même volume dans $\mathbb{R}^n$ sont les boules euclidiennes. Ce problème est très similaire au problème isopérimétrique (remplacer la première valeur propre par le périmètre), et la preuve de ce résultat utilise d'ailleurs l'inégalité isopérimétrique.

On distingue deux types de problèmes d'optimisation de valeurs propres. Dans le premier type, l'espace ambiant est prescrit (par exemple, l'espace euclidien, sa sphère, l'espace hyperbolique etc) et on optimise sur l'ensemble des domaines de cet espace. On parle ici d'optimisation de forme. Les résultats emblématiques sont les inégalités de Faber-Krahn [Fab23, Kra25], de Szegö-Weinberger [Sze54, Wei56] ou de Weinstock-Brock [Wei54, Bro01]. Dans le deuxième type, la topologie ambiante est prescrite (sur une variété donnée) mais l'optimisation a lieu par rapport à des potentiels qui apparaissent dans l'opérateur, ou à la métrique riemannienne sur la variété (ou encore la structure CR, la métrique sous-riemannienne, la structure RCD, etc). Un résultat emblématique est l'inégalité de

Hersch [Her70] : la sphère ronde est le maximiseur de la première valeur propre non nulle du Laplacien parmi les métriques de même aire sur une sphère topologique.

Mes travaux se concentrent plutôt sur le deuxième type de problèmes. Une de ses spécificités est que les conditions d'Euler-Lagrange associées à des variations de métriques sont riches, autant du point de vue analytique que géométrique. Par exemple, un lien entre les métriques riemanniennes critiques de valeurs propres et certaines surfaces minimales a d'abord été observé par Nadirashvili [Nad96] (pour le Laplacien), puis repopularisé par Fraser et Schoen [FS16] (pour l'opérateur Dirichlet à Neumann). Ce lien permet à la fois de calculer précisément des invariants spectraux et de construire par des méthodes indirectes de nouvelles surfaces minimales. Depuis, de nombreux travaux ont identifié des interprétations géométriques des conditions d'Euler-Lagrange associées aux points critiques de fonctionnelles dépendant de valeurs propres pour d'autres opérateurs, ou de leurs combinaisons. Bien que les EDPs associées aux fonctions propres sont linéaires, il est amusant de constater que l'optimisation spectrale pour des opérateurs bien choisis est associée à des systèmes d'EDPs non linéaires qui ont un sens géométrique.

Ma contribution principale au domaine est la construction d'une théorie variationnelle robuste permettant de démontrer l'existence ou l'inexistence de métriques optimales pour des fonctionnelles spectrales, c'est à dire définies comme des combinaisons finies de valeurs propres d'opérateurs dépendant de la métrique. L'objet du Chapitre I est de restituer ce travail de la manière la plus élémentaire possible à travers deux exemples types très différents qu'on développe dans les chapitres suivants. Le premier exemple est la maximisation renormalisée par l'aire de la première valeur propre du Laplacien dans la classe conforme d'une surface (variété de dimension 2) riemannienne compacte sans bord donnée. Bien qu'il soit résolu depuis [Pet14a], il est intéressant de revoir cet exemple à la lumière de mes nouvelles techniques dans [Pet25d]. Les conséquences de ces techniques seront détaillées dans le Chapitre II. Le deuxième exemple est l'optimisation renormalisée par le volume des valeurs propres du Laplacien conforme dans la classe conforme d'une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geqslant 3$. C'est le cadre typique de [HPP25] détaillé dans le Chapitre IV.

Le Chapitre I synthétise donc les aspects théoriques de [PT24, Pet25d, Pet24a, HPP25] et unifie ces papiers dans une approche commune. Dans [PT24], nous donnons des outils analytiques permettant de calculer des points critiques de fonctionnelles spectrales grâce à l'utilisation du sous-différentiel de Clarke. Nous donnons également de nouveaux exemples d'interprétation géométrique d'équations d'Euler Lagrange, et de nouvelles caractérisations fines de métriques localement optimales. Dans [Pet25d, Pet24a], j'introduis une bonne façon d'appliquer le principe variationnel d'Ekeland pour montrer l'existence de métriques maximales pour des fonctionnelles spectrales associées au laplacien et à l'opérateur Dirichlet à Neumann en dimension 2. Cette approche s'applique autant pour l'optimisation dans une classe conforme [Pet25d] que pour l'optimisation parmi toutes les métriques [Pet24a]. Cette nouvelle approche nous a également permis de contribuer significativement à l'optimisation des valeurs propres associées aux opérateurs covariants conformes en dimension plus grande que 3 dans [HPP25]. Cela offre ainsi des perspectives de résolution de problèmes d'optimisation spectrale avec d'autres opérateurs géométriques, et également des problèmes mettant en jeu des combinaisons infinies de valeurs propres. Ceci peut donc également donner accès à de nombreux problèmes d'optimisation d'invariants Riemanniens.

Dans le Chapitre II, je présente mon résultat le plus important [Pet24a] : l'existence de métriques optimales pour une large classe de combinaisons finies de valeurs propres du Laplacien renormalisées par l'aire sur une surface compacte donnée parmi l'ensemble des métriques, quelque soit la topologie de la surface. En particulier, il existe un maximum pour la première valeur propre du Laplacien renormalisée par l'aire. Cela achève le programme initié par Hersch [Her70] qui avait résolu la question sur la sphère. Notons par exemple que Berger [Ber73] cherchait déjà à comprendre cette question pour les autres topologies comme le tore. Depuis, plusieurs travaux avaient résolu la question en genre petit : le plan projectif [LY82], le tore [Nad96], la bouteille de Klein [ESGJ06][JNP06], les surfaces orientables de genre 2 [JLN$^+$05] [NS19].

Ce résultat général est obtenu dans la continuation de mes travaux de thèse qui contenaient une première étape essentielle : la construction de métriques qui maximisent une valeur propre dans une classe conforme [Pet14a, Pet18, Pet19]. La maximisation dans une classe conforme est naturelle pour plusieurs raisons : d'abord elle est plus simple puisque le problème est réduit à une maximisation sur un espace de fonctions positives, mais surtout, les métriques critiques à classe conforme contrainte sont associées à des applications harmoniques : la théorie de la régularité sur ces applications permet de mettre en place des approches variationnelles. Enfin, comme la maximisation parmi toutes les métriques est une maximisation parmi les classes conformes, on obtient fondamentalement un problème de maximisation en dimension finie puisqu'il a lieu sur l'espace de Teichmüller.

J'ai généralisé mes travaux de thèse dans le cadre de combinaisons de valeurs propres [Pet23a, Pet24b], puis je les ai unifiés et rendus plus robustes dans [Pet25d]. Cela m'a également permis d'identifier une condition suffisante à l'existence d'un minimiseur d'une fonctionnelle spectrale parmi toutes les métriques. Je démontre cette condition suffisante dans [Pet24a] pour une large classe de fonctionnelles spectrales sur des surfaces orientables. Ainsi, il existe une métrique optimale pour la première valeur propre généralisée du Laplacien sur toute surface orientable, mais aussi par exemple pour des fonctionnelles spectrales introduites par Hersch [Her70], Berger [Ber73] et Li-Yau [LY82] (sommes d'inverses de valeurs propres), et pour bien d'autres fonctionnelles (produits de valeurs propres, sommes partielles de la fonction zeta sur les valeurs propres, etc). Dans le cas particulier de la première valeur propre, on étend ce résultat aux surfaces non orientables dans [KPS25] par une méthode différente basée sur les travaux parallèles [KS23, KKMS24].

Dans le Chapitre III, je développe des applications de l'optimisation spectrale à la théorie des surfaces minimales. En effet, j'ai remarqué dans [Pet23a] que les métriques critiques de fonctionnelles spectrales associées au Laplacien sur une surface compacte sans bord fournissent des surfaces minimales branchées dans des ellipsoïdes. De manière similaire dans [Pet24b], les métriques critiques de fonctionnelles spectrales associées à l'opérateur Dirichlet à Neumann sur une surface à bord fournissent des immersions minimales branchées à bord libre dans des ellipsoïdes. Réciproquement, toute immersion minimale branchée dans un ellipsoïde peut être vue comme un point critique d'une certaine fonctionnelle spectrale (voir [PT24]). Ce résultat élargit des travaux antérieurs de Nadirashvili, El Soufi-Ilias et Fraser-Schoen qui ne mettaient en jeu qu'une seule valeur propre (dans ce cas, la variété cible est une sphère).

Ce travail m'a permis de résoudre une question ouverte depuis 30 ans : je montre l'existence de disques minimaux à bord libre plongés non plans dans des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^3$ [Pet23b] par optimisation équivariante de combinaisons de la première et deuxième valeur propre de Steklov sur le disque, renormalisées par la longueur du bord. Bien sûr, cette méthode s'applique aussi dans le cadre sans bord [Pet25b]. L'optimisation équivariante présente un double avantage. Elle permet de restreindre le nombre de coordonnées en jeu dans l'immersion minimale branchée naturellement construite par optimisation spectrale afin que l'espace ambiant soit $\mathbb{R}^3$. C'est également une condition importante pour montrer que les immersions minimales branchées en question sont en fait plongées. Les symétries permettent donc de résoudre les principales difficultés géométriques liées à l'optimisation spectrale. L'année suivante, une approche équivariante de maximisation de la première valeur propre de Steklov renormalisée a aussi permis à Karpukhin-Kusner-McGrath-Stern de démontrer l'existence de surfaces minimales à bord libre dans des boules de $\mathbb{R}^3$ pour toute topologie orientable dans [KKMS24]. Tous ces résultats montrent la puissance de cette méthode indirecte de construction de surfaces minimales, parachevant le programme initié par Fraser et Schoen dans [FS16].

Enfin, dans le Chapitre IV, je détaille les résultats d'optimisation des valeurs propres des opérateurs conformément covariants d'ordre $2s < n$ où s est un entier sur une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension n [HPP25]. C'est une généralisation des problèmes d'optimisation de la Q-courbure (la courbure scalaire dans le cas du Laplacian conforme). Les résultats sont riches, variés et parfois surprenants si on les compare avec l'optimisation spectrale en dimension 2. L'approche détaillée dans le Chapitre I a permis de fortement unifier et généraliser les résultats précédents d'existence ou d'inexistence d'optimiseurs ou de calculs d'invariants spectraux de [AH06, GPA22].

Bien que cela ne soit pas mis en avant dans ce mémoire, je mentionne ici d'autres travaux et questions qui ne sont pas directement liés à la géométrie spectrale :

— Analytiquement, j'ai réinterprété dans le cadre de fonctionnelles spectrales les riches théories variationnelles non lisses fondées notamment par F. Clarke ou I. Ekeland dans [Cla75, Eke74]. Il serait intéressant d'étendre cette compréhension au cas non linéaire mettant en jeu des constantes optimales dans les inégalités fonctionnelles, ou des invariants géométriques plus généraux. Etendre les problèmes d'optimisation non lisse à un cadre variationnel min-max amplifierait aussi les applications géométriques. Enfin, on pourrait également développer une théorie des points critiques dans ce même cadre non lisse, en cherchant par exemple des généralisations du théorème des fonctions implicites.

— Mes travaux [LP19, Pet25c] portent sur les problèmes variationnels invariants par transformation conforme, et en particulier les applications harmoniques. Ils sont basés sur les nombreux résultats de régularité et de quantification remontant à [Hél90, Hél91, Riv07]. J'aimerais étendre la compréhension de ces problèmes sur des variétés plus générales que riemanniennes, et avec des variétés cibles de dimension infinie. Ceci a un lien avec des problèmes d'optimisation de combinaisons infinies de valeurs propres ou encore les questions de plongements isométriques par fonctions propres.

— Une méthode de Hélein [Hél02] basée sur la minimisation de l'énergie des repères mobiles permet d'uniformiser des surfaces. Dans [LP24], on donne une façon naturelle d'adapter cette méthode aux parties simplement connexes du plan dont le bord est une courbe Weil-Petersson. On fait un lien entre une énergie de repère mobile renormalisée, l'énergie renormalisée de Ginzburg-Landau (voir [BBH17]) et l'énergie de Loewner de la courbe au bord récemment introduite par Wang [Wan19]. L'objectif est d'appliquer ce travail aux surfaces minimales de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ afin de donner un lien quantitatif entre leur énergie de Willmore et l'énergie de Loewner de leur trace sur le bord de $\mathbb{H}^3$. C'est un aspect manquant dans [Bis20].

Les travaux [LP24] et [MW24] sont un premier pas dans cette direction. Dans un autre contexte, mon étudiant Martijn Kluitenberg [Klu25] utilise également la méthode de Hélein pour uniformiser les surfaces dites presque riemanniennes (un cas particulier de variétés sous-riemanniennes) contenant une singularité au bord du même type que celle de la "sphère de Grushin".

Chaque introduction de chapitre détaille un peu plus son contenu. Peu de preuves détaillées de mes résultats apparaissent dans ce mémoire : le lecteur est renvoyé à mes travaux. Toutefois, dans le Chapitre I, la synthétisation de mon approche variationnelle apporte un point de vue nouveau auquel je fournis parfois des preuves qui n'apparaissent pas tout à fait de la même façon dans mes travaux. Une extension de ce chapitre en un tout auto-contenu peut d'ailleurs faire l'objet d'un survey ou d'un cours. Chaque fin de chapitre propose des perspectives de recherche à plus ou moins long terme.

Liste des travaux de l'auteur

La liste des travaux est classée selon trois catégories. Dans chaque catégorie, ils sont ordonnés selon la date de finalisation de la première prépublication. Les étiquettes correspondent à celles de la bibliographie globale.

Travaux de thèse

[Pet14b] *Maximization of the second conformal eigenvalue of spheres.* Proceedings of the American Mathematical Society, 142(7) :2385– 2394, 2014.

[Pet14a] *Existence and regularity of maximal metrics for the first Laplace eigenvalue on surfaces.* Geom. Funct. Anal., 24(4) :1336–1376, 2014.

[Pet15] *On a rigidity result for the first conformal eigenvalue of the Laplacian.* J. Spectr. Theory, 5(1) :227–234, 2015.

[Pet18] *On the existence of metrics which maximize Laplace eigenvalues on surfaces.* Int. Math. Res. Not. IMRN, (14) :4261–4355, 2018.

[LP17] Avec Paul Laurain, *Regularity and quantification for harmonic maps with free boundary*, Advances in Calculus of Variations, 10, no. 1, 69–82, 2017.

[Pet19] *Maximizing Steklov eigenvalues on surfaces.* J. Differential Geom., 113(1) :95–188, 2019.

Travaux présentés dans le mémoire

[Pet23a] *Extremal metrics for combinations of laplace eigenvalues and minimal surfaces into ellipsoids.* Journal of Functional Analysis, 285(10) :110087, 2023.

[Pet24b] *Shape optimization for combinations of Steklov eigenvalues on Riemannian surfaces.* Math. Z., 307(1) :Paper No. 13, 44, 2024.

[Pet24c] *A variational method for functionals depending on eigenvalues.* J. London Math. Soc., Vol. 112, Issue 4, 2025.

[Pet23b] *Laplace eigenvalues and non-planar minimal spheres into 3-dimensional ellipsoids.* J Geom Anal 35, 375, 2025.

[Pet23c] *Non planar free boundary minimal disks into ellipsoids.* arXiv Preprint : 2304.12111, 2023.

[PT24] Avec David Tewodrose. *Critical metrics of eigenvalue functionals via clarke subdifferential.* accepté dans Annales de l'institut Fourier, arXiv Preprint : 2403.07841, 2024.

[Pet24a] *Geometric spectral optimization on surfaces.* arXiv Preprint : 2410.13347, 2024.

[HPP25] Avec Emmanuel Humbert et Bruno Premoselli. *Extremising eigenvalues of the GJMS operators in a fixed conformal class*. arXiv Preprint : 2505.08280, 2025.

[KPS25] Avec Mikhail Karpukhin et Daniel Stern. *Existence of metrics maximizing the first laplace eigenvalue on closed surfaces*. arXiv Preprint :2505.05293, 2025.

[Pet25a] *Isoperimetric inequalities involving steklov eigenvalues*. arXiv Preprint : 2508.10721. 2025.

Autres travaux

[LP19] Avec Paul Laurain. *Existence of min-max free boundary disks realizing the width of a manifold*. Adv. Math., 352 :326–371, 2019.

[LP24] Avec Paul Laurain. *Asymptotics for minimizers of the Ginzburg-Landau energy with optimal regularity of the boundary data and applications*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 33(5) :1251–1295, 2024.

[Pet25b] *Regularity estimates on harmonic eigenmaps with arbitrary number of coordinates*. arXiv Preprint : 2508.10448, 2025.

Table des matières

Chapitre I

Une méthode variationnelle en géométrie spectrale

Dans ce chapitre, je présente une méthode d'optimisation de valeurs propres qui peut s'appliquer dans de nombreux contextes à travers deux exemples principaux. C'est une présentation synthétique des aspects théoriques de [PT24, Pet25d, Pet24a, HPP25]. La présentation de cette méthode est nouvelle et se veut unificatrice à travers les deux exemples. Le chapitre n'est pas complètement auto-contenu puisqu'il renvoie à mes travaux mais une démonstration est donnée pour chaque énoncé qui n'est pas écrit de la même façon dans les articles dont il est tiré. Les 5 parties de ce chapitre suivent la démarche naturelle pour ces problèmes d'optimisation spectrale :

1. Bien poser le problème d'optimisation : l'infimum (ou le supremum) de la fonctionnelle doit être fini.
2. Calculer les points critiques de la fonctionnelle, c'est à dire comprendre les conditions d'ordre 1 des maxima et minima locaux, en particulier dans un cadre non lisse.
3. Donner une théorie de la régularité sur les points critiques et déduire la compacité des suites de points critiques grâce aux estimées de régularité.
4. Construire des suites optimisantes susceptibles d'être compactes au même titre que les suites de points critiques. Ce sont par exemple des suites "à la Palais Smale" qui sont proches d'être critiques pour une distance bien choisie.
5. Passer à la limite sur ces suites optimisantes et utiliser la théorie de la régularité pour obtenir un optimiseur régulier.

I.1 Présentation de deux exemples

Dans tout le chapitre, nous référons au problème de maximisation de la première valeur propre dans une classe conforme sur des surfaces avec le raccourci $Optim_{n=2}$ et à l'optimisation des valeurs propres du Laplacien conforme dans une classe conforme d'une variété riemannienne de dimension $n \geqslant 3$ avec le raccourci $Optim_{n\geqslant 3}$.

I.1.1 $Optim_{n=2}$: Maximisation de la première valeur propre du Laplacien en dimension 2

Soit Σ une surface (variété différentiable de dimension 2) compacte sans bord et connexe. On note $Met(\Sigma)$ l'ensemble des métriques Riemanniennes sur Σ. Pour $g \in$

$Met(\Sigma)$ on note $\Delta_g = -div_g \nabla$ le Laplacien associé et sa première valeur propre non nulle :

$$\lambda_1(\Sigma, g) = \inf_{\substack{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \\ \int_\Sigma \phi dA_g = 0}} \frac{\int_\Sigma |\nabla \phi|_g^2 dA_g}{\int_\Sigma \phi^2 dA_g}.$$

où dA_g est la mesure d'aire par rapport à la métrique g. On note la première valeur propre renormalisée (invariante par dilatation de la métrique)

$$\bar{\lambda}_1(\Sigma, g) = \lambda_1(\Sigma, g) A_g(\Sigma)$$

où $A_g(\Sigma) = \int_\Sigma dA_g$ et on souhaite résoudre le problème de maximisation suivant

$$\Lambda_1(\Sigma) = \sup_{g \in Met(\Sigma)} \bar{\lambda}_1(\Sigma, g).$$

ainsi qu'une version contrainte dans la classe conforme $[g] = \{\beta g \in Met(\Sigma); \beta \in \mathcal{C}^\infty_{>0}(\Sigma)\}$

$$\Lambda_1(\Sigma, [g]) = \sup_{\tilde{g} \in [g]} \bar{\lambda}_1(\Sigma, \tilde{g}).$$

Les propriétés d'invariance conforme du Laplacien permettent de reformuler ce problème pour une métrique fixée g sur des espaces de fonctions où on peut noter $\bar{\lambda}_1(\beta) = \bar{\lambda}_1(\Sigma, \beta g)$

$$\Lambda_1(\Sigma, [g]) = \sup_{\beta \in \mathcal{C}^\infty_>} \bar{\lambda}_1(\beta) = \sup_{\beta \in \mathcal{C}^\infty_>} \inf_{\substack{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \\ \int_\Sigma \phi \beta dA_g = 0}} \frac{\int_\Sigma |\nabla \phi|_g^2 dA_g}{\int_\Sigma \phi^2 \beta dA_g} \int_\Sigma \beta dA_g. \quad \text{(I.1)}$$

La proposition suivante implique que $\bar{\lambda}_1$ ne peut pas avoir de minimiseur même parmi les métriques d'une classe conforme. On utilise ici un argument classique de type "haltères de Cheeger".

Proposition I.1.1.

$$\inf_{\tilde{g} \in [g]} \bar{\lambda}_1(\Sigma, \tilde{g}) = 0.$$

On peut écrire la démonstration avec une suite de métriques $e^{2u_i} g$ qui vérifient

$$e^{2u_i} dA_g \rightharpoonup_\star \delta_x + \nu$$

lorsque $i \to +\infty$ pour la convergence faible-$\star$ des mesures où $x \in M$ et ν est une mesure non nulle sans atome. On construit alors deux fonctions test cut-off à support disjoint (donc orthogonales) d'énergie arbitrairement petite en utilisant que $\{x\}$ est de capacité nulle (voir par exemple [Kok14, Proposition 1.1, Lemma 2.1]). De manière générale avec un argument similaire, on a $\inf_{\tilde{g} \in [g]} \bar{\lambda}_k(\Sigma, \tilde{g}) = 0$ où λ_k est la k-ème valeur propre non nulle du Laplacien. Par contre, le problème de maximisation est bien posé

Théorème I.1.2 ([YY19, LY82, Kar16])**.**

$$\Lambda_1(\Sigma, [g]) \leqslant 2A_c(\Sigma, [g]) < +\infty$$

où on note l'aire conforme

$$A_c(\Sigma, [g]) = \lim_{n \to +\infty} \inf_{\substack{\phi : (\Sigma, g) \to (\mathbb{S}^n, h) \\ \phi^\star h \in [g]}} \max_{\theta \in Conf(\mathbb{S}^n)} A_{(\theta \circ \phi)^\star h}(\Sigma)$$

où $(\mathbb{S}^n, h)$ est la sphère de dimension n munie de la métrique ronde et $Conf(\mathbb{S}^n)$ est le groupe des difféomorphismes conformes de la sphère. On a aussi si Σ est de genre γ,

$$\Lambda_1(\Sigma) \leqslant \begin{cases} 8\pi \left[\frac{\gamma+3}{2}\right] & \text{si } \Sigma \text{ est orientable} \\ 16\pi \left[\frac{\gamma+3}{2}\right] & \text{si } \Sigma \text{ est non orientable} \end{cases} < +\infty.$$

La démonstration repose sur des utilisations astucieuses du célèbre argument de Hersch qui avait résolu le problème pour la sphère $\Sigma = \mathbb{S}^2$:

$$\Lambda_1(\mathbb{S}^2) = 8\pi$$

où le maximum est uniquement atteint par les métriques rondes. En fait, l'argument topologique de Hersch [Her70] remonte à Szegö [Sze54] pour le problème similaire de maximisation de la première valeur propre non nulle du Laplacien à conditions de Neumann sur les domaines simplement connexes du plan ou Weinstock [Wei54] pour la maximisation de la première valeur propre non nulle de Steklov sur les domaines simplement connexes.

I.1.2 $Optim_{n\geqslant 3}$: Optimisation des valeurs propres du Laplacien conforme en dimension $n \geqslant 3$

Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension $n \geqslant 3$ compacte sans bord connexe.

$$\lambda_k(M,g) = \inf_{E\in\mathcal{G}_k(\mathcal{C}^\infty(M))} \max_{\phi\in E\setminus\{0\}} \frac{\int_M (|\nabla\phi|_g^2 + c_n S_g \phi^2) dv_g}{\int_M \phi^2 dv_g} = \inf_{E\in\mathcal{G}_k(\mathcal{C}^\infty(M))} \max_{\phi\in E\setminus\{0\}} \frac{\int_M \phi L_g \phi dv_g}{\int_M \phi^2 dv_g}$$

où dv_g est la mesure de volume par rapport à g, $c_n = \frac{n-2}{4(n-1)}$, S_g est la courbure scalaire de g, $L_g = \Delta_g + c_n S_g$ le Laplacien conforme (où $L_g = -div_g \nabla$) et $\mathcal{G}_k(V)$ est la k-Grassmannienne de V : l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de V. La k-ème valeur propre renormalisée (invariante par dilatation) est

$$\bar{\lambda}_k(M,g) = \lambda_k(M,g) V_g(M)^{\frac{2}{n}}$$

où $V_g(M) = \int_M dv_g$. On s'intéresse aux problèmes d'optimisation à classe conforme contrainte suivants

$$\Lambda_k(M,[g]) = \begin{cases} \inf_{\tilde g\in[g]} \bar{\lambda}_k(\tilde g) \text{ si } k \geqslant k_+ \\ 0 \text{ si } k_- < k < k_+ \\ \sup_{\tilde g\in[g]} \bar{\lambda}_k(\tilde g) \text{ si } k \leqslant k_- \end{cases}$$

où on définit

$$k_+ = \min\{k \in \mathbb{N}^\star ; \lambda_k(g) > 0\}$$

$$k_- = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N}^\star ; \lambda_k(g) < 0\} \\ 0 \text{ si } \forall k \in \mathbb{N}^\star, \lambda_k(g) \geqslant 0 \end{cases}$$

de sorte que $\dim \operatorname{Ker} L_g = k_+ - k_- - 1$. Les propriétés d'invariance conforme du Laplacien conforme permettent d'écrire pour $\beta \in \mathcal{C}^\infty_>(M)$, $\bar{\lambda}_k(\beta) = \bar{\lambda}_k(M, \beta g)$ comme

$$\bar{\lambda}_k(\beta) = \inf_{E\in\mathcal{G}_k(\mathcal{C}^\infty(M))} \max_{v\in E\setminus\{0\}} \frac{\int_M v L_g v dv_g}{\int_M v^2 \beta dv_g} \left(\int_M \beta^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} .$$

Si on note $\tilde g = \beta g$ où $\beta = u^{\frac{4}{n-2}}$, noter que les fonctions propres se réécrivent $v = u\phi$

$$L_{\tilde g}\phi = \lambda\phi \Leftrightarrow L_g v = \lambda\beta v.$$

On remarque que k_+ et k_- sont invariants conformes au sens où leur définition est indépendante du choix de la métrique g dans sa classe conforme $[g]$. En effet, si $E \in \mathcal{G}_k(\mathcal{C}^\infty(M))$,

$$\max_{\phi\in E\setminus\{0\}} \frac{\int_M \phi L_{\tilde g}\phi dv_{\tilde g}}{\int_M \phi^2 dv_{\tilde g}} < 0 \Longleftrightarrow \max_{v\in(u\cdot E)\setminus\{0\}} \frac{\int_M v L_g v dv_g}{\int_M v^2 \beta dv_g} < 0$$

car le numérateur est invariant conforme et le signe du dénominateur est invariant conforme. Par ailleurs, il est clair que la multiplication par u est un isomorphisme $\operatorname{Ker} L_{\tilde{g}} \to \operatorname{Ker} L_g$.

Le thérème suivant montre que les autres questions d'optimisation ne sont pas pertinentes.

Théorème I.1.3 ([AJ12]). *Soit $k \in \mathbb{N}^\star$,*

$$\text{Si } k \geqslant k_+, \sup_{\tilde{g}\in[g]} \bar{\lambda}_k(M,\tilde{g}) = +\infty.$$

$$\text{Si } k \leqslant k_+, \inf_{\tilde{g}\in[g]} \bar{\lambda}_k(M,\tilde{g}) = -\infty.$$

En revanche, on montre

Théorème I.1.4 ([HPP25, Corollary 1.3]). *Soit $k \in \mathbb{N}^\star$,*

$$\text{Si } k \geqslant k_+, \inf_{\tilde{g}\in[g]} \bar{\lambda}_k(M,\tilde{g}) > 0.$$

$$\text{Si } k \leqslant k_+, \sup_{\tilde{g}\in[g]} \bar{\lambda}_k(M,\tilde{g}) < 0.$$

Démonstration. Soit $\beta \in \mathcal{C}^\infty_{>0}$. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre non nulle du Laplacien conforme pour la métrique $\tilde{g} = \beta g$, et $v \in \mathcal{C}^\infty(M)$ une fonction tels que

$$L_g v = \lambda \beta v, \qquad \int_M \beta^{\frac{n}{2}} dv_g = 1, \qquad \int_M \beta v^2 dv_g = 1$$

de sorte que $\lambda = \lambda_k(\beta)$ pour $k \geqslant k_+$ ou $k \leqslant k_-$. On écrit $v = w + \kappa$ où $\kappa \in \operatorname{Ker} L_g$ et $w \in (\operatorname{Ker} L_g)^\perp$ où $\perp$ désigne l'espace orthogonal pour la norme $L^2(g)$. On obtient

$$L_g w = \lambda \beta v.$$

Par théorie elliptique standard, il existe une constante C_g telle que

$$\|w\|_{H^1(g)} \leqslant C_g \|L_g w\|_{H^{-1}(g)} \leqslant C_g |\lambda| \|\beta g\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \leqslant C_g |\lambda| \|\beta\|^{\frac{1}{2}}_{L^{\frac{n}{2}}} \left(\int_M \beta v^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_g |\lambda|$$

où la dernière inégalité est une inégalité de Hölder. Par ailleurs,

$$0 = \int_M (L_g \kappa)\, v dv_g = \int_M (L_g v)\, \kappa dv_g = \lambda \int_M \beta v \kappa$$

implique comme $\lambda \neq 0$ que

$$\int_M \beta v \kappa dv_g = 0.$$

Ainsi on a les minorations suivantes par injection de Sobolev (qui donne la constante K_g) et une inégalité de Hölder,

$$\|w\|^2_{H^1(g)} \geqslant K_g \|w\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \geqslant K_g \int_M \beta w^2 dv_g = K_g \left(\int_M \beta v^2 dv_g + \int_M \beta \kappa^2 dv_g \right) \geqslant K_g.$$

On obtient

$$|\lambda| \geqslant \frac{\sqrt{K_g}}{C_g}.$$

□

On note que pour $k = 1$, le problème d'optimisation est équivalent au problème de Yamabe.

Théorème I.1.5.

$$\Lambda_1(M,[g]) = Y(M,[g])$$

où $Y(M,[g])$ est l'invariant de Yamabe :

$$Y(M,[g]) = \inf_{u\in\mathcal{C}^\infty_{>0}(M)} \frac{\int_M uL_g u dv_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

et $\Lambda_1(M,[g])$ est atteint en β si et seulement si $Y(M,[g])$ est atteint en $\beta^{\frac{n-2}{4}}$.

Démonstration. Supposons $k_+ = 1$, un presque minimiseur u pour $Y(M,[g])$ peut être testé dans la caractérisation de $\Lambda_1(M,[g])$ par deux infimums avec $\beta = u^{\frac{4}{n-2}}$ et $v = u$. Cela donne immédiatement $\Lambda_1(M,[g]) \leqslant Y(M,[g])$. Réciproquement, un presque minimiseur β pour $\Lambda_1(M,[g])$ peut être testé avec v une solution non nulle de $L_g v = \lambda_1(\beta)\beta v$ dans la caractérisation de $Y(M,[g])$. Noter qu'en tant que première fonction propre, v peut être choisie strictement positive. La simple inégalité de Hölder

$$\int_M v^2\beta dv_g \leqslant \left(\int_M \beta^{\frac{n}{2}}dv_g\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_M v^{\frac{2n}{n-2}}dv_g\right)^{\frac{n-2}{n}}$$

conclut l'inégalité $\Lambda_1(M,[g]) \geqslant Y(M,[g])$.

Pour $k_- = 0$ et $k_+ > 1$, il est clair que $Y(M,[g]) = \Lambda_1(M,[g]) = 0$.

Supposons maintenant $k_- \geqslant 1$, c'est à dire $Y(M,[g]) < 0$. Soit u un minimiseur lisse strictement positif de $Y(M,[g])$ (existe de manière élémentaire dans le cas strictement négatif). Par définition on a d'abord $\Lambda_1(M,[g]) \geqslant \bar{\lambda}_1(\beta)$ où $\beta = u^{\frac{4}{n-2}}$. Comme u est une solution de Yamabe, c'est aussi une première fonction propre pour $\bar{\lambda}_1(\beta) = Y(M,[g])$ et on obtient $\Lambda_1(M,[g]) \geqslant Y(M,[g])$. Réciproquement, si β est un presque maximiseur pour $\Lambda_1(M,[g])$, on teste u dans la caractérisation variationnelle de $\bar{\lambda}_1(\beta)$ et l'inégalité de Hölder précédente permet de conclure que $\Lambda_1(M,[g]) = Y(M,[g])$. □

I.2 Equations d'Euler-Lagrange

Il est bien compris depuis Nadirashvili [Nad96], El Soufi-Ilias [ESI03, ESI08] et Fraser-Schoen [FS16, FS13] que les équations d'Euler-Lagrange pour les métriques extrémales fournissent des conditions géométriques et analytiques très intéressantes à exploiter. De nombreux autres travaux obtiennent des interprétations géométriques ou analytiques sur les points critiques de valeurs propres [AH06, Amm09, KM21, KMP23, PA22, GPA22] ou de fonctionnelles spectrales [ESI02, LM23, Med23, Pet23a, Pet24b, PT24]. On extrait ici les résultats les plus importants de [PT24] en les adaptant le plus possible à la présentation de ce chapitre.

Le but de [PT24] est de donner un cadre théorique unificateur pour calculer des équations d'Euler-Lagrange de points critiques et/ou les extrema locaux de fonctionnelles spectrales générales et de donner de nombreux exemples d'applications géométriques. En particulier, comme les fonctionnelles spectrales sont a priori non lisses en les points de multiplicité des valeurs propres, on spécifie la théorie des sous-différentiels sur les fonctionnelles Lipschitziennes non convexes initiée par Clarke [Cla75] à ce cadre. Par ailleurs, on donne de nouvelles conditions fines sur les extrema de valeurs propres du Théorème I.2.7 qui donnent concrètement le Lemme I.2.10 et qui s'appliquent dans [HPP25] (voir Théorème IV.3.7 dans le Chapitre IV).

I.2.1 Cadre théorique

Dans cette section, on se concentre sur le travail dans [PT24] qui concerne les métriques localement extrémales pour une valeur propre donnée. Le but est de calculer les équations d'Euler-Lagrange pour les deux problèmes de ce chapitre. La définition du sous-différentiel de Clarke n'est pas utile ici. Par contre, une finesse supplémentaire apparaît dans ce mémoire de manière nouvelle : nous calculons des équations d'Euler Lagrange pour des points extremaux x qui sont sur le bord d'un domaine $\mathcal{A}$. Les directions dans lesquelles nous calculons les variations premières sont restreintes à un cône $\mathcal{C}_x$. Nous quantifions à quel point cela restreint l'équation d'Euler-Lagrange. Nous appliquerons ces résultats au cône $\mathcal{C}_x$ des fonctions (ou mesures) positives ou nulles. C'est une façon unifiante de présenter les calculs de [Pet25d, Pet24a, HPP25].

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$, $\mathcal{A} \subset X$ un sous-ensemble dit admissible de X et H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|_H$. Pour $x \in X$, on note $Q(x,\cdot)$ une forme quadratique définie positive sur H avec $B(x,\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire associée et $G(x,\cdot)$ une forme quadratique sur H avec $\Gamma(x,\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire associée. On pose le quotient de Rayleigh

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{R} & : & \mathcal{A} \times H \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,u) & \mapsto & \frac{G(x,u)}{Q(x,u)} \end{array}$$

Les choix concrets de X, $\mathcal{A}$, H et $\mathcal{R}$ sont donnés dans la Sous-section I.2.2 pour $Optim_{n=2}$ et $Optim_{n\geqslant 3}$, et plus finement dans la Sous-section I.4.3 pour $Optim_{n=2}$ et dans la Sous-section I.4.2 pour $Optim_{n\geqslant 3}$.

On écrit les hypothèses suivantes pour tout $x \in \mathcal{A}$, il existe $C_x \geqslant 1$, un voisinage ouvert U_x de x tels que

(H_1) Il existe $\Lambda_x > 0$ tel que

$$\forall x' \in U_x \cap \mathcal{A}, C_x^{-1}\|\cdot\|_H \leqslant N(x',\cdot) \leqslant C_x\|\cdot\|_H.$$

où $N(x',\cdot) = (G(x',\cdot) + \Lambda_x Q(x',\cdot))^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur H.

(H_2) Pour tout $u \in H$, $Q(\cdot,u)$ et $G(\cdot,u)$ sont différentiables (on note Q_x et G_x leur différentielle) et Q, G, Q_x et G_x sont continus sur $X \times H$ et

$$\forall x' \in U_x, \forall u_1, u_2 \in H, \|B_x(x',u_1,u_2)\|_{X^\star} + \|\Gamma_x(x',u_1,u_2)\|_{X^\star} \leqslant C_x\|u_1\|_H\|u_2\|_H.$$

(H_3) L'identité $(H, N(x,\cdot)) \to (H, Q^{\frac{1}{2}}(x,\cdot))$ est compacte.

On remarque que l'hypothèse (H_3) garantit que les valeurs propres abstraitement définies par

$$\lambda_k(x) = \inf_{E \in \mathcal{G}_k(H)} \max_{u \in E \setminus \{0\}} \mathcal{R}(x,u)$$

sont atteintes sur l'espace des fonctions propres

$$E_k(x) = \{u \in H; \forall v \in H, \Gamma(x,u,v) = \lambda_k(x) B(x,u,v)\}.$$

Les hypothèses (H_1) et (H_2) vont garantir (sans l'hypothèse (H_3)) que les applications $\lambda_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sont localement Lipschitziennes :

Proposition I.2.1. *On suppose* (H_1) *et* (H_2). *Pour* $k \geqslant 1$, $\lambda_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *est localement Lipschitzienne.*

Démonstration. On procède en deux étapes
Etape 1 : λ_k est semi-continue supérieurement.
On suppose que pour $x_i, x \in \mathcal{A}$,

$$\|x_i - x\|_X \to 0 \text{ et } \lambda_k(x_i) \to \limsup_{y \to x} \lambda_k(y)$$

lorsque $i \to +\infty$. Soit $\delta > 0$ et soit $V \in \mathcal{G}_k(H)$ tel que

$$\max_{u \in V \setminus \{0\}} \mathcal{R}(x, u) \leqslant \lambda_k(V) + \delta.$$

On teste V pour la caractérisation variationnelle de x_i :

$$\lambda_k(x_i) \leqslant \max_{u \in V \setminus \{0\}} \mathcal{R}(x_i, u) = \mathcal{R}(x_i, u_i)$$

où $u_i \in V$ est choisi atteignant le max et satisfaisant $\|u_i\|_H = 1$. Comme V est de dimension finie, quitte à prendre une sous-suite, u_i converge dans H vers $u \in V \setminus \{0\}$. Par continuité de $\mathcal{R}$,

$$\limsup_{y \to x} \lambda_k(y) = \lim_{i \to +\infty} \lambda_k(x_i) \leqslant \mathcal{R}(x, u) \leqslant \lambda_k(x) + \delta$$

et en faisant $\delta \to 0$, on obtient la semi-continuité supérieure.
Etape 2 : $\lambda_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne.
Soit $x \in \mathcal{A}$. Soit $\epsilon > 0$ et $x_1, x_2 \in B_\epsilon^X(x) \subset U_x$. Soit $0 < \delta \leqslant 1$ et soit $V_1 \in \mathcal{G}_k(H)$ tel que

$$\max_{u \in V_1 \setminus \{0\}} \mathcal{R}(x_1, u) \leqslant \lambda_k(x_1) + \delta.$$

On teste V pour $\lambda_k(x_2)$. Soit $v \in V_1 \setminus \{0\}$ tel que

$$\lambda_k(x_2) \leqslant \max_{u \in V_1 \setminus \{0\}} \mathcal{R}(x_2, u) = \mathcal{R}(x_2, v).$$

On calcule par (H_2)

$$G(x_2, v) = G(x_1, v) + \int_0^1 \langle G_x((1-s)x_1 + sx_2, v)x_2 - x_1 \rangle \leqslant G(x_1, v) + C_x \|v\|_H^2 \|x_1 - x_2\|_X.$$

Ensuite, (H_3) garantit que

$$\|v\|_H^2 \leqslant C_x^2 N(x_1, v)^2 \leqslant C_x^2 Q(x_1, v) \left(\Lambda_x + \lambda_k(x_1) + \delta\right).$$

En choisissant $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on peut supposer par la semi-continuité supérieure que $\forall y \in B_\epsilon^X(x) \subset U_x$, $\lambda_k(y) \leqslant \lambda_k(x) + 1$. Ce qui donne pour $C'_x = C_x^3(\Lambda_x + \lambda_k(x) + 2)$

$$G(x_2, v) \leqslant G(x_1, v) + C'_x Q(x_1, v) \|x_1 - x_2\|_X.$$

Par un calcul similaire, on a aussi

$$|Q(x_2, v) - Q(x_1, v)| \leqslant C'_x Q(x_1, v) \|x_1 - x_2\|_X.$$

Quitte à réduire $\epsilon > 0$, on peut supposer $\epsilon \leqslant (2C'_x)^{-1}$ de sorte que

$$\frac{G(x_2,v)}{Q(x_2,v)} \leqslant \frac{G(x_1,v)}{Q(x_1,v)} \frac{1}{1 \pm C'_x \|x_1 - x_2\|} + 2C'_x \|x_1 - x_2\|_X$$

où $\pm = +$ si $G(x_1, v) \geqslant 0$ et $\pm = -$ si $G(x_1, v) \leqslant 0$. On déduit

$$\mathcal{R}(x_2, v) \leqslant \lambda_k(x_1) + \delta + 2C'_x \left(|\lambda_k(x)| + 3\right) \|x_2 - x_1\|_X$$

en faisant $\delta \to 0$, on obtient $C''_x \geqslant 1$ tel que

$$\lambda_k(x_2) \leqslant \lambda_k(x_1) + C''_x \|x_1 - x_2\|_X$$

et on échange les rôles de x_1 et x_2 pour obtenir la proposition. □

On se propose avec les trois hypothèses de calculer les dérivées directionnelles à droite de λ_k en $x \in \mathcal{A}$ dans les directions d'un cône $\mathcal{C}_x$ qui satisfait

$$(H_4) \qquad \forall h \in \mathcal{C}_x, \exists \varepsilon_h > 0, \forall t \in [0, \epsilon_h], x + th \in \mathcal{A}.$$

Théorème I.2.2 ([PT24]). *On suppose (H_1), (H_2) et (H_3). Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ alors pour $x \in \mathcal{A}$ et $h \in \mathcal{C}_x$ (où $\mathcal{C}_x$ satisfait (H_4)),*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{|t=0^+} \lambda_k(x+th) &= \min_{F \in \mathcal{G}_{p_k(x)}(E_k(x))} \max_{u \in F \setminus \{0\}} \langle \mathcal{R}_x(x,u), h \rangle \\ &= \max_{F \in \mathcal{G}_{q_k(x)}(E_k(x))} \min_{u \in F \setminus \{0\}} \langle \mathcal{R}_x(x,u), h \rangle \end{aligned} \tag{I.2}$$

où $p_k(x)$ est défini tel que $k = i_k(x) + p_k(x) - 1$ où $i_k(x) = \min\{i \in \mathbb{N}^\star, \lambda_i(x) = \lambda_k(x)\}$ et $q_k(x)$ est défini tel que $k = I_k(x) - q_k(x) + 1$ où $I_k(x) = \max\{i \in \mathbb{N}^\star, \lambda_i(x) = \lambda_k(x)\}$ de sorte que si $m_k(x) = \sharp\{i \in \mathbb{N}^\star, \lambda_i(x) = \lambda_k(x)\}$ est la multiplicité de $E_k(x)$, on a $q_k(x) + p_k(x) = m_k(x) + 1$.

Démonstration. On procède en deux étapes.

Etape 1 : Soit $x_i, x \in \mathcal{A}$ tels que $\|x_i - x\|_X \to 0$ lorsque $i \to +\infty$ et soit $u_i \in E_k(x_i)$ telle que $Q(x_i, u_i) = 1$. Alors quitte à prendre une sous-suite il existe $u \in E_k(x)$ tel que $\|u_i - u\|_H \to 0$ lorsque $i \to +\infty$.

On a $N(x_i, u_i)^2 = \lambda_x + \lambda_k(x_i)$ qui est borné car $\lambda_k(x_i)$ converge vers $\lambda_k(x)$. Par (H_1), (u_i) est bornée dans H donc quitte à prendre une sous-suite, elle converge faiblement vers u dans H. En utilisant de plus (H_3), on obtient

$$Q(x, u_i) \to Q(x, u) \text{ et } \forall v \in H, \Gamma(x, u_i, v) \to \Gamma(x, u, v)$$

lorsque $i \to +\infty$. En utilisant (H_2), on obtient même

$$Q(x_i, u_i) \to Q(x, u) \text{ et } \forall v \in H, \Gamma(x_i, u_i, v) \to \Gamma(x, u, v)$$

lorsque $i \to +\infty$. En particulier, on obtient $Q(x, u) = 1$. En passant à la limite sur $\Gamma(x_i, u_i, \cdot) = \lambda_k(x_i) B(x_i, u_i, \cdot)$, on obtient alors

$$\Gamma(x, u, \cdot) = \lambda_k(x) B(x, u, \cdot)$$

et en testant pour u, on déduit $G(x,u) = \lambda_k(x)$. On obtient le cas d'égalité dans l'inégalité

$$N(x,u) \leqslant \liminf_{i\to+\infty} N(x,u_i)$$

ce qui montre la convergence forte dans H.

Etape 2 : Soit $m_k(x) = \dim E_k(x)$. Soit $j \in \{1,\cdots,m_k(x)\}$. On note pour $y \in \mathcal{A}$

$$\tilde{\lambda}_j(y) = \lambda_{i_k(x)+j-1}(y)$$

de sorte que $\lambda_k(y) = \tilde{\lambda}_{p_k(x)}(y)$. Soit (t_n) une suite de réels positifs qui tend vers 0. On note $x_n = x + t_n h$ et on souhaite calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{\tilde{\lambda}_j(x_n)-\tilde{\lambda}_j(x)}{t_n}$. Soit $(u_1^n,\cdots,u_{m_k(x)}^n)$ une famille $Q(x_n,\cdot)$-orthonormée telle que

$$\Gamma(x_n,u_j^n,\cdot) = \tilde{\lambda}_j(x_n)B(x_n,u_j^n,\cdot).$$

Soit π la projection $Q(x,\cdot)$-orthogonale sur $E_k(x)$. On pose

$$R_j^n = u_j^n - \pi(u_j^n).$$

Noter que par l'étape 1, il existe une famille $Q(x,\cdot)$-orthonormée $(u_1,\cdots,u_n)$ telle que $u_j \in E_k(x)$ et $u_j^n \to u_j$ dans H lorsque $n\to+\infty$. En particulier $R_j^n \to 0$ dans H lorsque $n\to+\infty$.

$$\begin{aligned}
&\Gamma(x,\cdot,R_j^n) - \tilde{\lambda}_j(x)B(x,\cdot,R_j^n) = \Gamma(x,\cdot,u_j^n) - \tilde{\lambda}_j(x)B(x,\cdot,u_j^n)\\
&= \left(\Gamma(x,\cdot,u_j^n) - \Gamma(x_n,\cdot,u_j^n)\right) + \tilde{\lambda}_j(x_n)\left(B(x_n,\cdot,u_j^n) - B(x,\cdot,u_j^n)\right)\\
&\quad + \left(\tilde{\lambda}_j(x_n) - \tilde{\lambda}_j(x)\right) B(x,\cdot,u_j^n)\\
&= -\,t_n\int_0^1 \left\langle \left(\Gamma_x - \tilde{\lambda}_j(x_n)B_x\right)(x+st_nh,\cdot,u_j^n),h\right\rangle ds + \left(\tilde{\lambda}_j(x_n)-\tilde{\lambda}_j(x)\right)B(x,\cdot,u_j^n)
\end{aligned}$$

On pose

$$\tau_j^n = t_j^n + \sqrt{Q(x,R_j^n)}$$

et on remarque que quitte à extraire une sous-suite, comme $\tilde{\lambda}_j$ est Lipschitz en x, on pose

$$\overline{t_j} = \lim_{n\to+\infty}\frac{t_n}{\tau_j^n} \text{ et } D_j = \lim_{n\to+\infty}\frac{\tilde{\lambda}_j(x_n)-\tilde{\lambda}_j(x)}{\tau_j^n}$$

De plus, en posant $\widetilde{R_j^n} = \frac{R_j^n}{\tau_j^n}$ et en utilisant (H_2), on obtient

$$\begin{aligned}
N(x,\widetilde{R_j^n})^2 &= \Lambda_x + G(x,\widetilde{R_j^n})\\
&\leqslant \Lambda_x + \tilde{\lambda}_j(x) + \left(\left(\overline{t_j}+o(1)\right)C_x(1+|\lambda_k(x)|+o(1))\|h\|_X\right)N(x,\widetilde{R_j^n}) + D_j + o(1)
\end{aligned}$$

ce qui implique que $(\widetilde{R_j^n})$ est borné dans H par (H_1). Ainsi, quitte à extraire une sous-suite, $\widetilde{R_j^n}$ converge vers $\overline{R_j} \in H$ faiblement dans H. Avec (H_3), on obtient

$$1-\overline{t_j} = \lim_{n\to+\infty} Q(x,\widetilde{R_j^n}) = Q(x,\overline{R_j}) \text{ et } \forall v\in H, \Gamma(x,\widetilde{R_j^n},v) \to \Gamma(x,\overline{R_j},v)$$

lorsque $n \to +\infty$. En passant à la limite sur l'équation satisfaite par $\widetilde{R_j^n}$, on obtient

$$\Gamma(x, \overline{R_j}, \cdot) - \tilde{\lambda}_j(x) B(x, \overline{R_j}, \cdot) = -\overline{t_j} \left\langle \left(\Gamma_x - \tilde{\lambda}_j(x) B_x \right) (x, u_j, \cdot), h \right\rangle + D_j B(x, u_j, \cdot).$$

En testant cette équation contre u_j, on obtient

$$D_j = \overline{t_j} \left\langle \left(G_x - \tilde{\lambda}_j(x) Q_x \right) (x, u_j), h \right\rangle$$

de sorte que si $\overline{t_j} = 0$, alors $D_j = 0$ et on déduit $\overline{R_j} \in E_k(x) \cap E_k(x)^{\perp_{Q(x,\cdot)}} = \{0\}$ ce qui contredit $Q(x, \overline{R_j}) + \overline{t_j} = 1$. Donc $\overline{t_j} \neq 0$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\tilde{\lambda}_j(x + t_n h) - \tilde{\lambda}_j(x)}{t_n} = \frac{D_j}{\overline{t_j}} = \left\langle \left(G_x - \tilde{\lambda}_j(x) Q_x \right) (x, u_j), h \right\rangle$$

De manière plus générale, en testant l'équation sur u_i, on obtient

$$\left\langle \left(\Gamma_x - \tilde{\lambda}_j(x) B_x \right) (x, u_j, u_i), h \right\rangle = \delta_{i,j} \frac{D_j}{\overline{t_j}}.$$

Ainsi l'endomorphisme $L_h : E_k(x) \to E_k(x)$ défini par

$$\forall v, u \in E_k(x), \left\langle \left(\Gamma_x - \tilde{\lambda}_j(x) B_x \right) (x, u, v), h \right\rangle = B(x, L_h(u), v)$$

admet pour base propre $(u_1, \cdots, u_{m_k(x)})$ dont les valeurs propres associées forment une suite croissante $\left(\frac{D_j}{\overline{t_j}} \right)_j$ car $(\tilde{\lambda}_j(x + t_n h))_j$ est croissante pour tout n et $\tilde{\lambda}_j(x) = \lambda_k(x)$ ne dépend pas de j. On obtient alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\tilde{\lambda}_j(x + t_n h) - \tilde{\lambda}_j(x)}{t_n} = \lambda_j(L_h) = \min_{F \in \mathcal{G}_j(E_k(x))} \max_{u \in F \setminus \{0\}} \frac{B(x, L_h(u), u)}{Q(x, u)}.$$

Cette valeur est indépendante du choix de la suite $t_n \to 0$ et un simple calcul montre que pour $u \in E_k(x)$,

$$\frac{B(x, L_h(u), u)}{Q(x, u)} = \langle \mathcal{R}_x(x, u), h \rangle.$$

On obtient donc le résultat escompté. □

Dans la proposition qui suit, on déduit une propriété sur les extrema locaux de λ_k. On note

$$\mathcal{C}^\star = \{\xi \in X^\star ; \forall h \in \mathcal{C}, \langle \xi, h \rangle \geqslant 0\}$$

le cône dual d'un cône $\mathcal{C}$ de X et on formule l'hypothèse

$$(H_5) \quad \mathcal{C}^{\star\star} = J(\mathcal{C})$$

où $J : X \to X^{\star\star}$ est l'injection canonique. (H_5) est équivalente à $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\star\star}$ lorsque X est un espace de Banach réflexif.

Proposition I.2.3. *On suppose (H_1), (H_2) et (H_3). Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Soit $x \in \mathcal{A}$. On suppose que $\mathcal{C}_x$ satisfait (H_4) et (H_5). Si x un minimum local de $\lambda_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, alors*

$$\forall F \in \mathcal{G}_{p_k(x)}(E_k(x)), co\{\mathcal{R}_x(x, u); u \in F, Q(x, u) = 1\} \cap \mathcal{C}_x^\star \neq \emptyset.$$

Si x est un maximum local de $\lambda_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, alors

$$\forall F \in \mathcal{G}_{q_k(x)}(E_k(x)), co\{-\mathcal{R}_x(x, u); u \in F, Q(x, u) = 1\} \cap \mathcal{C}_x^\star \neq \emptyset.$$

Démonstration. On n'écrit la démonstration que dans le cas où x est un minimum local, l'autre cas est similaire. Soit $F \in \mathcal{G}_{p_k(x)}(E_k(x))$. Si l'intersection est vide, par le théorème de séparation de Hahn-Banach, soit $h \in X$ tel que

$$\forall \xi \in \mathcal{C}_x^\star ; \langle \xi, h \rangle \geqslant 0 \tag{I.3}$$

$$\forall \xi \in \mathrm{co}\{\mathcal{R}_x(x,u); u \in F, Q(x,u) = 1\}, \langle \xi, h \rangle < 0 \tag{I.4}$$

(I.3) et (H_5) impliquent que $h \in \mathcal{C}_x$. Comme x est un minimum local,

$$0 \leqslant \frac{d}{dt}_{|t=0^+} \lambda_k(x+th) = \min_{F' \in \mathcal{G}_{p_k(x)}(E_k(x))} \max_{u \in F' \setminus \{0\}} \langle \mathcal{R}_x(x,u), h \rangle$$

ce qui se réécrit

$$\forall F' \in \mathcal{G}_{p_k(x)}(E_k(x)), \max_{u \in F \setminus \{0\}} \langle \mathcal{R}_x(x,u), h \rangle \geqslant 0.$$

En choisisant $u \in F$ tel que $Q(x,u) = 1$ et qui atteint ce maximum, $\xi = \mathcal{R}_x(x,u)$ contredit (I.4). □

I.2.2 Application aux deux problèmes

On applique d'abord la Proposition I.2.3 à $Optim_{n=2}$. On pose pour une métrique g et une fonction u :

$$\mathcal{R}(g,u) = \frac{\int_\Sigma |\nabla u|_g^2 dA_g}{\int_\Sigma u^2 dA_g} \int_\Sigma dA_g.$$

Dans ce cas, on choisit X l'espace des 2-tenseurs symétriques continus sur Σ, $\mathcal{A} = Met_0(\Sigma)$ l'ensemble des métriques Riemanniennes continues sur la surface Σ et $H = H^1(\Sigma)$. On suppose que u est une k-ème fonction propre telle que $\int_\Sigma u^2 dA_g = 1$ et on renormalise à $A_g(\Sigma) = \int_\Sigma dA_g = 1$. On obtient la dérivée de $\mathcal{R}$ dans la direction $h \in X$

$$\langle \mathcal{R}_g(g,u), h \rangle = \int_\Sigma \left(|\nabla u|_g^2 \frac{g}{2} - du \otimes du + \lambda_k(g) \left(1 - u^2\right) \frac{g}{2}, h \right) dA_g.$$

Pour un calcul de dérivées directionnelles en une métrique $\tilde{g}$ dans une classe conforme, on spécifie la formule à $h = b \cdot \tilde{g}$ où b est une fonction lisse par exemple. Dans ce cas X est l'espace des fonctions continues et $\mathcal{A}$ est l'ensemble des fonctions continues strictement positives.

Théorème I.2.4 ([Nad96]). *Soit Σ une surface compacte sans bord connexe. Soit $g \in Met(\Sigma)$ tel que $A_g(\Sigma) = 1$.*

Alors, g est un extremum local de $\bar{\lambda}_k(\Sigma, \cdot)$ si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^p$ tel que

(1) $\Delta_g \Phi = \lambda_k(\Sigma, g)\Phi$

(2) $|\Phi|^2 = 1$

(3) $d\Phi \otimes d\Phi = \frac{|\nabla \Phi|_g^2}{2} g$

Soit maintenant $\tilde{g} = \beta g \in [g]$ tel que $A_{\tilde{g}}(\Sigma) = 1$. $\tilde{g}$ est un extremum local de $\bar{\lambda}_k$ dans $[g]$ si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^p$ tel que

(1) $\Delta_g \Phi = \lambda_k(\beta)\beta\Phi$

(2) $|\Phi|^2 = 1$

Remarque I.2.5. Noter qu'on déduit les interprétations géométriques :

$$(1) \text{ et } (2) \Longleftrightarrow \Phi : (\Sigma, g) \to \mathbb{S}^{p-1} \text{ est une application harmonique dans } \mathbb{S}^{p-1}$$
$$\text{dont les coordonnées sont des fonctions propres pour } \bar{\lambda}_k(g)$$

$$(3) \Longleftrightarrow \Phi : (\Sigma, g) \to \mathbb{R}^p \text{ est une application conforme}$$

$$(1), (2) \text{ et } (3) \Longleftrightarrow \Phi : (\Sigma, g) \to \mathbb{S}^{p-1} \text{ est une immersion minimale dans } \mathbb{S}^{p-1}$$
$$\text{dont les coordonnées sont des fonctions propres pour } \bar{\lambda}_k(\Phi^\star \xi)$$

En particulier dans le cas à classe conforme contrainte, (1) et (2) impliquent par un simple calcul de $0 = \frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2$ que $\beta = \frac{|\nabla \Phi|_g^2}{\lambda_1(\beta)}$.

Remarque I.2.6. Dans le cas à classes conformes contraintes, on peut autoriser β à s'annuler (voir la Proposition I.4.9 ci-dessous) : on pose par exemple $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions non nulles positives. Les variations ne sont alors calculées que dans les directions $h \in \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est le cône des fonctions positives. On obtient l'existence de $p \in \mathbb{N}^\star$ et $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^p$ tels que

(1) $\Delta_g \Phi = \lambda_k(\beta)\beta\Phi$

(2) $|\Phi|^2 \geqslant 1$ et $\int_\Sigma \beta |\Phi|^2 dA_g = \int_\Sigma \beta dA_g$

Dans ce cas, il est clair que $|\Phi|^2 = 1$ sur $supp(\beta)$ et le calcul

$$\int_\Sigma \left(\left| \nabla \left(\Phi - \frac{\Phi}{|\Phi|} \right) \right|_g^2 + |\nabla \Phi|_g^2 - \left| \nabla \frac{\Phi}{|\Phi|} \right|_g^2 \right) dA_g = 2 \int_\Sigma \nabla \Phi \nabla \left(\Phi - \frac{\Phi}{|\Phi|} \right) dA_g$$
$$= 2\lambda_k(\beta) \int_\Sigma \beta \left(|\Phi|^2 - |\Phi| \right) = 0$$

ainsi que la relation ponctuelle $|\nabla \Phi|_g^2 = |\Phi|^2 \left| \nabla \frac{\Phi}{|\Phi|} \right|_g^2 + |\nabla |\Phi||_g^2$ montrent que

$$\int_\Sigma \left(\left| \nabla \left(\Phi - \frac{\Phi}{|\Phi|} \right) \right|_g^2 + \left(|\Phi|^2 - 1 \right) \left| \nabla \frac{\Phi}{|\Phi|} \right|_g^2 + |\nabla |\Phi||_g^2 \right) dA_g = 0$$

et donc $|\Phi| = 1$, ce qui implique de nouveau que Φ est harmonique. En particulier, les points d'annulation de β sont les zéros de $|\nabla \Phi|_g^2$. La métrique βg admet des singularités coniques en ces points, dont les angles sont des multiples de 2π [Kok14, Pet14a].

De même, dans $Optim_{n \geqslant 3}$, on peut poser pour une fonction positive β

$$\mathcal{R}(\beta, u) = \frac{\int_M L_g u \cdot u dv_g}{\int_M \beta u^2 dv_g} \left(\int_M \beta^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n}}.$$

On pose $X = L^{\frac{n}{2}}(M)$, $\mathcal{A} = L^{\frac{n}{2}}_{>0}(M)$ l'ensemble des fonctions $L^{\frac{n}{2}}$ de M non nulles strictement positives (presque partout) et $H = H^1(M)$. Ce choix est possible grâce à la Proposition I.4.4. Pour une fonction b dans le cône $\mathcal{C} \subset X$ des fonctions positives, pour une k-ème fonction propre u telle que $\int_M u^2 \beta dv_g = 1$ et en supposant $\|\beta\|_{L^{\frac{n}{2}}} = 1$, on a

$$\langle \mathcal{R}_\beta(\beta, u), b \rangle = \lambda_k(\beta) \int_M \left(\beta^{\frac{n-2}{2}} - u^2 \right) b dv_g.$$

On obtient le résultat fin suivant :

Théorème I.2.7 ([PT24, HPP25]). *Soit (M,g) une variété compacte sans bord connexe de dimension $n \geqslant 3$. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $k \geqslant k_+$ ou $k \leqslant k_-$. Soit $\beta \in L^{\frac{n}{2}}_{\geqslant 0}$ tel que $\int_M \beta^{\frac{n}{2}} dv_g = 1$.*
Si β est un minimum local de $\bar\lambda_k$, alors pour tout $V \in \mathcal{G}_{p_k(\beta)}(E_k(\beta))$, il existe $i_k(\beta) \leqslant \ell \leqslant k$ et une application $U = (v_\ell, \cdots, v_k) : M \to \mathbb{R}^{k-\ell+1}$ telle que
(1) $L_g U = \lambda_k(\beta)\beta U$
(2) $|U|^2 = \beta^{\frac{n-2}{2}}$
(3) $(v_\ell, \cdots, v_k)$ est une famille $L^2(\beta dv_g)$-orthogonale de V
Si β est un maximum local de $\bar\lambda_k$, alors pour tout $V \in \mathcal{G}_{m_k(\beta)-p_k(\beta)+1}(E_k(\beta))$, il existe $k \leqslant \ell \leqslant i_k(\beta) + m_k(\beta) - 1$ et une application $U = (v_k, \cdots, v_\ell) : M \to \mathbb{R}^{\ell-k+1}$ telle que
(1) $L_g U = \lambda_k(\beta)\beta U$
(2) $|U|^2 = \beta^{\frac{n-2}{2}}$
(3) $(v_k, \cdots, v_\ell)$ est une famille $L^2(\beta dv_g)$-orthogonale de V

Remarque I.2.8. En toute rigueur, l'application de la Proposition I.2.3, donne seulement $|U|^2 \leqslant \beta^{\frac{n-2}{2}}$ du fait qu'on calcule les variations dans le cône des fonctions positives. La condition $\int_M |U|^2\beta = \int_M \beta^{\frac{n}{2}} = 1$ obtenue par nos renormalisations implique a posteriori et de manière immédiate $|U|^2 = \beta^{\frac{n-2}{2}}$.

Insistons sur le fait que ce résultat s'applique pour tout $\beta \in L^{\frac{n}{2}}_{\geqslant 0}$ tel que $\int_M \beta^{\frac{n}{2}} dv_g = 1$. Néanmoins, le prolongement des fonctionnelles valeurs propres à cet espace de fonctions nécessite un travail que nous ne traitons pas dans ce mémoire (pour cela, se référer à [HPP25, Section 3]). On se contente du cadre plus simple $\beta \in L^{\frac{n}{2}}_{>0}$ en utilisant la Proposition I.4.4.

I.2.3 Conclusions supplémentaires pour $Optim_{n\geqslant 3}$

Le Théorème I.2.7 a la conséquence suivante : si β est un minimum local de $\bar\lambda_k$ et si $\bar\lambda_k(\beta) > \bar\lambda_{k-1}(\beta)$ alors quel que soit le choix de $v \in E_k(\beta)$, tel que $\int_M v^2\beta dv_g = \int_M \beta^{\frac{n}{2}} = 1$, on obtient

$$L_g v = \lambda_k(\beta)\beta v \text{ et } v^2 = \beta^{\frac{n-2}{2}}.$$

Il est facile de déduire que $E_k(\beta)$ est de dimension 1 ($m_k(\beta) = 1$). Ce trou spectral $\bar\lambda_k(\beta) > \bar\lambda_{k-1}(\beta)$ est par exemple automatique si $k = 1$, $k = 2$ ou $k = k_+$. Si de plus $k \geqslant 2$, on obtient nécessairement une solution de l'équation de Yamabe nodale (i.e qui change de signe).

De manière analogue, si β est un maximum local de $\bar\lambda_k$ et si $\bar\lambda_k(\beta) < \bar\lambda_{k+1}(\beta)$, ce qui est automatique pour $k = k_-$, on obtient également que $m_k(\beta) = 1$. Là aussi, si de plus $k \geqslant 2$, on obtient une solution de l'équation de Yamabe nodale.

De manière plus générale énonçons et montrons le lemme I.2.10 qui met en valeur les conditions restrictives imposées aux métriques extrémales par les conclusions du Théorème I.2.7. Il est basé sur ce lemme élémentaire d'algèbre linéaire :

Lemme I.2.9 ([HPP25, Lemma 8.1]). *Soit Ω un ensemble non vide. On note $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des focntions sur Ω à valeurs réelles. Soit $\ell \geqslant 1$. On suppose qu'il existe*
- *$\beta \in \mathcal{F}(\Omega, K)$;*
- *un sous-espace $F \subset \mathcal{F}(\Omega, K)$ de dimension $\ell + 1$ tel que pour tout sous-espace $V \subset F$ de dimension ℓ, il existe une famille finie $f_1, \cdots, f_r \in V$ telle que*

$$\beta = \sum_{i=1}^r f_i^2.$$

Alors $\beta = 0$.

Démonstration. Soit $x \in \Omega$ et $e : F \to K$ l'évaluation en x. C'est à dire pour $f \in F$, $e(f) = f(x)$. Le noyau de cette forme linéaire est de dimension ℓ si $e \neq 0$ et $\ell + 1$ sinon. Dans tous les cas, on choisit $V \subset \mathrm{Ker}\,(e)$ de dimension ℓ. Avec les hypothèses, il existe $f_1, \cdots, f_r \in V$ tels que

$$\beta = f_1^2 + \cdots + f_r^2.$$

Ainsi, pour tous $f \in V$, $f(x) = 0$. En particulier, pour tous $i = 1, \cdots, r$, $f_i(x) = 0$ ce qui implique $\beta(x) = 0$. Comme x est arbitraire, on obtient le Lemme I.2.9. □

On déduit de ce Lemme I.2.9 et du Théorème I.2.7 le résultat suivant :

Lemme I.2.10 ([HPP25, Lemma 8.2])**.** *Soit* $\beta \in L^{\frac{n}{2}}(M)\backslash\{0\}, \beta \geq 0$. *Si* β *est un minimum local de* $\bar{\lambda}_k$ *pour un entier* $k \geqslant k_+$, *alors* $\lambda_{k+1}(\beta) > \lambda_k(\beta)$. *Si* β *est un maximum local de* $\bar{\lambda}_k$, *pour un entier* $k \leqslant k_-$, *alors* $\lambda_{k-1}(\beta) < \lambda_k(\beta)$.

Démonstration. Prouvons ce résultat pour $k \geqslant k_+$. L'autre cas est similaire. Quitte à renormaliser β, on suppose que $\|\beta\|_{L^{\frac{n}{2}}} = 1$ de sorte que $\lambda_k(\beta) = \Lambda_k(M, [g])$. On Suppose par contradiction que $\lambda_{k+1}(\beta) = \lambda_k(\beta)$. Soit $i_k(\beta)$ défini par

$$i_k(\beta) = \min \{r \geqslant k_+ ; \lambda_r(\beta) = \lambda_k(\beta)\}.$$

Par le Théorème I.2.7, on choisit une famille indépendante $(v_{i(k)}, \cdots, v_{k+1}) \in E_k(\beta)$ de fonction telles que pour tout i,

$$L_g v_i = \lambda \beta v_i$$

où $\lambda = \lambda_i(\beta)$ pour $i \in \{i(k), \cdots, k+1\}$. Soit $F = Vect\{v_{i(k)}, \cdots, v_{k+1}\}$. Soit $\ell = k + 1 - i(k) \geq 1$ tel que $\dim(F) = \ell + 1$. Soit V un sous-espace de F de dimension ℓ et soit $v_1', \cdots, v_\ell'$ une famille $L^2(\beta dv_g)$-orthogonale de fonctions de V. Alors, comme $\Lambda_k(M, [g]) = \lambda_k(\beta) = \lambda$ et comme pour tous $1 \leq i \leq \ell$,

$$L_g v_i' = \lambda \beta v_i'$$

on obtient du Théorème I.2.7 qu'il existe une famille $f_1, \cdots, f_\ell \in V$ telle que

$$\beta^{\frac{n}{2s}-1} = f_1^2 + \cdots + f_\ell^2 \quad \text{p.p. dans } M. \tag{I.5}$$

Comme β atteint $\lambda_k(\beta)$, β et les fonctions $(f_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ qui apparaissent dans (I.5) sont continues sur M (voir Sous-section I.3.2). L'égalité (I.5) est donc ponctuelle entre fonctions sur M, et le Lemme I.2.9 s'applique : on déduit $\beta = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\|\beta\|_{L^{\frac{n}{2}}} = 1$. □

I.3 Théorie de régularité sur les métriques critiques

I.3.1 $Optim_{n=2}$: Les applications harmoniques

On donne des résultats de régularité et de compacité sur les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange au sens le plus faible possible que satisfont des maximiseurs de $\bar{\lambda}_1$. Soit $\beta \in \mathcal{P}_d(\Sigma)$ où $\mathcal{P}_d(\Sigma)$ est l'ensemble des mesures de probabilité sans atomes (ou diffuse). On définit

$$\bar{\lambda}_1(\beta) = \inf_{\substack{\phi \in \mathcal{C}^\infty \\ \int_\Sigma \phi d\mu = 0}} \frac{\int_\Sigma |\nabla \phi|_g^2 dA_g}{\int_\Sigma \phi^2 d\beta} \int_\Sigma d\beta.$$

En un sens naturel le plus faible possible, on formule l'équation pour $\Phi \in H^1(\Sigma, \mathbb{R}^p)$,

$$\begin{cases} \Delta_g \Phi = \bar{\lambda}_1(\beta)\beta\Phi \\ |\Phi|^2 \geqslant 1 \\ \int_\Sigma |\Phi|^2 d\beta = \int_\Sigma d\beta = 1 \end{cases} \tag{I.6}$$

Pour le moment, on ne dit rien sur l'existence de telles solutions : cela nécessite un peu de régularité sur $\beta \in \mathcal{P}_d(\Sigma)$. Noter par exemple que β doit agir sur $H^1 \times H^1$ comme une forme bilinéaire continue (ou de manière équivalente $H^1 \subset L^2(\beta)$ est une injection continue) pour donner un sens à (I.6). [1].

D'après la Remarque I.2.6, les solutions de (I.6) satisfont $|\Phi| = 1$ et sont faiblement harmoniques dans $\mathbb{S}^{p-1}$ (points critiques dans $H^1(\Sigma, \mathbb{S}^{p-1})$ de l'énergie de Dirichlet). Par [Hél90], les applications faiblement harmoniques à valeurs dans une sphère [Hél90], et plus généralement dans une variété compacte quelconque [Hél91] sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. La compacité des suites d'applications harmoniques d'énergie uniformément bornée est également bien comprise depuis [Par96] : on a sous-convergence en arbres de bulles dans $\mathcal{C}^0 \cap H^1$. Néanmoins, les suites d'applications harmoniques sont associées à la maximisation de $\bar{\lambda}_1$. Cela rend les résultats de compacité plus précis, et stables pour des solutions de (I.6) "presque harmoniques" au sens où on perturbe la condition $|\Phi|^2 \geqslant 1$ par $|\Phi|^2 \geqslant 1 - \theta^2$ où θ^2 est contrôlée dans un certain espace de fonction :

- Elles ne développent pas de bulles grâce au résultat de rigidité (voir Théorème I.3.2 et Théorème I.3.3).
- Les solutions de (I.6) ne nécessitent pas le résultat de régularité de Hélein [Hél90], mais seulement le résultat de régularité des applications faiblement harmoniques localement minimisantes de Morrey (Proposition I.3.6, [Mor48]). Cette remarque est d'une importance particulière pour réaliser ce travail en toute dimension. En toute généralité, les résultats de régularité des applications p-harmoniques sont seulement connus dans le cas localement minimisant. Ainsi, nous ferons comme si nous ne connaissons pas les résultats de Hélein [Hél90, Hél91].
- Pour les questions de compacité, la dimension de la sphère d'arrivée sera aussi variable et peut éventuellement exploser. Ce n'est pas possible en dimension 2 car le nombre de coordonnées indépendantes d'une application harmonique qui sont des premières fonctions propres est borné par la multiplicité du premier espace propre, elle-même contrôlée par la topologie de Σ [Che75]. Ces bornes utilisent de manière cruciale la régularité des fonctions propres ainsi que la dimension 2. Néanmoins, on requiert un résultat de compacité sur les suites d'applications "presque-harmoniques" associées à des "presque-maximiseurs" de $\bar{\lambda}_1$ où seule la régularité H^1 est autorisée (H^1 ne s'injecte pas dans $\mathcal{C}^0$). Des estimées de régularité sur les applications harmoniques indépendantes de la dimension de la sphère d'arrivée (Théorème I.3.1) seront donc nécessaires. On les fournit dans [Pet25c] dans un cadre général. Une telle approche est également plus souple pour s'adapter à la dimension supérieure où il n'y pas de borne topologique sur la multiplicité même dans le cas lisse (voir [CdV86]).

1. Comme on le verra, la condition essentielle pour l'existence est qu'en plus l'injection $H^1 \subset L^2(\beta)$ est compacte, hypothèse bien identifiée dans [Kok14, KS23, GKL21] avec la notion de mesure admissible et dans [PT24, Pet25d, Pet24a] pour fabriquer des espaces variationnels admissibles.

Théorème I.3.1 ([KS22, Pet25c]). *Il existe $\epsilon_0 > 0$, il existe $C > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour toute application harmonique $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a*

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla \Phi|^2 \leqslant \epsilon_0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{D}, |\nabla \Phi(x)|^2 \leqslant C \frac{\int_{\mathbb{D}} |\nabla \Phi|^2}{(1-|x|)^2}.$$

Le théorème précédent est une conséquence classique de l'invariance conforme de l'équation des applications harmoniques, de l'identité de Bochner et d'une formule de monotonie.

Pour commencer, on suppose seulement la condition $\bar{\lambda}_1(\beta) \geqslant 8\pi + c$ pour $\beta \in \mathcal{P}_d$. C'est justifié par le résultat de rigidité suivant :

Théorème I.3.2 ([Pet14a, Section 1]). *Si (Σ, g) est une surface riemannienne compacte sans bord connexe non difféomorphe à la sphère,*

$$\Lambda_1(\Sigma, [g]) > 8\pi.$$

On quantifie alors la non-concentration de la masse de β par une borne inférieure uniforme en $x \in \Sigma$ pour un rayon r suffisamment petit sur les valeurs propres de Dirichlet locales

$$\lambda_\star(\mathbb{D}_r(x), \beta) = \inf_{\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{D}_r(x))} \frac{\int_\Sigma |\nabla \phi|^2}{\int_\Sigma \phi^2 d\beta}.$$

Proposition I.3.3 ([Kok14, Pet14a, Pet25d]). *Soit $c > 0$. Soit $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{P}_d(\Sigma)$ telles que $\bar{\lambda}_1(\beta_i) \geqslant 8\pi + c$. Alors tout point adhérent de la suite pour la converge faible-$\star$ est sans atome. Plus généralement, il existe $r_\star = r_\star(\Sigma, g, c) > 0$ tel que*

$$\forall \beta \in \mathcal{P}_d(\Sigma), [\bar{\lambda}_1(\beta) \geqslant 8\pi + c] \Longrightarrow [\forall x \in \Sigma, \lambda_\star(\mathbb{D}_{r_\star}(x), \beta) \geqslant \lambda_1(\beta)].$$

De cette proposition, en faisant des particitions de l'unité sur une union de disques de rayons inférieurs à $r_\star$, on déduit le résultat de régularité suivant :

Proposition I.3.4 ([Pet14a, Proof of Claim 4],[Pet25d, Proof of Claim 2.4]). *Soit $c > 0$. Soit $\beta \in \mathcal{P}_d(\Sigma)$ tel que $\bar{\lambda}_1(\beta) \geqslant 8\pi + c$ alors $\beta : H^1 \times H^1 \to \mathbb{R}$ agit comme une forme bilinéaire sur H^1 et il existe une constante $K = K(\Sigma, g, c) > 0$ telle que*

$$\forall \beta \in \mathcal{P}_d(\Sigma), \bar{\lambda}_1(\beta) \geqslant 8\pi + c \Rightarrow \|\beta\|_g = \sup_{\phi, \psi \in H^1 \setminus \{0\}} \frac{|\beta(\phi, \psi)|}{\|\phi\|_{H^1} \|\psi\|_{H^1}} \leqslant K$$

A ma connaissance, c'est le seul résultat de régularité sur β qu'on puisse déduire sans avoir besoin de (I.6). C'est une régularité en un sens très faible. Cela montre qu'une condition de presque criticalité sera nécessaire pour déduire plus de régularité sur β. Néanmoins, cette proposition donne un indice sur l'espace variationnel le plus adapté à choisir pour résoudre notre problème et donne un sens à (I.6).

On donne maintenant des propriétes locales des solutions de (I.6). Par invariance conforme de l'énergie de Dirichlet, on écrit toutes les estimées en coordonnées isothermes par rapport à la métrique plate. Ajoutons à l'existence de (I.6) la condition de seuil $\bar{\lambda}_1(\beta) \geqslant 8\pi + c$ qui sera vraie pour les suites maximisantes par le Théorème I.3.2. Commençons par une quantification de la non-concentration de la densité d'énergie de $\frac{\Phi}{|\Phi|}$

Proposition I.3.5 ([Pet25d, Proof of Claim 2.6]). *Soit $c > 0$ et $r_0 \leqslant r_\star^2$ où $r_\star(\Sigma, g, c)$ est donné par la Proposition I.3.3. Alors il existe une constante universelle $C_\star > 0$ telle que pour tous $\beta \in \mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ et $\Phi \in H^1(\Sigma, \mathbb{R}^p)$, on a*

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1(\beta) \geqslant 8\pi + c \\ \text{(I.6)} \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \Sigma, \int_{\mathbb{D}_{r_0}(x)} \left| \nabla \frac{\Phi}{|\Phi|} \right|^2 \leqslant \frac{C_\star \sqrt{\bar{\lambda}_1(\beta)}}{\sqrt{\ln \frac{1}{r_0}}}.$$

On appliquera les deux résultats suivants à $\widetilde{\Phi} = \frac{\Phi}{|\Phi|}$. On doit la propriété de régularité des applications harmoniques minimisantes à Morrey :

Proposition I.3.6 ([Mor48]). *Pour tout $p \geqslant 2$ et $\widetilde{\Phi} \in H^1(\mathbb{D}, \mathbb{R}^p)$ alors, il existe une application $\Psi : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^{p-1}$ qui minimise le problème variationnel suivant*

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla \Psi|^2 = \inf \left\{ \int_{\mathbb{D}} |\nabla \widetilde{\Psi}|^2 ; \widetilde{\Psi} \in H^1\left(\mathbb{D}, \mathbb{S}^{p-1}\right) \text{ et } \widetilde{\Psi} = \widetilde{\Phi} \text{ sur } \partial\mathbb{D} \right\}$$

et Ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{D})$ et est une application harmonique dans $\mathbb{S}^{p-1}$.

On appelle Ψ un prolongement harmonique de $\widetilde{\Phi}$. Colding et Minicozzi [CM08] ont ensuite démontré l'inégalité de convexité à petite énergie suivante :

Proposition I.3.7 ([CM08, LP19, LSZ20]). *Soit $\varepsilon \leqslant \min(\varepsilon_0, \frac{1}{8C})$. Pour tout $p \geqslant 2$, toute application harmonique $\Psi : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^{p-1}$ telle que $\int_{\mathbb{D}} |\nabla \Psi|^2 \leqslant \varepsilon$ et toute application $\widetilde{\Phi} : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^{p-1}$ dont Ψ est un prolongement harmonique dans $\mathbb{S}^{p-1}$ on a*

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \left| \nabla (\Psi - \widetilde{\Phi}) \right|^2 \leqslant \int_{\mathbb{D}} \left| \nabla \widetilde{\Phi} \right|^2 - \int_{\mathbb{D}} |\nabla \Psi|^2$$

et Ψ est l'unique prolongement harmonique de Φ.

Suivant la terminologie de [CM08], on appelle alors Ψ le remplacement harmonique de $\widetilde{\Phi}$. La démonstration suivante utilise seulement le résultat l'ε-régularité (Théorème I.3.1) et une inégalité de Hardy. Elle est apparue pour la première fois dans [LP19, Theorem 3.1] et [LSZ20].

Démonstration. Par la Proposition I.3.6, un prolongement harmonique $\Psi : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^{p-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et satisfait par le Théorème I.3.1

$$\Delta \Psi = |\nabla \Psi|^2 \Psi \text{ avec } \forall y \in \mathbb{D}, |\nabla \Psi(y)|^2 \leqslant C \frac{\int_{\mathbb{D}} |\nabla \Psi|^2}{(r - |y|)^2} \text{ et } \int_{\mathbb{D}} |\nabla \Psi|^2 \leqslant \frac{1}{8C}.$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} \left| \nabla (\Psi - \widetilde{\Phi}) \right|^2 - \left(\int_{\mathbb{D}} \left| \nabla \widetilde{\Phi} \right|^2 - \int_{\mathbb{D}} |\nabla \Psi|^2 \right) = 2 \int_{\mathbb{D}} \nabla (\Psi - \widetilde{\Phi}) \cdot \nabla \Psi \\ &= 2 \int_{\mathbb{D}} |\nabla \Psi|^2 \, (\Psi - \widetilde{\Phi}) \cdot \Psi = \int_{\mathbb{D}} |\nabla \Psi|^2 \, |\Psi - \widetilde{\Phi}|^2 \\ &\leqslant C \left(\int_{\mathbb{D}} |\nabla \Psi|^2 \right) \int_{\mathbb{D}} \frac{|\Psi - \widetilde{\Phi}|^2}{(1 - |y|)^2} \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \left| \nabla \left(\Psi - \widetilde{\Phi} \right) \right|^2 \end{aligned}$$

où on utilise $|X - Y|^2 = 2\,(1 - X \cdot Y)$ lorsque $|X| = |Y|$, et la célèbre inégalité de Hardy

$$\forall u \in H^1_0(\mathbb{D}), \int_{\mathbb{D}} \frac{u^2}{(1 - |y|)^2} \leqslant 4 \int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2.$$

On déduit le résultat. □

Proposition I.3.8. *Soit $c>0$ et $r_0 \leqslant r_\star^2$ tel que $C_\star \frac{\sqrt{\Lambda_1(\Sigma,[g])}}{\sqrt{\ln \frac{1}{r_0}}} \leqslant \min(\varepsilon_0, \frac{1}{8C})$ où $r_\star(\Sigma,g,c)$ est donnée la Proposition I.3.3, $\varepsilon_0>0$ et $C>0$ par le Théorème I.3.1. Alors il existe une constante universelle $C'_\star>0$ telle que pour tous $\beta \in \mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ et $\Phi \in H^1(\Sigma, \mathbb{R}^p)$, on a*

$$\begin{cases} \bar\lambda_1(\beta) \geqslant 8\pi + c \\ (\mathrm{I.6}) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall x \in \Sigma, \int_{\mathbb{D}_r(x)} \left|\nabla\left(\widetilde{\Phi} - \Psi\right)\right|^2 \leqslant C'_\star \int_{\mathbb{D}_r(x)} \frac{|\nabla|\Phi||^2}{|\Phi|^2} \\ \textit{où } \Psi : \mathbb{D}_r(x) \to \mathbb{S}^{p-1} \textit{ est le prolongement harmonique de } \widetilde{\Phi} \end{array}$$

Démonstration. On note $\mathbb{D}_r = \mathbb{D}_r(x)$. On multiplie maintenant $\Delta\Phi = \lambda_1(\beta)\beta\Phi$ par $\frac{1}{|\Phi|}\left(\frac{\Phi}{|\Phi|} - \Psi\right)$ et une intégration par partie donne

$$\int_{\mathbb{D}_r} \nabla\Phi\nabla\frac{1}{|\Phi|}\cdot\left(\frac{\Phi}{|\Phi|}-\Psi\right) + \int_{\mathbb{D}_r}\frac{1}{|\Phi|}\nabla\Phi\cdot\nabla\left(\frac{\Phi}{|\Phi|}-\Psi\right) = \lambda_1(\beta)\int_{\mathbb{D}_r}\beta\frac{\Phi}{|\Phi|}\left(\frac{\Phi}{|\Phi|}-\Psi\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lambda_1(\beta)\int_{\mathbb{D}_r}\beta\left|\frac{\Phi}{|\Phi|}-\Psi\right|^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_r}\left|\nabla\left(\frac{\Phi}{|\Phi|}-\Psi\right)\right|^2$$

qu'on peut réécrire avec $\widetilde{\Phi} = \frac{\Phi}{|\Phi|}$

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{D}_r}|\nabla\widetilde{\Phi}|^2 - \int_{\mathbb{D}_r}|\nabla\Psi|^2\right) = \int_{\mathbb{D}_r}\nabla\widetilde{\Phi}\cdot\nabla\left(\widetilde{\Phi}-\Psi\right) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_r}\left|\nabla\left(\widetilde{\Phi}-\Psi\right)\right|^2$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{D}_r}\nabla\frac{1}{|\Phi|}\cdot\left(\Phi\cdot\nabla(\widetilde{\Phi}-\Psi) - (\widetilde{\Phi}-\Psi)\nabla\Phi\right).$$

Par un jeu de réécriture, on a

$$\nabla\frac{1}{|\Phi|}\cdot\left(\Phi\cdot\nabla(\widetilde{\Phi}-\Psi) - (\widetilde{\Phi}-\Psi)\nabla\Phi\right) = \frac{1}{2}\frac{|\nabla|\Phi||^2}{|\Phi|^2}|\widetilde{\Phi}-\Psi|^2 + \frac{\nabla|\Phi|}{|\Phi|}(\widetilde{\Phi}+\Psi)\nabla\left(\widetilde{\Phi}-\Psi\right)$$

de sorte qu'on obtient une constante universelle C' telle que

$$\int_{\mathbb{D}_r}\left|\nabla(\Psi-\widetilde{\Phi})\right|^2 \leqslant C'\left(\int_{\mathbb{D}_r}\frac{|\nabla|\Phi||^2}{|\Phi|^2} + \left(\int_{\mathbb{D}_r}\frac{|\nabla|\Phi||^2}{|\Phi|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{D}_r}\left|\nabla(\Psi-\widetilde{\Phi})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

On déduit la proposition. □

En utilisant globalement l'équation (I.6), la Remarque I.2.6 donne $\frac{\Phi}{|\Phi|} = \Phi$ et $|\Phi| = 1$. Comme les coordonnées de Φ sont des fonctions propres associées à $\lambda_1(\beta)$, Φ est ainsi harmonique. On déduit même de la Proposition I.3.8 que Φ est une application harmonique localement minimisante. [2]. Par ailleurs, ce schéma de preuve n'utilise jamais la régularité a priori des solutions de (I.6) et le contrôle uniforme par l'énergie de $|\Phi|$ sera utile quand on travaillera avec des presque solutions de (I.6).

2. On le savait déjà en utilisant la Proposition I.3.7 et le résultat de régularité de Hélein [Hél90]. Encore une fois, c'est spécifique à la dimension 2. En dimension $n \geqslant 3$, la régularité des applications p-harmoniques est seulement bien comprise pour les p-harmoniques localement minimisantes

I.3.2 $Optim_{n\geqslant 3}$: Les systèmes de Yamabe

Comme précédemment, on cherche des résultats de régularité et de compacité sur les solutions de l'équation d'Euler Lagrange au sens le plus faible possible que satisfont les optimiseurs de $\bar{\lambda}_k$. Pour $U \in H^1((M,g),\mathbb{R}^m)$ et $\beta \in L^{\frac{n}{2}}$ tel que $\beta \geqslant 0$, on a

$$\begin{cases} L_g U = \lambda_k(\beta)\beta U \\ |U|^2 = \sum_{j=1}^m U_j^2 = \beta^{\frac{n-2}{2}} \end{cases} \tag{I.7}$$

Il vient par théorie elliptique classique et bootstrap que $U \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$ et $\beta = |U|^{\frac{4}{n-2}} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$. Cette régularité est optimale pour $m = 1$ lorsque la solution change de signe (sauf cas exceptionnels où $\frac{2}{n-2}$ est un entier). Bien sûr, U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $|U|^{-1}(]0,+\infty[)$ et on s'attend à davantage de régularité si m est grand car les points d'irrégularité sont des intersections d'ensembles nodaux.

Concernant les suites de solutions de (I.7)

$$L_g U_i = \lambda_k(\beta_i)|U_i|^{\frac{4}{n-2}}U_i \text{ et } \int_M |U_i|^{\frac{2n}{n-2}} = 1 \text{ où } \beta_i = |U_i|^{\frac{4}{n-2}}, \tag{I.8}$$

les obstructions à la compacité sont les mêmes que pour les solutions des équations de Yamabe ($m = 1$ et $k = 1$) : il y a compacité pour $\lambda_k(\beta_i) \leqslant 0$ et des phénomènes de concentration qu'on ne peut pas exclure a priori pour $\lambda_k(\beta_i) > 0$ mais qu'on peut quantifier grâce à la proposition plus générale suivante :

Proposition I.3.9 ([HPP25, Lemma 2.3])**.** *Soit (λ_i) une suite de réels positifs bornée, (β_i) une suite de fonctions positives bornée dans $L^{\frac{n}{2}}$ et (v_i) une suite de fonctions bornée dans H^1 telles que*

$$L_g v_i = \lambda_i \beta_i v_i$$

Quitte à extraire une sous suite, on note v_0 la limite faible de (v_i). Alors (v_i) converge vers v_0 fortement dans $H^1_{loc}(M \setminus A)$ où A est l'ensemble des points de concentration suivant :

$$A = \left\{ x \in M; \forall \delta > 0, \limsup_{i\to+\infty} \lambda_i \left(\int_{B_g(x,\delta)} \beta_i^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \geqslant K_n^{-2} \right\}$$

où K_n^{-2} est la constante de Sobolev

$$K_n^{-2} = \inf_{u\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Soit $k \geqslant k_+$. On définit un invariant naturel qui sera un seuil à ne pas dépasser pour avoir compacité des suites de solutions de (I.8) :

$$X_k(M,[g]) = \min\left\{ \left(\Lambda_{\ell_0}(M,[g])^{\frac{n}{2}} + \Lambda_{\ell_1}(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}} + \cdots + \Lambda_{\ell_r}(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} \right\} \tag{I.9}$$

où le minimum est pris parmi les indices $r, \ell_0 \in \mathbb{N}$ et $\ell_1, \cdots, \ell_r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tels que

1. $\ell_0 \in \{0\} \cup \{k_+, \cdots, k-1\}$, où par convention $\Lambda_0^s(M,[g]) = 0$;
2. $\ell_0 + \cdots + \ell_r = k$ if $\ell_0 \geqslant k_+$ et $\ell_1 + \cdots + \ell_r = k - k_+ + 1$ si $\ell_0 = 0$;

3. $\Lambda_{\ell_0}(M,[g])$ and $\Lambda_{\ell_i}(\mathbb{S}^n)$ sont atteints.

Proposition I.3.10 ([HPP25, Section 6]). *Soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Soit (β_i) une suite telle que si $k \geqslant k_+$,*

$$\limsup_{i\to+\infty} \bar{\lambda}_k(\beta_i) < X_k(M,[g])$$

et tel qu'il existe (U_i) qui satisfait l'équation (I.8). *Alors quitte à extraire une sous-suite, β_i converge vers β dans $L^{\frac{n}{2}}$ et (U_i) converge fortement vers U dans H^1.*

Noter que l'inégalité large $\Lambda_k(M,[g]) \leqslant X_k(M,[g])$ est démontrée en utilisant des métriques test à la Aubin [Aub76].

I.4 Suites minimisantes presque critiques

I.4.1 Cadre théorique

Le moyen le plus simple pour obtenir des points critiques d'une fonctionnelle E est de construire des extrema. La première tentative consiste à prendre des suites minimisantes (ou maximisantes) [3] et les faire converger. La fonctionnelle donne naturellement un espace variationnel dans lequel la suite minimisante est bornée, donc en général, quitte à en extraire une sous-suite, elle converge en un sens faible dans cet espace. On souhaite alors que les conditions de criticalité satisfaites par cette limite garantissent sa régularité, grâce à la régularité elliptique des systèmes d'équations en jeu. Dans l'exemple de la maximisation de la première valeur propre renormalisée par l'aire dans une classe conforme en dimension 2 ($Optim_{n=2}$),

$$\sup_{\beta>0} \bar{\lambda}_1(\beta) \text{ où } \bar{\lambda}_1(\beta) = \inf_{\phi; \int \beta\phi dv_g = 0} \frac{\int |\nabla\phi|^2 dv_g}{\int \beta\phi^2 dv_g} \int \beta dv_g,$$

quitte à renormaliser et extraire une sous-suite d'une suite minimisante $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures de probabilités qui converge au sens faible-$\star$ vers une mesure de probabilité β. $\bar{\lambda}_1$ est semi-continue supérieurement pour la convergence faible-$\star$ (voir [Kok14, Proposition 1.1] [Pet25d, Proposition 1.1]). Ainsi, β est un maximum parmi toutes les mesures de probabilité. Malheureusement, on ne peut pas formuler de conditions de criticalité pour β car il n'admet pas forcément de fonctions propres (fonctions qui atteignent l'infimum dans la définition de $\bar{\lambda}_1(\beta)$). Pourtant, on a vu que les conditions de criticalité sont indispensables pour espérer obtenir des minimiseurs réguliers.

Pour résoudre cette difficulté, on construit des suites minimisantes qui satisfont des conditions "presque" critiques et on les passe à la limite.

Première approche

On relaxe le problème variationnel par un paramètre $\varepsilon > 0$ de sorte que la famille de fonctionnelles (E_ε) satisfait $E_\varepsilon \to E$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et à $\varepsilon > 0$ fixé, on peut formuler une condition de criticalité aux minimiseurs de E_ε. J'ai adopté cette approche dans les papiers [Pet14a, Pet18, Pet19, Pet23a, Pet24b] par régularisation avec le noyau de la

3. Au préalable, on doit s'assurer que le problème est bien posé : l'infimum (ou le supremum) est fini

chaleur. On l'utilise aussi de façon assez différente pour minimiser des valeurs propres positives renormalisées par le volume du Laplacien conforme (voir $Optim_{n\geqslant 3}$ et [HPP25])

$$\inf_{\beta>0} \bar{\lambda}_k(\beta) \text{ où } \bar{\lambda}_k(\beta) = \inf_{F\in\mathcal{G}_k(\mathcal{C}^\infty(M))} \sup_{\phi\in F} \frac{\int_M |\nabla\phi|^2 dv_g}{\int \beta\phi^2 dv_g} \left(\int_M \beta^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

Dans ce cas, on construit une suite de minimiseurs pour les valeurs propres du problème sous-critique E_p [4] où pour $p > \frac{n}{2}$ [5]

$$E_p(\beta) = \inf_{F\in\mathcal{G}_k(\mathcal{C}^\infty(M))} \sup_{\phi\in F} \frac{\int_M |\nabla\phi|^2 dv_g}{\int \beta\phi^2 dv_g} \left(\int_M \beta^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le reste du travail est alors de démontrer la sous convergence de la suite des minimiseurs de E_p pour $p \to \frac{n}{2}$. Il faut prendre en compte les bulles qui apparaissent de manière classique à cause de la non-compacité de l'injection de Sobolev $H^1 \to L^{\frac{2n}{n-2}}$. Un inconvénient de cette *première approche* est qu'elle ne permettra jamais de démontrer que toute suite minimisante sous-converge vers un minimiseur.

Deuxième approche

On construit une suite "à la Palais-Smale" en travaillant directement sur la fonctionnelle. Lorsque la fonctionnelle $E : X \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ où X est un espace de Banach, une suite de Palais-Smale $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se définit par la condition $\|DE(\beta_n)\| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ où la norme $\|\cdot\|$ est celle du dual $X^\star$ de X. Une difficulté est que les fonctionnelles spectrales ne sont pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$. Néanmoins, elles sont toujours semi-continues inférieurement et on peut toujours donner un sens à une condition presque-critique pour un presque-minimiseur grâce au principe variationnel d'Ekeland :

Théorème I.4.1 ([Eke74]). *Soit $(\mathcal{A}, d)$ un espace métrique complet et $E : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continue inférieurement telle que $\inf_{\mathcal{A}} E > -\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathcal{A}$ tel que*

$$E(x) \leqslant \inf_{\mathcal{A}} E + \varepsilon.$$

Alors pour tout $c > 0$, il existe $\beta \in \mathcal{A}$ tel que
(i) $E(\beta) \leqslant E(x)$
(ii) $d(x, \beta) \leqslant c$
(iii) Pour tout $z \in \mathcal{A} \setminus \{\beta\}$, $E(\beta) - E(z) < \frac{\varepsilon}{c} d(\beta, z)$.

On transforme ainsi une suite minimisante (x_ε) en une meilleure suite minimisante (β_ε) (par (i)) proche de la première (par (ii)) qui satisfait (iii). Si E est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un espace X de Banach, la condition (iii) donne une suite de Palais-Smale $\|DE(\beta_\varepsilon)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{c} \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ par calcul de dérivées en β_ε. Dans le cadre des fonctionnelles spectrale, on pourra calculer des dérivées directionnelles s'il existe des fonctions propres. Cela fournit

4. Eux-mêmes construits comme limites de suites "à la Palais-Smale" pour la fonctionnelle E_p (voir *deuxième approche*) !

5. C'est sous-critique au sens où le réel q en jeu dans l'équation non linéaire $L_g u = \lambda |u|^{q-1} u$ qui correspond au système d'équation aux fonctions propres $L_g u = \lambda\beta u$ associé à un minimiseur $\beta := |u|^{\frac{2}{p-1}}$ de E_p satisfait $q := \frac{2p}{p-1} < \frac{2n}{n-2}$ où $\frac{2n}{n-2}$ est le réel critique pour lequel l'injection de Sobolev $H^1 \to L^{\frac{2n}{n-2}}$ est continue non compacte. q est sous-critique au sens où l'injection $H^1 \to L^q$ est compacte.

un sens généralisé aux suites de Palais-Smale. Par ailleurs, en choisissant $c = \sqrt{\varepsilon}$, la suite minimisante initiale (x_ε) et (β_ε) vont converger vers le même minimiseur.

On donne donc une application du théorème d'Ekeland pour des fonctionnelles spectrales. Pour minimiser une fonctionnnelle spectrale dans une classe conforme, l'espace complet $\mathcal{A}$ à rechercher est un espace de fonctions positives. Par complétude, les éléments $\beta_\varepsilon \in \mathcal{A}$ peuvent désormais s'annuler et c'est une difficulté : il faut généraliser la notion de valeur propre. En outre, cet espace $\mathcal{A}$ ne sera pas un ouvert d'un espace vectoriel mais seulement un fermé. En particulier, la condition (iii) ne donne que des dérivées à droite en $\beta_\varepsilon \in \mathcal{A}$ dans des directions $b \in \mathcal{C}$ de fonctions positives. En apparence, on perd donc la moitié des informations pour caractériser une suite minimisante "presque-critique". Voici un résultat qu'on s'attend à utiliser :

Proposition I.4.2. *On suppose (H_1), (H_2) et (H_3). Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\mathcal{C}$ un cône tel que pour tout $x \in \mathcal{A}$, $\mathcal{C}_x = \mathcal{C}$ satisfait (H_4) et (H_5). On suppose que $\mathcal{A}$ est un fermé dans X et $\inf_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_k > -\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, et $x_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $\bar{\lambda}_k(x_\varepsilon) \leqslant \inf_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_k + \varepsilon^2$, il existe $\beta_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que*
(i) $\bar{\lambda}_k(\beta_\varepsilon) \leqslant \bar{\lambda}_k(x_\varepsilon)$
(ii) $d_X(x_\varepsilon, \beta_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$
(iii) $\forall F \in \mathcal{G}_{p_k(\beta_\varepsilon)}(E_k(\beta_\varepsilon))$, $\left(co\{\mathcal{R}_x(\beta_\varepsilon, u); u \in F, Q(\beta_\varepsilon, u) = 1\} + \overline{B}_{X^\star}(0,\epsilon)\right) \cap \mathcal{C}^\star \neq \emptyset$.
On suppose que $\mathcal{A}$ est un fermé dans X et $\sup_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_k < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, et $x_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $\bar{\lambda}_k(x_\varepsilon) \geqslant \sup_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_k - \varepsilon^2$, il existe $\beta_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que
(i) $\bar{\lambda}_k(\beta_\varepsilon) \geqslant \bar{\lambda}_k(x_\varepsilon)$
(ii) $d_X(x_\varepsilon, \beta_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$
(iii) $\forall F \in \mathcal{G}_{q_k(\beta_\varepsilon)}(E_k(\beta_\varepsilon))$, $\left(co\{-\mathcal{R}_x(\beta_\varepsilon, u); u \in F, Q(\beta_\varepsilon, u) = 1\} + \overline{B}_{X^\star}(0,\epsilon)\right) \cap \mathcal{C}^\star \neq \emptyset$.

Démonstration. On n'écrit la démonstration que dans le premier cas, l'autre cas est similaire. On applique le principe variationnel d'Ekeland sur l'espace complet $(\mathcal{A}, d_X)$, $E = \bar{\lambda}_k$ et $x = x_\varepsilon$ (en remplaçant ε par ε^2 et c par ε). On obtient $\beta_\varepsilon \in \mathcal{A}$ qui satisfait $d_X(x_\varepsilon, \beta_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, $\bar{\lambda}_k(\beta_\varepsilon) \leqslant \bar{\lambda}_k(x_\varepsilon)$, et pour tout $z \in \mathcal{A} \setminus \{\beta_\varepsilon\}$, $\bar{\lambda}_k(\beta_\varepsilon) - \bar{\lambda}_k(z) < \varepsilon d_X(\beta_\varepsilon, z)$. En particulier, pour $t > 0$ suffisamment petit,

$$\forall b \in \mathcal{C}, \frac{\bar{\lambda}_k(\beta_\varepsilon + tb) - \bar{\lambda}_k(\beta_\varepsilon)}{t} \geqslant -\varepsilon \|b\|_X$$

Soit $F \in \mathcal{G}_{p_k(\beta_\varepsilon)}(E_k(\beta_\varepsilon))$. Si l'intersection est vide, par le théorème de séparation de Hahn-Banach, soit $h \in X$ tel que

$$\forall \xi \in \mathcal{C}^\star; \langle \xi, h \rangle \geqslant 0 \tag{I.10}$$

$$\forall \xi \in \mathrm{co}\{\mathcal{R}_x(\beta_\varepsilon, u); u \in F, Q(\beta_\varepsilon, u) = 1\} + \overline{B}_{X^\star}(0,\epsilon), \langle \xi, h \rangle \leqslant -\delta \tag{I.11}$$

pour $\delta > 0$. (I.10) et (H_4) impliquent que $h \in \mathcal{C}$. On obtient alors

$$-\varepsilon \|h\|_X \leqslant \frac{d}{dt}_{|t=0^+} \lambda_k(\beta_\varepsilon + th) = \min_{F \in \mathcal{G}_{p_k(\beta_\varepsilon)}(E_k(\beta_\varepsilon))} \max_{u \in F \setminus \{0\}} \langle \mathcal{R}_x(\beta_\varepsilon, u), h \rangle$$

ce qui se réécrit

$$\forall F \in \mathcal{G}_{p_k(\beta_\varepsilon)}(E_k(\beta_\varepsilon)), \max_{u \in F \setminus \{0\}} \langle \mathcal{R}_x(\beta_\varepsilon, u), h \rangle + \varepsilon \|h\|_X \geqslant 0.$$

Noter que

$$\|h\|_X = \|J(h)\|_{X^{\star\star}} = \sup_{\zeta \in X^\star, \|\zeta\|_{X^\star} \leqslant 1} |\langle \zeta, h \rangle|$$

Soit $u \in F$ tel que $Q(\beta_\varepsilon, u) = 1$ et $\mathcal{R}_x(\beta_\varepsilon, u) = \max_{v \in F \setminus \{0\}} \langle \mathcal{R}_x(\beta_\varepsilon, v), h \rangle$, et $\zeta \in X^\star$ tel que $\|\zeta\|_{X^\star} \leqslant 1$ et $\langle \zeta, h \rangle > \|h\|_X - \frac{\delta}{\varepsilon}$. Alors $\xi = \mathcal{R}_x(\beta_\varepsilon, u) + \varepsilon \zeta$ contredit (I.11). □

Remarque I.4.3. On note une certaine flexibilité dans les hypothèses. Par exemple, si $X = Z^\star$ et satisfait que pour toute fonction propre $u \in E_k(\beta)$, $\mathcal{R}_x(\beta_\varepsilon, u) \in J(Z)$ où $J : Z \to Z^{\star\star} = X^\star$ est l'injection canonique, on obtient une meilleure conclusion

$$\forall F \in \mathcal{G}_{p_k(\beta_\varepsilon)}(E_k(\beta_\varepsilon)), \left(\mathrm{co}\{\mathcal{R}_x(\beta_\varepsilon, u); u \in F, Q(\beta_\varepsilon, u) = 1\} + \overline{B}_Z(0, \epsilon)\right) \cap \widetilde{\mathcal{C}} \neq \emptyset,$$

en remplaçant $X^\star$ par Z lorsque Z (ou X) n'est pas un espace réflexif. Ici, on note $\widetilde{\mathcal{C}}$ un cône tel que $\widetilde{\mathcal{C}}^\star = \mathcal{C}$ et on n'a plus besoin de l'hypothèse (H_5).

Grâce à cette proposition on peut prévoir l'équation d'Euler Lagrange approchée que fournit le principe variationnel d'Ekeland. Au moins conceptuellement, elle est très utile pour bien choisir l'espace variationnel complet adapté $(\mathcal{A}, d)$. En effet, son choix est la difficulté principale. Si l'espace complet est trop gros, on ne peut pas formuler des dérivées directionnelles de la fonctionnelle et la condition (iii) devient inexploitable. Par exemple, dans $Optim_{n=2}$, il existe des mesures de probablilité et des fonctions L^1 positives qui n'admettent pas de fonctions propres car (H_3) n'est pas satisfait. Pourtant, si la Proposition I.4.2 s'appliquait pour $X = L^1(\Sigma)$, l'équation d'Euler-Lagrange approchée dans $X^\star = L^\infty(\Sigma)$ serait idéale. En effet, le schéma de preuve de la Sous-section I.3.1 écrit pour les suites de points critiques s'appliquerait à ces suites minimisantes : elles seraient compactes quand $\varepsilon \to 0$. En effet, avec l'inégalité $|\Phi_\varepsilon|^2 \geqslant 1 - O_{L^\infty}(\varepsilon)$, on divise par $|\Phi_\varepsilon|$ et on définit le remplacement harmonique de $\frac{\Phi_\varepsilon}{|\Phi_\varepsilon|}$.

Si l'espace complet est trop petit, la condition presque critique qu'on déduit de (iii) sur la suite minimisante n'est pas assez forte pour déduire la sous-convergence lorsque $\epsilon \to 0$. Par exemple, si on choisit $X = L^p(\Sigma)$ pour $p > 1$, la Proposition I.4.2 s'applique cette fois très bien, mais l'équation d'Euler-Lagrange approchée dans $X^\star = L^{\frac{p}{p-1}}(\Sigma)$ n'est pas suffisante pour appliquer le schéma de preuve de la Sous-section I.4.3 lorsque $\varepsilon \to 0$.

I.4.2 $Optim_{n\geqslant 3}$: espaces de fonctions L^p positives

Pour $p \geqslant \frac{n}{2}$, on pose $X = L^p(M)$, $\mathcal{A} = \{\beta \in L^p(M) \setminus \{0\}; \beta \geqslant 0, \|\beta\|_{L^p} \geqslant 1\}$ et $H = H^1(M)$. On pose pour $\beta \in \mathcal{A}$ et $u \in H$

$$G(u) = \int_M u L_g u dv_g$$

$$Q(\beta, u) = \int_M \frac{\beta}{\|\beta\|_{L^p}} u^2 dv_g.$$

On note $\bar{\lambda}_k^p$ la k-ème valeur propre renormalisée dans L^p associée au quotient de Rayleigh $\mathcal{R} = \frac{G}{Q}$. $Optim_{n\geqslant 3}$ correspond à $\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}_k^{\frac{n}{2}}$. On a la propriété suivante :

Proposition I.4.4 ([HPP25, Proposition 2.1, Proposition 3.1])**.** *Soit $\beta \in \mathcal{A}$. Si $\beta > 0$ ou si $\bar{\lambda}_1^p(\beta) > -\infty$, alors (H_1), (H_2) et (H_3) sont satisfaits.*

On déduit par continuité des valeurs propres sur $\mathcal{A}_{>0} = \{\beta \in \mathcal{A}; \beta > 0\}$ et par densité que pour $k \geqslant k_+$,

$$\inf_{\mathcal{A}_{>0}} \bar{\lambda}_k = \inf_{\mathcal{C}^\infty_{>0}} \bar{\lambda}_k$$

et pour $k \leqslant k_-$,

$$\sup_{\mathcal{A}_{>0}} \bar{\lambda}_k = \sup_{\mathcal{C}^\infty_{>0}} \bar{\lambda}_k.$$

Malheureusement, (H_1) peut être mise à défaut si β s'annule sur un ensemble de mesure strictement positive et si $k_- \geqslant 1$ (plus précisément, dans ce cas, $\bar{\lambda}_1^p(\beta) = -\infty$ devient possible). On a pourtant besoin d'appliquer la Proposition I.4.2 sur un espace complet. On propose donc de changer légèrement la fonctionnelle [6] en posant pour $\delta > 0$

$$Q_\delta(\beta, u) = \int_M \left(\frac{\beta}{\|\beta\|_{L^p}} + \delta \right) u^2 dv_g$$

pour s'assurer que $\gamma = \frac{\beta}{\|\beta\|_{L^p}} + \delta > 0$ et on note $\bar{\lambda}_k^{\delta,p}$ la k-ème valeur propre renormalisée dans L^p δ-approchée associée au quotient de Rayleigh $\mathcal{R}_\delta = \frac{G}{Q_\delta}$. On obtient alors (voir [HPP25, Proposition 4.7] pour la démonstration du résultat pour $\delta = 0$) :

Proposition I.4.5. *Pour $k \geqslant k_+$*

$$\lim_{(\delta,p)\to(0,\frac{n}{2})} \inf_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_k^{\delta,p} = \inf_{\mathcal{A}_{>0}} \bar{\lambda}_k = \inf_{\mathcal{C}^\infty_{>0}} \bar{\lambda}_k$$

et pour $k \leqslant k_-$,

$$\lim_{(\delta,p)\to(0,\frac{n}{2})} \sup_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_k^{\delta,p} = \sup_{\mathcal{A}_{>0}} \bar{\lambda}_k = \sup_{\mathcal{C}^\infty_{>0}} \bar{\lambda}_k$$

On montre donc l'existence de minimiseurs pour $\inf_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_k^{\delta,p}$ à (δ, p) fixés $\delta > 0$ et $p > \frac{n}{2}$ puis de faire converger la suite de minimiseurs approchés lorsque $(\delta, p) \to (0, \frac{n}{2})$. En posant

$$\mathcal{C} = \{b \in L^p(M); b \geqslant 0\},$$

Les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3), (H_4) et (H_5) sont toutes satisfaites pour $\bar{\lambda}_k^{\delta,p}$, et on peut appliquer la Proposition I.4.2. On obtient :

Proposition I.4.6. *Fixons $k \geqslant 1$, $\delta > 0$ et $p \geqslant \frac{n}{2}$. On suppose $k \geqslant k_+$. Alors il existe $\beta_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que*

(i) $\lambda_k^\varepsilon = \bar{\lambda}_k^{p,\delta}(\beta_\varepsilon) \leqslant \inf_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_k^{p,\delta} + \varepsilon^2$,

(ii) $1 \leqslant \|\beta_\varepsilon\|_{L^p} \leqslant 1 + \varepsilon$,

(iii) Il existe $\ell_\varepsilon \leqslant k - k_+ + 1$ et $U_\varepsilon = (v_\varepsilon^1, \cdots, v_\varepsilon^{\ell_\varepsilon}) : M \to \mathbb{R}^{\ell_\varepsilon}$ et $f_\varepsilon \in L^{\frac{p}{p-1}}$ tels que

(a) $L_g U_\varepsilon = \lambda_k^\varepsilon \gamma_\varepsilon U_\varepsilon$ *où* $\gamma_\varepsilon = \frac{\beta_\varepsilon}{\|\beta_\varepsilon\|_{L^p}} + \delta$ *et on suppose* $\int_M \gamma_\varepsilon |U_\varepsilon|^2 dv_g = 1$,

(b) $|U_\varepsilon|^2 \leqslant \mu_\varepsilon \left(\frac{\beta_\varepsilon}{\|\beta_\varepsilon\|_{L^p}} \right)^{p-1} + f_\varepsilon$ *où* $\mu_\varepsilon = \int_M \frac{\beta_\varepsilon}{\|\beta_\varepsilon\|_{L^p}} |U_\varepsilon|^2 dv_g \geqslant 1$,

(c) $\|f_\varepsilon\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda_k^\varepsilon}$.

On suppose $k \leqslant k_-$. Alors il existe $\beta_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que

(i) $\lambda_k^\varepsilon = \bar{\lambda}_k^{p,\delta}(\beta_\varepsilon) \geqslant \sup_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_k^{p,\delta} - \varepsilon^2$,

6. Dans [HPP25], on procéde autrement : on définit des valeurs propres généralisées $\bar{\lambda}_k$ sur $\mathcal{A}$ et des fonctions propres généralisées associées et on adapte la démonstration de la Proposition I.4.2. Cette adaptation se fait au prix d'une modification de la définition des valeurs propres lorsque β s'annule sur un ensemble de mesure non nulle (voir Sous-section IV.2.1)

(ii) $1 \leqslant \|\beta_\varepsilon\|_{L^p} \leqslant 1+\varepsilon$,

(iii) Il existe $\ell_\varepsilon \leqslant k_- - k + 1$ *et* $U_\varepsilon = (v_\varepsilon^1, \cdots, v_\varepsilon^{\ell_\varepsilon}) : M \to \mathbb{R}^{\ell_\varepsilon}$ *et* $f_\varepsilon \in L^{\frac{p}{p-1}}$ *tels que*

(a) $L_g U_\varepsilon = \lambda_k^\varepsilon \gamma_\varepsilon U_\varepsilon$ *où* $\gamma_\varepsilon = \frac{\beta_\varepsilon}{\|\beta_\varepsilon\|_{L^p}} + \delta$ *et on suppose* $\int_M \gamma_\varepsilon |U_\varepsilon|^2 dv_g = 1$,

(b) $|U_\varepsilon|^2 \leqslant \mu_\varepsilon \left(\frac{\beta_\varepsilon}{\|\beta_\varepsilon\|_{L^p}}\right)^{p-1} + f_\varepsilon$ *où* $\mu_\varepsilon = \int_M \frac{\beta_\varepsilon}{\|\beta_\varepsilon\|_{L^p}} |U_\varepsilon|^2 dv_g \leqslant 1$,

(c) $\|f_\varepsilon\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda_k^\varepsilon|}$.

Remarque I.4.7. On obtient bien une équation d'Euler-Lagrange approchée :

— En intégrant (b) contre γ_ε, et par des inégalités de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} 1 = \int_M \gamma_\varepsilon |U_\varepsilon|^2 dv_g &\leqslant \mu_\varepsilon \left(1 + \delta \int_M \left(\frac{\beta_\varepsilon}{\|\beta_\varepsilon\|_{L^p}}\right)^{p-1} dv_g\right) + \int_M \gamma_\varepsilon f_\varepsilon dv_g \\ &\leqslant \mu_\varepsilon (1+\delta) + \frac{\varepsilon}{|\lambda_k^\varepsilon|} \leqslant 1 + \delta + \frac{\varepsilon}{|\lambda_k^\varepsilon|}, \end{aligned}$$

ce qui implique que μ_ε est minoré par une constant strictement positive lorsque $\varepsilon \to 0$ et que $\mu_\varepsilon \to 1$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et $\delta \to 0$.

— Si $\varepsilon = 0$, β_ε est critique pour $\bar{\lambda}_k^{\delta,p}$ et on obtient l'égalité $|U_\varepsilon|^2 = \mu_\varepsilon \gamma_\varepsilon^{p-1}$

I.4.3 $Optim_{n=2}$: espace de formes bilinéaires positives sur H^1

On note X l'espace de Banach des formes bilinéaires symétriques continues sur $H^1(\Sigma)$. Il est muni de la norme

$$\|\beta\|_g = \sup_{\phi,\psi \in H^1(\Sigma,g)} \frac{|\beta(\phi,\psi)|}{\|\phi\|_{H^1(g)} \|\psi\|_{H^1(g)}}$$

où $\|\phi\|_{H^1(g)}^2 = \int_\Sigma \phi^2 dA_g + \int_\Sigma |\nabla\phi|^2 dA_g$. L'espace X (tout comme $H^1(\Sigma, g)$) ne dépend pas du choix de la métrique g et les normes associées à deux métriques g_1 et g_2, $\|\beta\|_{g_1}$ et $\|\beta\|_{g_2}$ sont équivalentes (avec constantes d'équivalence localement uniformes en la métrique).

On note $\mathcal{C}$ l'adhérence dans X du sous-ensemble Y

$$\mathcal{C} = \overline{Y} \qquad Y = \left\{(\phi,\psi) \mapsto \int_\Sigma e^{2u}\phi\psi dA_g ; u \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)\right\}$$

et on note

$$\mathcal{A} = \{\beta \in \mathcal{C} ; \beta(1,1) \geqslant 1\}.$$

Remarque I.4.8. L'espace $(X, \|\cdot\|_g)$ et $\mathcal{C}$ sont naturels pour les raisons suivantes

— Ils apparaissent dans la Proposition I.3.4 et l'équation (I.6) prend tout son sens.

— Un élément de $\mathcal{C}$ agit comme une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel engendré par les carrés de fonctions H^1 noté Q, muni de la norme

$$\begin{aligned} \|q\|_Q &= \inf\left\{\sum_{i\in I} \|\phi_i\|_{H^1(g)} \|\psi_i\|_{H^1(g)} ; q = \sum_{i\in I} \phi_i\psi_i \text{ et } \forall i \in I, \phi_i, \psi_i \in H^1\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{i\in I} \|\phi_i\|_{H^1(g)}^2 + \sum_{j\in J} \|\psi_j\|_{H^1(g)}^2 ; q = \sum_{i\in I} \phi_i\psi_i \text{ et } \forall i \in I, \phi_i, \psi_i \in H^1\right\} \\ &= \inf\left\{\|\phi\|_{H^1(g)}^2 + \|\psi\|_{H^1(g)}^2 ; q = \phi^2 - \psi^2 \text{ et } \phi, \psi \in H^1\right\}. \end{aligned}$$

pour $q \in Q$. Autrement dit, c'est un élément du dual de Q. Avec la Proposition I.4.2 et la remarque qui suit, on comprend que ce choix de $\mathcal{C}$ donne la condition d'Euler-Lagrange approchée $|\Phi|^2 \geqslant 1 - \theta^2$ où $\|\theta\|_{H^1}^2 \leqslant \varepsilon$. La condition de petitesse porte précisément dans l'espace Q. Cette condition sera suffisante en pratique pour faire sous-converger les suites optimisantes lorsque $\varepsilon \to 0$.

— Ce n'est pas la première fois que cet espace est invoqué en géométrie spectrale : voir par exemple des résultats sur l'opérateur de Schrödinger [FP82, MV02, CL22].

On définit alors pour $\beta \in \mathcal{A}$ et $\phi \in H^1$

$$G(\phi) = \int_\Sigma |\nabla \phi|_g^2 dA_g$$

$$Q(\beta, \phi) = \frac{\beta(\phi, \phi)}{\beta(1,1)}$$

et on note $\bar{\lambda}_1$ la première valeur propre *non nulle* renormalisée généralisée associée au quotient de Rayleigh $\mathcal{R} = \frac{G}{Q}$, c'est à dire lorsque Σ est connexe, la première valeur propre est nulle associée aux fonctions constantes et :

$$\bar{\lambda}_1(\beta) = \inf_{\phi \in H^1 \setminus \{0\}, \beta(\phi,1)=0} \mathcal{R}(\beta, \phi)$$

Proposition I.4.9 ([Pet25d, Proposition 1.1, Proposition 1.3]). *Soit $\beta \in \mathcal{A}$. Alors (H_1), (H_2) et (H_3) sont satisfaits.*

En particulier, on déduit de la continuité de $\bar{\lambda}_1$ dans $\mathcal{A}$ et par approximation que

$$\sup_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_1 = \sup_{\mathcal{C}^\infty_{>0}} \bar{\lambda}_1$$

de sorte que le problème généralisé est bien posé.

Remarque I.4.10. On note X_+ le cône des formes bilinéaires symétriques positives. Si $\beta \in X_+$, alors (H_1) et (H_2) sont satisfaits. Par contre, on utilise que $\beta \in \mathcal{A}$ est un point adhérent de Y dans X pour démontrer (H_3). Bien sûr $X_+ \neq \mathcal{C}$ car un élément $\beta \in \mathcal{C}$ doit satisfaire la propriété

$$\forall (\phi_i, \psi_i)_{i\in I}, (\phi_j, \psi_j)_{j \in J} \in H^1, \sum_{i\in I} \phi_i \psi_i = \sum_{j \in J} \phi_j \psi_j \Rightarrow \sum_{i \in I} \beta(\phi_i, \psi_i) = \sum_{j\in J} \beta(\phi_j, \psi_j). \quad \text{(I.12)}$$

Un élément de $\mathcal{C}$ est de surcroît une mesure positive sans atome. On peut noter $\widetilde{X_+}$ l'ensemble des éléments de X_+ satisfaisant la propriété I.12. Il serait intéressant de comprendre précisément l'éventuelle différence entre $\widetilde{X_+}$ et $\mathcal{C} \subset \widetilde{X_+} \subset X_+$.[7]

Il n'est pas clair que $(\mathcal{C} + (-\mathcal{C}), \|\cdot\|_X)$ est l'espace dual de $(Q, \|\cdot\|_Q)$. Cette heuristique permet néanmoins d'adapter la démonstration de la Proposition I.4.2, pour obtenir :

Proposition I.4.11 ([Pet25d, Proposition 1.5]). *Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\tilde{\beta}_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_{>0}$ qui satisfait*

$$\bar{\lambda}_1(\tilde{\beta}_\varepsilon) \geqslant \sup_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_1 - \varepsilon^2 \ \ et \ \int_\Sigma \tilde{\beta}_\varepsilon dA_g = 1$$

Alors, en notant $g_\varepsilon = \tilde{\beta}_\varepsilon g$, il existe $\beta_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que

7. Durant la rédaction de ce manuscrit, une façon plus consistante de comprendre ces espaces de fonction semble être apparue dans [Vin25b, Section 2.2]

(i) $\lambda_\varepsilon \beta_\varepsilon(1,1) = \bar{\lambda}_1(\beta_\varepsilon) \geqslant \bar{\lambda}_1(\tilde{\beta}_\varepsilon) \geqslant \sup_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_1 - \varepsilon^2$,
(ii) $\|\tilde{\beta}_\varepsilon dA_g - \beta_\varepsilon\|_{g_\varepsilon} \leqslant \varepsilon$ *et en particulier* $1 \leqslant \beta_\varepsilon(1,1) \leqslant \|\beta_\varepsilon\|_{g_\varepsilon} \leqslant 1+\varepsilon$,
(iii) Il existe $\Phi_\varepsilon = (\phi_\varepsilon^1, \cdots, \phi_\varepsilon^{m_\varepsilon}) \in H^1(\Sigma, \mathbb{R}^{m_\varepsilon})$ *tel que*
  (a) $\Delta_g \Phi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon, \cdot)$
  (b) $|\Phi_\varepsilon|^2 \geqslant 1 - \theta_\varepsilon^2$ *et* $\beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) = \beta_\varepsilon(1,1)$
  (c) $\|\theta_\varepsilon\|^2_{H^1(g_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon$.

Ici, on applique le principe variationnel d'Ekeland à l'espace complet $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{g_\varepsilon})$. On peut tout à fait avoir les conclusions de la Proposition pour g à la place de g_ε en choisissant l'espace complet $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_g)$, mais c'est moins bien adapté en pratique pour obtenir la sous-convergence des suites minimisantes (notamment lorsqu'on veut prendre en compte les phénomènes de bulles qui peuvent survenir dans le problème analogue de l'optimisation des valeurs propres à indices $k \geqslant 1$ ou de combinaisons de valeurs propres).

I.5 Convergence des suites optimisantes

I.5.1 $Optim_{n\geqslant 3}$: Cas des valeurs propres négatives

Pour ne pas alourdir la présentation de la méthode d'optimisation, on se concentre sur le cas simple des valeurs propres négatives du Laplacien conforme. En effet, les suites minimisantes des valeurs propres positives peuvent se concentrer. Pour rappel, le cas particulier de la première valeur propre strictement positive est équivalent au problème de Yamabe avec un Laplacien conforme coercif. C'est un cas célèbre de fonctionnelle invariante conforme où une éventuelle explosion apparaît à cause du défaut de compacité de l'injection de Sobolev. On traite totalement cette difficulté dans [HPP25] : on construit d'abord des suites de solutions de (I.7) dans le cadre sous-critique (on remplace $\frac{2n}{n-2}$ par $q_i < \frac{2n}{n-2}$) puis on écrit la Proposition I.3.10 dans le cadre plus général où β_i vérifie (I.7) avec $\beta_i = |U_i|^{q_i-2}$ et $q_i \nearrow \frac{2n}{n-2}$ lorsque $i \to +\infty$. Détaillons le cas des valeurs propres négatives :

Proposition I.5.1. *Soit β_ε, γ_ε et U_ε satisfaisant (i) (ii) et (iii) dans la Proposition I.4.6 pour $\varepsilon, \delta > 0$, $k \leqslant k_-$ et $p = \frac{n}{2}$. Alors quitte à extraire une sous-suite, β_ε converge fortement vers β dans $L^{\frac{n}{2}}$ lorsque $(\delta, \varepsilon) \to (0,0)$ et U_ε converge fortement vers U dans H^1 lorsque $(\delta, \varepsilon) \to (0,0)$. De plus $\beta \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ pour $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in \mathcal{A}_{>0}$ et $\bar{\lambda}_k(\beta) = \sup_{\mathcal{A}_{<0}} \bar{\lambda}_k$.*

Démonstration. On choisit une sous suite $(\varepsilon_i, \delta_i) \to (0,0)$ lorsque $i \to +\infty$ et on note avec un indice i toutes les suites dépendant de $(\varepsilon_i, \delta_i)$. On obtient

$$\mu_i \to 1 \text{ et } \int_M \beta_i^{\frac{n}{2}} \to 1 \text{ et } (\beta_i - \gamma_i) \to 0 \text{ fortement dans } L^{\frac{n}{2}}.$$

On déduit de

$$|U_i|^2 \leqslant \mu_i \frac{\beta_i^{\frac{n}{2}}}{1-\varepsilon_i} + f_i \text{ et } \|f_i\|_{L^{\frac{n}{n-2}}} \leqslant \varepsilon_i \text{ et } \int_M \gamma_i |U_i|^2 dv_g = 1$$

que (U_i) est borné dans L^2 et de l'équation $L_g U_i = \bar{\lambda}_k(\gamma_i)\gamma_i U_i$ que (U_i) est borné dans H^1. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$U_i \rightharpoonup U \text{ dans } H^1 \text{ et } \beta_i \rightharpoonup \beta \text{ dans } L^{\frac{n}{2}} \text{ et } \lambda_k(\gamma_i) \to \lambda$$

lorsque $i \to +\infty$. Bien sûr, $\gamma_i \rightharpoonup \beta$ dans $L^{\frac{n}{2}}$. On montre d'abord la convergence forte de $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans H^1. On a l'équation

$$L_g\left(U_i - U\right) = (\lambda_k(\gamma_i) - \lambda)\gamma_i U_i + \lambda\gamma_i(U_i - U) + \lambda(\gamma_i - \beta).$$

En notant $W_i = U_i - U$ et en intégrant cette equation contre W_i,

$$\|W_i\|_{H^1}^2 = \lambda\int_M \gamma_i|W_i|^2 + \int_M (1-c_nS_g)|W_i|^2 + \int_M (\lambda_k(\beta_i)-\lambda)\gamma_i U_i\cdot W_i + \lambda\int_M (\gamma_i - \beta)U\cdot W_i$$

Comme $\lambda \leqslant 0$, et (W_i) converge fortement vers 0 dans L^2 et $\lambda_k(\beta_i) \to \lambda$, on a

$$\|W_i\|_{H^1}^2 \leqslant o(1) + o(1)\int_M \gamma_i U_i\cdot W_i + \lambda\int_M (\gamma_i - \beta)U\cdot W_i$$

De plus, le terme

$$\left|\int_M \gamma_i U_i\cdot W_i\right| \leqslant \left(\int_M \gamma_i U_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M \gamma_i^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_M |W_i|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{2n}} \leqslant K_n^{-1}\left(1+o(1)\right)\|W_i\|_{H^1}$$

est borné. De plus, pour $R > 0$ on a

$$\left|\int_M (\gamma_i - \beta)U\cdot W_i\right| \leqslant \left|\int_M (\gamma_i - \beta)\left(\mathbf{1}_{|U|<R}U\cdot W_i\right)\right| + \|\gamma_i - \beta\|_{L^{\frac{n}{2}}}\|W_i\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}\|U\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(|U|>R)}.$$

Comme $\mathbf{1}_{|U|<R}U\cdot W_i$ converge fortement vers 0 dans $L^{\frac{n}{n-2}}$ où $\frac{n}{n-2} < \frac{2n}{n-2}$, en passant d'abord à la limite quand $i \to +\infty$ on obtient

$$\limsup_{i\to+\infty}\left|\int_M (\gamma_i - \beta)U\cdot W_i\right| \leqslant C\|U\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(|U|>R)}.$$

Pour une certaine constante $C > 0$. En faisant $R \to +\infty$, on obtient que le terme de gauche est nul. Ainsi, $\|W_i\|_{H^1}^2 = o(1)$ lorsque $i \to +\infty$. On passe à la limite faible sur

$$\beta_i \geqslant \left(\max\left\{\frac{1-\varepsilon_i}{\mu_i}\left(|U_i|^2 - f_i\right);0\right\}\right)^{\frac{2}{n-2}} \text{ et } \int_M \gamma_i|U_i|^2 = 1.$$

Cela donne

$$\beta \geqslant |U|^{\frac{4}{n-2}} \text{ et } \int_M \beta|U|^2 = 1.$$

En intégrant l'inégalité $\beta^{\frac{n-2}{2}} \geqslant |U|^2$ contre β, on obtient

$$1 \leqslant \|\beta\|_{L^{\frac{n}{2}}} \leqslant \liminf_{i\to+\infty}\|\beta_i\|_{L^{\frac{n}{2}}} = 1$$

et β est la limite forte dans $L^{\frac{n}{2}}$ de $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On obtient également

$$\beta^{\frac{n-2}{2}} = |U|^2.$$

Par ailleurs, la théorie de régularité et bootstrap sur l'équation

$$L_g U = \lambda\beta U$$

implique que $U \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$ et $\beta \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$. Par ailleurs, par un théorème de continuation unique, toute coordonnée de U ne peut s'annuler que sur un ensemble de mesure nulle. Ainsi $\beta = |U|^{\frac{4}{n-2}} > 0$ presque partout et par continuité de $\bar\lambda_k$ sur $\mathcal{A}_{>0}$,

$$\lambda = \lim_{i\to+\infty}\bar\lambda_k(\beta_i) = \bar\lambda_k(\beta)$$

et $\bar\lambda_k(\beta) = \sup_{\mathcal{A}_{>0}}\bar\lambda_k$. □

En fin de démonstration, on utilise le résultat de continuation unique suivant

$$\forall \phi \in \mathrm{Ker}\,(L_g), |\phi^{-1}(\{0\})| \neq 0 \Rightarrow \phi = 0 \tag{I.13}$$

qui est vrai pour des opérateurs elliptiques d'ordre 2 mais devient problématique si on remplace L_g par l'opérateur GJMS d'ordre $2s$ où s est un entier tel que $2s < n$ comme on le remarque dans [HPP25]. Cette hypothèse est cruciale dans la construction de valeurs propres généralisées, c'est à dire définies sur l'espace des fonctions L^p pour $p \geqslant \frac{n}{2}$, positives, mais qui peuvent s'annuler sur un ensemble de mesure non nulle. Ces valeurs propres généralisées sont au fondement théorique de nos résultats dans [HPP25]. En effet, dès le début de notre analyse sur les suites de solutions quelconques de l'équation aux fonctions propres

$$L_g v_i = \lambda_i \beta_i v_i,$$

où (β_i) est seulement bornée dans L^p, on montre que (v_i) est borné dans H^1 [8]. C'est l'objet du lemme suivant dont la preuve est retranscrite ici pour montrer comment on utilise (I.13). Cependant, lorsque l'opérateur L_g n'a pas de noyau, la propriété (I.13) n'est pas nécessaire.

Lemme I.5.2 ([HPP25, Lemma 2.2])**.** *Soit $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $H^1(M)$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives dans $L^{p_i}(M)$ pour $p_i \geqslant \frac{n}{2}$ et $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que*

— $L_g v_i = \lambda_i \beta_i v_i$

— $(\int_M \beta_i^{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *et* $(\int_M \beta_i u_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ *sont des suites bornées*

— $\lambda_i \neq 0$ *et* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *bornée.*

Alors en écrivant $v_i = w_i + k_i$ avec $k_i \in \mathrm{Ker}\,(L_g)$ et $w_i \in (\mathrm{Ker}\,(L_g))^{\perp_{L^2}}$, on a

(i) $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est borné dans H^1

(ii) Il existe $c > 0$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\|w_i\|_{H^1} \geqslant c$ et $|\lambda_i| \geqslant c$.

(iii) Si $\|v_i\|_{H^1} \to_{i\to+\infty} +\infty$, alors

(a) $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans L^q lorsque $i \to +\infty$ pour tout $q \leqslant \frac{n}{2}$

(b) $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans H^1.

(c) $p_i \to \frac{n}{2}$ lorsque $i \to +\infty$ et $\lambda_i \geqslant c$ pour i assez grand.

(d) Quitte à extraire une sous-suite $v_i = \|v_i\|_{H^1}(K + o(1))$ lorsque $i \to +\infty$ où $K \in \mathrm{Ker}\,(L_g) \setminus \{0\}$ et $o(1)$ a lieu pour la convergence forte dans H^1.

Démonstration. Pour (i) et (ii) il suffit de suivre et d'adapter la démonstration du Théorème I.1.4, dont on déduit aussi $\int_M \beta_i v_i k_i dv_g = 0$.

On suppose maintenant que $\|v_i\|_{H^1} \to_{i\to+\infty} +\infty$. On pose

$$V_i = \frac{v_i}{\|v_i\|_{H^1}} \qquad K_i = \frac{k_i}{\|v_i\|_{H^1}} \qquad W_i = \frac{w_i}{\|v_i\|_{H^1}}.$$

Comme $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée, $W_i \to 0$ dans H^1. Comme $\mathrm{Ker}\,(L_g)$ est de dimension finie, quitte à extraire une sous-suite, $K_i \to K$ dans H^1. On obtient (d).

On note β la limite faible d'une sous-suite de $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Alors on a par convercence forte de V_i et K_i dans $H^1 \subset L^{\frac{2n}{n-2}}$

$$\int_M \beta_i V_i K_i dv_g \to_{i\to+\infty} \int_M \beta K^2 dv_g$$

8. C'est la moindre des choses et ce n'est pas naturellement donné par notre problème. D'ailleurs, pour cette raison, dans [GPA22], les auteurs supposent que L_g est sans noyau dans leurs résultats.

De $\int_M \beta_i v_i k_i = 0$, on déduit que $\int_M \beta K^2 dv_g = 0$ ce qui implique que $K = 0$ sur $\operatorname{supp}\beta$. Comme $K \in \operatorname{Ker}(L_g)\setminus\{0\}$, le théorème d'unique continuation implique que $\beta = 0$. Cette limite est indépendante du choix de la sous-suite : on obtient (a).

On note w la limite faible d'une sous-suite de $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans H^1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$\left|\int_M \varphi L_g w dv_g\right| + o(1) = \left|\int_M \varphi L_g w_i dv_g\right| = \left|\lambda_i \int_M \beta_i v_i \varphi dv_g\right|$$
$$\leqslant |\lambda_i| \|\varphi\|_{L^\infty} \left(\int_M \beta_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M \beta_i (v_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \to_{i\to+\infty} 0$$

de sorte que $w \in \operatorname{Ker}(L_g) \cap \operatorname{Ker}(L_g)^{\perp_{L^2}} = \{0\}$ et $w = 0$. Cette limite est indépendante du choix de la sous-suite : on obtient (b).

On suppose par contradiction qu'il existe une sous-suite telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $p_i \geqslant r > \frac{n}{2}$ ou telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \leqslant 0$. On montre alors que

$$\lambda_i \int_M \beta_i v_i w_i dv_g \leqslant o(1)$$

lorsque $i \to +\infty$. Cette propriété est vraie si $\lambda_i \leqslant 0$ car $\int_M \beta_i v_i w_i = \int_M \beta_i v_i^2 dv_g \geqslant 0$. Par ailleurs, si $p_i \geqslant r > \frac{n}{2}$, par inégalité de Hölder,

$$\lambda_i \int_M \beta_i v_i w_i dv_g \leqslant \lambda_i \left(\int_M \beta_i v_i^2 dv_g\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M \beta_i^r dv_g\right)^{\frac{1}{2r}} \left(\int_M w_i^{\frac{2r}{r-1}} dv_g\right)^{\frac{r}{2(r-1)}} \to 0$$

lorsque $i \to +\infty$ car $\frac{2r}{r-1} < \frac{2n}{n-1}$ et $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans H^1, donc fortement vers 0 dans $L^{\frac{2r}{r-1}}$. Dans tous les cas, en intégrant l'équation $L_g w_i = \lambda_i \beta_i v_i$ contre w_i, on obtient

$$\|w_i\|_{H^1}^2 = \lambda_i \int_M \beta_i v_i w_i dv_g - \int_M c_n S_g w_i^2 + \int_M w_i^2 dv_g \leqslant o(1)$$

lorsque $i \to +\infty$, ce qui entre en contradition avec (ii) $\|w_i\|_{H^1} \geqslant c$. On obtient (c). □

I.5.2 $Optim_{n=2}$: Etapes de démonstration

On décrit les étapes de la démonstration de l'existence d'un maximiseur dans une classe conforme :

Théorème I.5.3 ([Pet25d, Proposition 2.1, Remark 2.1]). *Soit (Σ, g) une surface Riemannienne. Soit $\tilde{\beta}_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que*

$$\bar{\lambda}_1(\tilde{\beta}_\varepsilon) \geqslant \sup_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_1 - \varepsilon^2 \text{ et } \int_\Sigma \tilde{\beta}_\varepsilon dA_g = 1$$

Alors quitte à extraire une sous-suite $\tilde{\beta}_\varepsilon$ converge vers $\beta \in \mathcal{C}^\infty_{\geqslant 0}$ au sens de la topologie faible-$\star$ des mesures,

$$\bar{\lambda}_1(\beta) = \sup_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_1 \text{ et } \int_\Sigma \beta dA_g = 1,$$

et β ne s'annule qu'en un nombre fini de points.

La différence avec le résultat d'existence de [Pet14a] est que cette fois, toutes les suites maximisantes sous-convergent vers un maximum.

Etape 0 : On applique la Proposition I.4.11. On obtient des suites $g_\varepsilon = \tilde{\beta}_\varepsilon g$, β_ε, Φ_ε, θ_ε qui vérifient

$$\begin{cases} \Delta_g \Phi_\varepsilon = \bar{\lambda}_1(\beta_\varepsilon)\beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon, \cdot) \\ |\Phi_\varepsilon|^2 + \theta_\varepsilon^2 \geqslant 1 \text{ où } \|\theta_\varepsilon\|^2_{H^1(g_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon \\ \int_\Sigma |\Phi_\varepsilon|^2 d\beta_\varepsilon = \int_\Sigma d\beta_\varepsilon = 1 + O(\varepsilon) \end{cases} \tag{I.14}$$

Etape 1 : On reproduit le schéma de la Remarque I.2.6 en remplaçant Φ_ε par

$$\widetilde{\Phi}_\varepsilon = (\Phi_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$$

et $|\Phi_\varepsilon|$ par

$$\omega_\varepsilon = |\widetilde{\Phi}_\varepsilon| = \sqrt{|\Phi_\varepsilon|^2 + \theta_\varepsilon^2}.$$

En effet, la Proposition I.4.11 garantit que $\omega_\varepsilon \geqslant 1$ et que les termes d'erreurs vérifient $\|\theta_\varepsilon\|^2_{H^1(g_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon$. On obtient

$$\int_\Sigma |\nabla \omega_\varepsilon|_g^2 dA_g + \int_\Sigma \left|\nabla\left(\Phi_\varepsilon - \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right)\right|_g^2 dA_g + \int_\Sigma \omega_\varepsilon^2 \left|\nabla \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right|_g^2 dA_g \leqslant C\|\theta_\varepsilon\|^2_{H^1(g_\varepsilon)} \tag{I.15}$$

Etape 2 : On applique le Théorème I.3.2 et la Proposition I.3.3 qui garantissent que pour ε assez grand,

$$\forall x \in \Sigma, \lambda_\star(\mathbb{D}_{r_\star}(x), \beta_\varepsilon) \geqslant \lambda_1(\Sigma, \beta_\varepsilon). \tag{I.16}$$

Etape 3 : On applique une adaptation de la Proposition I.3.5 sous l'hypothèse (I.14) (version approchée de (I.6)). On obtient que pour $\eta > 0$ et $x \in \Sigma$ donnés, il existe $r < r_\star$ tel que

$$\int_{\mathbb{D}_r(x)} |\nabla \widetilde{\Phi}_\varepsilon|^2 \leqslant \eta$$

Etape 4 : On définit le remplacement harmonique Ψ_ε de $\widetilde{\Phi}_\varepsilon$ sur $\mathbb{D}_r(x)$ grâce à la Proposition I.3.6 et l'étape 3. Grâce à la Proposition I.3.7 et l'étape 3, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_r(x)} \left|\nabla\left(\Psi_\varepsilon - \widetilde{\Phi}_\varepsilon\right)\right|^2 \leqslant \int_{\mathbb{D}_r(x)} \left|\nabla \widetilde{\Phi}_\varepsilon\right|^2 - \int_{\mathbb{D}_r(x)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 \tag{I.17}$$

Etape 5 : Une adaptation de la Proposition I.3.8 en utilisant encore l'hypothèse (I.14) (au lieu de (I.6)) donne alors

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}_r(x)} \left|\nabla\left(\Psi_\varepsilon - \widetilde{\Phi}_\varepsilon\right)\right|^2 \leqslant C\left(\int_{\mathbb{D}_r(x)} |\nabla \omega_\varepsilon|^2 + \|\theta_\varepsilon\|^2_{H^1(g_\varepsilon)}\right) \tag{I.18}$$

Cela repose sur l'étape 2 et l'étape 4.

Etape 6 : Le Théorème I.3.1 fournit une borne L^∞ à $|\nabla \Psi_\varepsilon|^2$. En réutilisant l'équation des applications harmoniques, on peut même déduire une borne $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ pour tout α.

$$\||\nabla \Psi_\varepsilon|^2\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{D}_{\frac{r}{2}}(x))} \leqslant C\int_{\mathbb{D}_r(x)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2.$$

Ceci implique que quitte à prendre une sous-suite $\frac{|\nabla \Psi_\varepsilon|^2}{\lambda_1(\beta_\varepsilon)}$ converge fortement dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{D}_{\frac{r}{2}}(x))$ vers une fonction $\beta \in \mathcal{C}^0$. En utilisant l'étape 1 et l'étape 5, on déduit avec l'équation I.14 la convergence faible-$\star$ au sens des mesures

$$\beta_\varepsilon \rightharpoonup_\star \beta.$$

Quitte à globaliser l'argument avec des partitions de l'unité, β est défini sur Σ. La semi-continuité supérieure de la valeur propre pour cette topologie [Kok14, Proposition 1.1] implique

$$\sup_{\mathcal{A}} \bar{\lambda}_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \bar{\lambda}_1(\beta_\varepsilon) \leqslant \bar{\lambda}_1(\beta)$$

où il est clair que $\beta \in \mathcal{A}$. On réapplique la remarque I.2.6 au maximiseur β pour obtenir que $\beta = \frac{|\nabla \Phi|^2}{\lambda_1(\beta)}$ où $\Phi : \Sigma \to \mathbb{S}^{p-1}$ est une application harmonique. Ainsi $\beta \in \mathcal{C}^\infty_{\geqslant 0}$ et β ne s'annule qu'un nombre fini de fois (voir [Kok14, Pet14a]).

I.6 Perspectives

Les chapitres suivants montrent que cette méthode variationnelle se généralise très bien :

— $Optim_{n=2}$: aux combinaisons finies de valeurs propres associées au Laplacien sur des surfaces compactes sans bord, ou associées à l'opérateur Dirichlet à Neumann sur des surfaces à bord. Ces problèmes n'apparaissent pas dans ce chapitre pour ne pas surcharger la présentation (les combinaisons de valeurs propres nécessitent des notations plus lourdes), et également car l'analyse des suites optimisantes nécessite de prendre en compte des phénomènes de concentration a priori qui étaient exclus dans le cas de la première valeur propre grâce au Théorème I.3.2. On renvoie à [Pet25d] pour ce cadre plus général. Par ailleurs, cette théorie s'applique directement dans des espaces variationnels invariants sous l'action de groupes de symétries (voir [Pet23b, Pet25b] détaillés dans le Chapitre III pour des applications concrètes)

— $Optim_{n\geqslant 3}$: aux opérateurs GJMS d'ordre $2s$ notés P_g^s sur une variété Riemannienne compacte (M,g) de dimension $n > 2s$ pour s entier (voir Chapitre IV). Toutefois, le résultat nécessaire de continuation unique (I.13) bien connu pour le Laplacien conforme L_g $(s=1)$ est ouvert dans le cas général pour P_g^s.

— Le principe variationnel d'Ekeland a aussi été utilisé dans [Pet24a] pour maximiser les valeurs propres du Laplacien en dimension 2 parmi toutes les métriques (voir Chapitre II)

Bien que plusieurs autres méthodes permettent l'optimisation de valeurs propres (par exemple [AH06, Amm09, Pet14a, NS15, Pet18, Pet19, KNPP22, GPA22, KS23, Vin25a, Vin25b]), il n'existe à mon sens pas d'approche aussi englobante que celle présentée dans l'actuel chapitre (qui rassemble des résultats de [PT24, Pet25d, Pet24a, HPP25]). Néanmoins, comme on le voit dans les grandes différences entre deux exemples, l'approche analytique pour démontrer la compacité des suites optimisantes "à la Palais-Smale" ici construites est très dépendante du cadre d'application. Des travaux actuels et futurs consistent à affiner cette approche dans les cadres suivants :

— En dimension $n \geqslant 3$ pour les valeurs propres du Laplacien ou les valeurs propres de Steklov sur des variétés Riemanniennes ou même dans un cadre RCD où la renormalisation donnée dans (I.1) en dimension supérieure correspond à des espaces riemanniens à poids. Une partie de ce travail a été réalisée dans [KS22]. Pendant la rédaction de ce mémoire, [Vin25b] donne une approche légèrement différente de la mienne pour traiter cette question. Une partie de son analyse pourrait d'ailleurs permettre une compréhension plus fine des espaces fonctionnels que j'ai choisis dans $Optim_{n=2}$ au début de la Sous-section I.4.3, et qui apparaîssent dans [Pet25d, Pet24a].

— Les techniques de [HPP25] ($Optim_{n\geqslant 3}$), apportent une nouvelle approche pour l'optimisation des valeurs propres de Dirac, introduite par Ammann [Amm09]. Par ailleurs, Karpukhin-Métras-Polterovich [KMP23] ont récemment donné un lien entre les métriques critiques de l'opérateur de Dirac en dimension 2 et les applications harmoniques dans $\mathbb{CP}^n$. Ces questions font actuellement l'objet du travail de mon étudiant Pavel Martynyuk.

— En partant de la caractérisation de certaines surfaces minimales à bord libre dans des calottes sphériques comme points critiques de certaines fonctionnelles spectrales constituées de valeurs propres de Robin dans [LM23] et l'extension de ces résultats dans [Med23] aux surfaces minimales à bord libre dans des boules géodésiques de l'espace hyperbolique, l'approche de [Pet25d, Pet24a] est sans doute la plus adaptée à suivre pour produire ces surfaces minimales par optimisation spectrale.

— En dimension $n \geqslant 3$ pour les valeurs propres du Laplacien ou les valeurs propres de Steklov sur des variétés riemanniennes dans le cadre géométrique. Actuellement, les résultats préliminaires de bornitude de la fonctionnelle [Has11], de calcul de métriques critiques [KM21], et de non concentration des suites de métriques critiques pour la première valeur propre du Laplacien [Pet15] existent. La difficulté est de bien construire des suites de Palais-Smale dans des espaces variationnels adaptés construits à partir d'espaces de Sobolev à poids. Une combinaison de [Pet25d] et de [Vin25b] offre des pistes pour résoudre ces difficultés.

— Pour les opérateurs GJMS d'ordre $2s$ sur des variétés Riemanniennes de dimension critique $n = 2s$, et en particulier l'opérateur de Paneitz. Les résultats préliminaires de calcul de bornes sur les valeurs propres [Che14], de calculs de métriques critiques [PA22] existent. Dans ce cadre, il faut écarter d'une façon ou d'une autre les difficultés inhérentes aux opérateurs dominés par le bilaplacien (absence de principes du maximum généraux, questions sur la continuation unique etc).

— Pour des combinaisons infinies de valeurs propres, d'abord pour le Laplacien en dimension 2 et ensuite dans tous les cadres évoqués ci-dessus. Un premier pas dans cette direction est l'existence d'estimées de régularité du même type que dans le Théorème I.3.1 de ce que j'ai appelé les "harmonic eigenmaps" (voir [Pet25c]).

Chapitre II

Optimisation de fonctionnelles spectrales en dimension 2

Ce chapitre est une synthèse sur les travaux [Pet23a, Pet24b, Pet25d, Pet24a, Pet25a]. Il décrit ma contribution aux questions d'optimisation sur des surfaces (variétés différentiables de dimension 2) compactes sans bord Σ de fonctionnelles spectrales, c'est à dire construites comme des combinaisons d'un nombre fini de valeurs propres du Laplacien renormalisées par l'aire. Les questions analogues avec des valeurs propres de Steklov renormalisées par la longueur du bord de surfaces compactes à bord seront aussi détaillées, mais parfois plus rapidement.

La généralisation à des combinaisons de valeurs propres est bénéfique pour plusieurs raisons. De manière générale, se concentrer uniquement sur l'état fondamental, ou sur le bas du spectre dans les problèmes d'optimisation spectrale (même dans le cadre d'optimisation de formes classique) limite les possibles champs d'application physiques ou théoriques.

Ensuite, on observe qu'uniquement travailler à la maximisation de valeurs propres qui ne sont pas la première comme je l'ai fait pendant ma thèse [Pet18, Pet19] et comme cela a été étudié dans [KNPP21] sur la sphère et dans [Kar21] sur le plan projectif semble ne jamais fournir de nouveaux exemples de métriques maximales.

Par ailleurs, mes résultats se relient aux bornes classiques sur des sommes d'inverses de valeurs propres renormalisées du Laplacien [Her70, YY19, Ber73] ou de Steklov [HP68] ainsi que sur des produits de valeurs propres de Steklov [HPS75]. Ce nouveau point de vue a permis de faire le lien entre les métriques critiques et les immersions minimales dans des ellipsoïdes, généralisant les résultats précédents de [Nad96, FS13] où pour l'optimisation d'une seule valeur propre, l'ellipsoïde est une sphère.

Géométriquement, ce lien fournit un moyen de construire de nouvelles surfaces minimales par optimisation spectrale comme on le verra dans le Chapitre III. Analytiquement, il apporte une approche variationnelle très générale basée sur les résultats de régularité des applications harmoniques dans des ellipsoïdes. Ce point de vue général m'a également permis de reconsidérer les résultats existants pour l'optimisation d'une valeur propre avec une approche plus simple, naturelle et généralisable que dans ma thèse [Pet14a, Pet18, Pet19], comme je l'explique dans le Chapitre I.

Enfin, on ouvre de nombreuses perspectives de travail non encore étudiées comme par exemple : les différences de valeurs propres pour identifier de nouveaux trous spectraux ; les combinaisons de valeurs propres entre différents opérateurs ; des combinaisons infinies de valeurs propres pour atteindre des invariants riemanniens globaux.

En parallèle de ces travaux, Karpukhin et Stern [KS23] ont proposé une approche très différente. Ils se concentrent plus finement sur l'optimisation de la première valeur propre par une méthode variationnelle indirecte. Elle est basée sur un min-max de l'énergie d'applications à valeurs dans une sphère modelé sur le volume conforme de Li et Yau [LY82]. Ces travaux donnent une preuve alternative à [Pet14a] mais aussi des outils puissants pour montrer des résultats de stabilité sur la première valeur propre [KNPS21], approfondire le lien entre les optimiseurs de la première valeur propre de Steklov avec grand nombre de composantes de bord et ceux des valeurs propres du Laplacien [KS24] initié par [GL21a], construire des immersions minimales à bord libre sur n'importe quelle surface orientable à bord par optimisation équivariante de la première valeur propre de Steklov [KKMS24].

En m'appuyant sur [KKMS24] et des constructions de suites de Palais-Smale de [Pet25d], j'ai démontré l'existence de métriques optimales pour un grand nombre de combinaisons de valeurs propres du Laplacien (y compris des métriques maximales pour la première) sur toute surface orientable sans bord dans [Pet24a]. Par un travail plus fin sur les méthodes de [KS23, KKMS24], nous avons complété dans [KPS25] le résultat d'existence de métrique maximales pour la première valeur propre du Laplacien à toute topologie (y compris non orientable).

II.1 Formulations du problème, métriques critiques

Introduisons le cadre de travail. Etant donnée une fonction $F : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ décroissante par rapport à chaque coordonnée. On peut avoir en tête les fonctions du type

$$f_{m,a,s}(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{k=1}^m a_k (x_k)^{-s}$$

$$h_{m,a,s}(x_1, \cdots, x_m) = \left(\sum_{k=1}^m a_k (x_k)^s \right)^{-1}$$

pour $a \in (\mathbb{R}_+)^m \setminus \{0\}$ et $s > 0$. Pour $e = (1, \cdots, 1)$, on peut noter

$$f_m = f_{m,e,1} \text{ et } h_m = h_{m,e,1}$$

la somme des inverses et l'inverse de la somme des coordonnées. On regarde le problème de minimisation de la fonctionnelle E_F où :

$$I(\Sigma, F) = \inf_{g \in Met(\Sigma)} E_F(\Sigma, g)$$

où $Met(\Sigma)$ désigne l'ensemble des métriques Riemanniennes sur Σ et pour $g \in Met(\Sigma)$,

$$E_F(\Sigma, g) = F\left(\bar{\lambda}_1(\Sigma, g), \cdots, \bar{\lambda}_m(\Sigma, g)\right)$$

où pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $\bar{\lambda}_k$ désigne la k-ème valeur propre généralisée du Laplacien au sens suivant :

$$\bar{\lambda}_k(\Sigma, g) = \inf_{V \in \mathcal{G}_{k+1}(\mathcal{C}^\infty(\Sigma))} \max_{\phi \in V \setminus \{0\}} \frac{\int_\Sigma |\nabla \phi|_g^2 dA_g}{\int_\Sigma \phi^2 dA_g} \int_\Sigma dA_g,$$

où dA_g est la mesure d'aire par rapport à la métrique g et $\mathcal{G}_{k+1}(\mathcal{C}^\infty(\Sigma))$ est l'ensemble des sous espaces vectoriels de dimension $k+1$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$. Même en ne supposant pas dans cette définition que Σ est connexe, il faut comprendre que la convention sur les indices des valeurs propres est choisie de sorte que k désigne la k-ème valeur propre non nulle pour les surfaces connexes. $\bar{\lambda}_0 = 0$ est associée aux fonctions constantes. On définit également l'invariant conforme

$$I_c(\Sigma, [g], F) = \inf_{\tilde{g}\in[g]} E_F(\Sigma, \tilde{g})$$

où pour une surface riemannienne compacte sans bord (Σ, g), $[g]$ désigne la classe conforme de g dans Σ. On note en particulier

$$\Lambda_k(\Sigma) = I(\Sigma, (x \mapsto (x_k)^{-1}))^{-1} \text{ et } \Lambda_k(\Sigma, [g]) = I(\Sigma, [g], (x \mapsto (x_k)^{-1}))^{-1}$$

les problèmes de maximisations de la k-ème valeur propre du Laplacien renormalisée.

Remarquons que $I(\Sigma, F) > -\infty$ (et $I_c(\Sigma, [g], F) > -\infty$) par [Kor93] (ou [Has11])

$$\Lambda_k(\Sigma) = \sup_{g\in Met(\Sigma,g)} \bar{\lambda}_k(\Sigma, g) < +\infty$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et les propriétés de monotonie de F.

De la même façon, on peut définir

$$I^S(\Sigma, F) = \inf_{g\in Met(\Sigma)} E_F^S(\Sigma, g)$$

et

$$I_c^s(\Sigma, [g], F) = \inf_{\tilde{g}\in[g]} E_F^S(\Sigma, \tilde{g})$$

où

$$E_F^S(\Sigma, g) = F\left(\bar{\sigma}_1(\Sigma, g), \cdots, \bar{\sigma}_m(\Sigma, g)\right)$$

sur une surface compacte à bord munie d'une métrique $g \in Met(\Sigma)$ et où pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $\bar{\sigma}_k$ désigne la k-ème valeur propre de Steklov généralisée au sens suivant :

$$\bar{\sigma}_k(\Sigma, g) = \inf_{V\in\mathcal{G}_{k+1}(\mathcal{C}^\infty(\Sigma))} \max_{\phi\in V\setminus\{0\}} \frac{\int_\Sigma |\nabla\phi|_g^2 dA_g}{\int_{\partial\Sigma} \phi^2 dL_g} \int_{\partial\Sigma} dL_g,$$

où dL_g est la mesure de longueur par rapport à la métrique g sur le bord de Σ. On note en particulier

$$\sigma_k(\Sigma) = I(\Sigma, (x \mapsto (x_k)^{-1}))^{-1} \text{ et } \sigma_k(\Sigma, [g]) = I(\Sigma, [g], (x \mapsto (x_k)^{-1}))^{-1}$$

les problèmes de maximisations de la k-ème valeur propre de Steklov renormalisée.

Encore une fois, $I^S(\Sigma, F) > -\infty$ par [Has11]

$$\sigma_k(\Sigma) = \sup_{g\in Met(\Sigma,g)} \bar{\sigma}_k(\Sigma, g) < +\infty$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et les propriétés de monotonie de F.

II.1.1 Métriques critiques

Dans [Pet23a] (resp [Pet24b]), on remarque le lien entre les métriques critiques de la fonctionnelle $E : g \mapsto E_F(\Sigma, g)$ (resp $E : g \mapsto E_F^S(\Sigma, g)$) et les immersions minimales branchées (resp à bord libre) dans des ellipsoïdes. Enonçons précisément ce lien. Dans ce mémoire, on n'utilise que la définition originelle de métrique critique de [Nad96] :

$$\forall h \in S_0^2(\Sigma), \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{E(g+th)-E(g)}{t} \lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} \frac{E(g+th)-E(g)}{t} \leqslant 0. \tag{II.1}$$

où $S_0^2(\Sigma)$ est l'espace tangent de l'ensemble des métriques : les 2-tenseurs symétriques. Comme nous le remarquons dans [PT24], la condition II.1 est équivalente à $0 \in \partial E(\Sigma, g)$, où $\partial E(\Sigma, g)$ désigne le sous-différentiel classique (ou sous-différentiel de Fréchet). [1] De manière analogue, une métrique est critique à classe conforme contrainte si

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma), \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{E(g(1+tf))-E(g)}{t} \lim_{\substack{t \to 0 \\ <}} \frac{E(g(1+tf))-E(g)}{t} \leqslant 0. \tag{II.2}$$

Les minima locaux de E (resp dans la classe conforme) sont évidemment critiques au sens de la définition (II.1) (resp définition (II.2)).

On note l'ellipsoïde

$$\mathcal{E}_\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x|_\Lambda = 1\}$$

où $|x|_\Lambda = \langle \Lambda \cdot x, x \rangle$ et Λ est une matrice diagonale qui contient les paramètres de l'ellipsoïde.

Théorème II.1.1 ([Pet23a][PT24])**.** *Soit (Σ, g) une surface Riemannienne compacte sans bord. On Suppose que g est une métrique critique pour $E_F(\Sigma, \cdot)$. Alors, il existe une application $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ telle que*

(1) Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la coordonnée ϕ_i est une fonction propre associée à $\lambda_i := \lambda_i(\Sigma, g)$. En notant $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}, \lambda_m, \cdots, \lambda_m)$, on écrit l'équation vectorielle

$$\Delta_g \Phi = \Lambda \cdot \Phi$$

(2) $|\Phi|_\Lambda = 1$

(3) $d\Phi \otimes d\Phi = \frac{|\nabla \Phi|^2}{2} g$

(4) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, en notant $I_i = \{1 \leqslant j \leqslant n ; \lambda_j = \lambda_i\}$, on a

$$\sum_{j \in I_i} \int_\Sigma \phi_i^2 dA_g = \frac{\sum_{k \in I_i \cap \{1, \cdots, m\}} \partial_k F(\bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_m)}{\sum_{k=1}^m \lambda_k \partial_k F(\bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_m)} A_g(\Sigma).$$

où $\bar{\lambda}_i = \lambda_i A_g(\Sigma)$. Si g est seulement une métrique critique pour la fonctionnelle $E_F(\Sigma, \cdot)$ restreinte à la classe conforme de g, alors il existe une application $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ qui vérifie les conditions (1), (2) et (4).

1. Tous les calculs de métriques critiques précédemment connus utilisent la définition II.1 qui est en pratique suffisante pour des métriques extrémales. Dans [PT24], nous nous rattachons à la théorie des sous-différentiels pour des fonctions localement Lipschitziennes introduite par Clarke. Celle-ci est plus adaptée pour comprendre la notion de métrique critique, notamment dans le cas de combinaisons de valeurs propres. En effet, le sous-différentiel de Clarke est construit pour satisfaire une règle de la chaîne, ce qui n'est pas le cas du sous-différentiel classique en général.

On remarque que (1) et (2) signifient que $\Phi : \Sigma \to \mathcal{E}_\Lambda$ est une application harmonique au sens où c'est un point critique de l'énergie des applications $\Psi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ sous la contrainte $|\Psi|_\Lambda = 1$. (3) signifie que Φ est conforme. (1), (2) et (3) signifient donc que Φ est une immersion minimale dans $\mathcal{E}_\Lambda$, au sens où c'est un point critique de l'aire de $\Psi(\Sigma)$ parmi toutes les applications $\Psi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ satisfaisant la contrainte $|\Psi|_\Lambda = 1$.

On quantifie également les masses individuelles des coordonnées de Φ dans (4) en fonction du choix de la fonctionnelle spectrale E_F. On donne dans [PT24] une description plus fine que (4) dans le cas où des valeurs propres pour g sont multiples.[2] De plus, on fournit dans [PT24] une réciproque au Théorème II.1.1 : toute immersion minimale dans un ellipsoïde peut être associée à une métrique critique d'une certaine fonctionnelle spectrale E_F.[3]

Insistons sur le fait que l'information qu'on perd en ne calculant la criticalité que dans les directions conformes à g est exactement (3) : la conformalité de l'application Φ.

On énonce plus rapidement le résultat analogue dans le cadre à bord :

Théorème II.1.2 ([Pet24b, PT24])**.** *Soit (Σ, g) une surface Riemannienne compacte avec un bord. On Suppose que g est une métrique critique pour $E_F^S(\Sigma, \cdot)$. Alors, il existe une application $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ telle que*

(1) Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la coordonnée ϕ_i est une fonction propre associée à $\sigma_i := \sigma_i(\Sigma, g)$. En notant $\sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_{m-1}, \sigma_m, \cdots, \sigma_m)$, on écrit l'équation vectorielle

$$\begin{cases} \Delta_g \Phi = 0 \text{ dans } \Sigma \\ \partial_\nu \Phi = \sigma \cdot \Phi \text{ sur } \partial\Sigma \end{cases}$$

(2) $|\Phi|_\sigma = 1$ sur $\partial\Sigma$

(3) $d\Phi \otimes d\Phi = \frac{|\nabla\Phi|^2}{2} g$

(4) Pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, en notant $I_i = \{1 \leqslant j \leqslant n; \sigma_j = \sigma_i\}$, on a

$$\sum_{j \in I_i} \int_{\partial\Sigma} \phi_i^2 dL_g = \frac{\sum_{k \in I_i \cap \{1, \cdots, m\}} \partial_k F(\bar\sigma_1, \cdots, \bar\sigma_m)}{\sum_{k=1}^m \sigma_k \partial_k F(\bar\sigma_1, \cdots, \bar\sigma_m)} L_g(\partial\Sigma).$$

où $\bar\sigma_i = \sigma_i L_g(\partial\Sigma)$. Si g est seulement une métrique critique pour la fonctionnelle $E_F^S(\Sigma, \cdot)$ restreinte à la classe conforme de g, alors il existe une application $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ qui vérifie les conditions (1), (2) et (4).

Comme pour le cas sans bord, on obtient des interprétations géométriques : (1) et (2) signifient que $\Phi : (\Sigma, \partial\Sigma) \to (co(\mathcal{E}_\sigma), \mathcal{E}_\sigma)$ est une application harmonique à bord libre au sens où c'est un point critique de l'énergie des applications $\Psi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ sous la contrainte $|\Psi|_\sigma = 1$ sur $\partial\Sigma$. On note que par principe du maximum et convexité de l'ellipsoïde plein, Φ est à valeurs dans $co(\mathcal{E}_\sigma)$ et n'atteint $\mathcal{E}_\sigma$ qu'au bord $\partial\Sigma$. (3) signifie que Φ est conforme. (1), (2) et (3) signifient donc que Φ est une immersion minimale à bord libre proprement immergée dans $(co(\mathcal{E}_\sigma), \mathcal{E}_\sigma)$, au sens où c'est un point critique de l'aire de $\Psi(\Sigma)$ parmi les applications $\Psi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ satisfaisant la contrainte $|\Psi|_\sigma = 1$ sur $\partial\Sigma$. On dit que Φ est proprement immergée du fait de la propriété $\Phi^{-1}(\mathcal{E}_\sigma) = \partial\Sigma$.

Donnons un point de vocabulaire pour la suite du chapitre :

2. Ces conditions peuvent être comprises sur appliquation de la règle de la chaîne : le sous différentiel de la combinaison de valeurs propres est inclus dans une combinaison linéaire des sous-différentiels de Clarke associés à une seule valeur propre.

3. En pratique, nous montrons que certaines familles de fonctionnelles E_F qui satisfont la condition (4) conviennent en calculant précisément leur sous-différentiel en g. Les conditions (1), (2), (3) et (4) imposent alors que 0 appartient au sous-différentiel de E_F en g

Définition II.1.3. On dit que $I(\Sigma, F)$ (resp $I_c(\Sigma, [g], F)$) est atteint s'il existe une métrique minimale pour $I(\Sigma, F)$ (resp $I_c(\Sigma, [g], F)$) lisse en-dehors de singularités coniques. On dit que $I^S(\Sigma, F)$ (resp $I_c^S(\Sigma, [g], F)$) est atteint s'il existe une métrique minimale pour $I^S(\Sigma, F)$ (resp $I_c^S(\Sigma, [g], F)$) lisse.

Dans le cas sans bord, les singularités coniques sont autorisées pour les métriques critiques g car elles apparaissent naturellement dans ces problèmes (voir Remarque I.2.6 pour les métriques critiques de la première valeur propre). Par exemple, en genre 2, toutes les métriques maximales ont des singularités coniques [JLN+05, NS19]. Géométriquement, ce sont les points de ramification des surfaces minimales $\Phi(\Sigma)$. Analytiquement ce sont les zéros de la densité d'énergie $\frac{|\nabla\Phi|^2_{g_0}}{2}$ de l'application harmonique $\Phi : (\Sigma, g_0) \to \mathcal{E}_\sigma$ calculée par rapport à une métrique de référence lisse g_0 dans la classe conforme de g. Plus précisément, on déduit de (1) et (2) en utilisant $0 = \frac{1}{2}\Delta_{g_0}|\Phi|^2$,

$$g = \frac{|\nabla\Phi|^2_{\Lambda,g_0}}{|\Lambda\Phi|^2} g_0$$

où $|\nabla\Phi|^2_{\Lambda,g_0} = \sum_i \lambda_i |\nabla\phi_i|^2_{g_0}$. Dans une carte conforme, les zéros de $\nabla\Phi$ sont des zéros de fonctions complexes : l'angle du cône en cette singularité est un multiple entier de 2π. Noter que le Théorème II.1.1 se généralise aux métriques à singularités coniques. [4]

Au contraire, autoriser les métriques g à singularité conique n'est pas nécessaire dans le cas à bord. En effet, choisissons une métrique lisse g_0 dans la classe conforme de g. Meme si l'image de l'application $\Phi : (\Sigma, \partial\Sigma, g_0) \to (co(\mathcal{E}_\sigma), \mathcal{E}_\sigma)$ peut avoir des points de ramification, la critique associée g s'écrit

$$g = V g_0 \text{ où } V = \partial_\nu \Phi \cdot \Phi \text{ sur } \partial\Sigma.$$

Autrement dit, V est un prolongement à Σ d'une certaine fonction positive sur $\partial\Sigma$. Les valeurs propres de Steklov associées à g ne dépendent pas du choix du prolongement de V à Σ car le numérateur du quotient de Rayleigh est invariant conforme et le dénominateur ne dépend que de la valeur du facteur conforme au bord. On peut donc choisir un prolongement lisse de $\partial_\nu\Phi \cdot \Phi$ qui est strictement positif à l'intérieur de Σ. On utilise simplement la notion de métriques Steklov-isométriques au sens de [FS16]. Par ailleurs, la Proposition III.1.8 impose $\partial_\nu\Phi \cdot \Phi > 0$ sur $\partial\Sigma$, c'est à dire que $\Phi(\Sigma)$ n'a pas de point de ramification au bord. Ainsi, g peut être choisie lisse sur tout Σ.

II.1.2 Valeurs propres généralisées

On souhaite mieux prendre en compte l'invariance conforme de l'énergie de Dirichlet (numérateur du quotient de Rayleigh) : une transformation conforme de la métrique g n'a d'effet que sur le dénominateur du quotient de Rayleigh et sur l'aire dans la définition de $\bar{\lambda}_k(\Sigma, g)$. Par ailleurs, on rappelle que le calcul de métriques critiques (Théorèmes II.1.1 et II.1.2), donne une application $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont des fonctions propres. La propriété (2) "$|\Phi|^2_\Lambda = 1$" se déduit de la criticalité pour des variations dans la direction conforme à g alors que la propriété (3) "$d\Phi \otimes d\Phi = \frac{|\nabla\Phi|^2_g}{2} g$" provient d'une variation globale de la métrique mais reste invariante par transformation conforme de la

4. On peut utiliser par exemple la notion de valeur propre généralisée de la Sous-section II.1.2 pour faire porter la singularité sur la "variable mesure" et l'espace variationnel de la Sous-section I.4.3 à la place de l'espace des mesures.

métrique. Il est alors naturel et crucial de séparer ces deux variations. Par ailleurs, d'un point de vue analytique, comme on l'a vu dans la Sous-section I.4.3, on a besoin d'espaces variationnels robustes qui permettent de construire des minimiseurs.

Ainsi, on définit des valeurs propres généralisées : pour une surface compacte Σ, une métrique riemannienne g et une mesure positive μ, on pose

$$\bar{\lambda}_k(\Sigma, g, \mu) = \inf_{V \in \mathcal{G}_{k+1}(\mathcal{C}^\infty(\Sigma))} \max_{\phi \in V \setminus \{0\}} \frac{\int_\Sigma |\nabla \phi|_g^2 dA_g}{\int_\Sigma \phi^2 d\mu} \int_\Sigma d\mu.$$

On remarque que si Σ est compacte sans bord, on a $\bar{\lambda}_k(\Sigma, g) = \bar{\lambda}_k(\Sigma, g, dA_g)$. Si Σ est compacte à bord, on a $\bar{\sigma}_k(\Sigma, g) = \bar{\lambda}_k(\Sigma, g, dL_g)$. De plus, la propriété d'invariance conforme se lit clairement sur notre nouvelle fonctionnelle : lorsque $\tilde{g} = e^{2u} g$,

$$E_F(\Sigma, \tilde{g}, \mu) = E_F(\Sigma, g, \mu)$$

où

$$E_F(\Sigma, g, \mu) = F\left(\bar{\lambda}_1(\Sigma, g, \mu), \cdots, \bar{\lambda}_m(\Sigma, g, \mu)\right).$$

Ainsi, pour les couples critiques (g, μ), la condition (2) vient des variations par rapport à la variable métrique et la condition (3) vient des variations par rapport à la variable mesure. [5]

Ce point de vue unifie de surcroît le cadre sans bord (valeurs propres du Laplacien) et le cadre à bord (valeurs propres de Steklov). Plus précisément, si Σ est compacte sans bord, dès que μ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure d'aire d'une métrique de référence $g_0 \in Met(\Sigma)$, c'est à dire $\mu = \beta dA_{g_0}$, alors comme toutes les mesures d'aire par rapport aux métriques riemanniennes sont absolument continues les unes par rapport aux autres avec une densité lisse et strictement positives, $dA_{g_0} = \beta_0 dA_g$ pour $\beta_0 \in \mathcal{C}^\infty_{>0}$, ce qui donne

$$I(\Sigma, F) = \inf_{g \in Met(\Sigma), \beta \in \mathcal{C}^\infty_{>0}(\Sigma)} E_F(\Sigma, g, \beta dA_{g_0})$$

De même, si Σ est compacte à bord, et si μ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de longueur de $g_0 \in Met(\partial\Sigma)$ alors $dL_{g_0} = \beta_0 dL_g$ pour $\beta_0 \in \mathcal{C}^\infty_{>0}$, et

$$I^S(\Sigma, F) = \inf_{g \in Met(\Sigma), \beta \in \mathcal{C}^\infty_{>0}(\partial\Sigma)} E_F(\Sigma, g, \beta dL_{g_0}).$$

Avec mon approche du Chapitre I, tout le jeu analytique est de travailler sur des espaces variationnels $\mathcal{A}$ dans $Met(\Sigma) \times Mes_+(\Sigma)$ (selon si Σ a un bord ou non) qui sont *admissibles* pour trois raisons principales : d'abord

$$I(\Sigma, F) = \inf_{(g,\mu) \in \mathcal{A}} E_F(\Sigma, g, \mu) \text{ ou } I^S(\Sigma, F) = \inf_{(g,\mu) \in \mathcal{A}} E_F(\Sigma, g, \mu),$$

ensuite ils permettent la formulation d'équations d'Euler-Lagrange sur les points critiques, et enfin la complétude permet d'appliquer le principe variationnel d'Ekeland (voir Chapitre I). La notion de *mesure admissible* formulée dans [Kok14, KS23, GKL21] demande l'injection compacte $H^1(\Sigma, g) \subset L^2(\Sigma, \mu)$. Dans un autre point de vue, cela correspond à l'hypothèse (H3) du Chapitre I donné dans [PT24, hypothèse D]. Cette condition résout en partie le problème mais ne fournit pas d'espace complet. Dans le Chapitre I et

5. A la condition que les espaces variationnels de calcul soient adaptés pour formuler une équation d'Euler-Lagrange (voir Chapitre I)

[Pet25d, Pet24a], on se restreint à des mesures qui agissent comme des formes bilinéaires continues sur des fonctions H^1 pour obtenir un *espace variationnel admissible.*

Gardons également à l'esprit l'invariance par difféomorphisme $\theta : \Sigma' \to \Sigma$

$$E_F(\Sigma', \theta^* g, \theta^* \mu) = E_F(\Sigma, g, \mu).$$

II.2 Optimisation dans une classe conforme

L'optimisation dans une classe conforme est intéressante en soi, car elle s'inscrit dans une longue tradition (recherche de métriques à courbure de Gauss constante dans la classe conforme, et de courbure scalaire ou de Q-courbure constante en dimension supérieure dans la classe conforme, etc). Par ailleurs, la maximisation des valeurs propres est d'autant plus pertinente en dimension $n \geqslant 3$ qu'il existe une borne supérieure des valeurs propres renormalisées parmi toutes les métriques dans une classe conforme [Kor93, Has11], ce qui n'est pas le cas parmi toutes les métriques [Dod94]. Remarquons que la sphère $\mathbb{S}^2$ dans le cas sans bord et le disque $\mathbb{D}$ dans le cas à bord joueront un rôle prépondérant car leur groupe conforme est non compact. Par ailleurs, en dimension 2, en notant h la métrique ronde sur $\mathbb{S}^2$ et ξ la métrique euclidienne sur $\mathbb{D}$,

$$I_F(\mathbb{S}^2, [h]) = I_F(\mathbb{S}^2) \text{ et } I_F^S(\mathbb{D}, [\xi]) = I_F^S(\mathbb{D})$$

par l'invariance par difféomorphisme et le théorème d'uniformisation.

Dans ce chapitre, l'optimisation dans une classe conforme est également vue comme une étape vers les résultats d'optimisation parmi toutes les métriques. En effet, si Σ est compacte sans bord,

$$I(\Sigma, F) = \inf_{g \in Met(\Sigma)} I_c(\Sigma, [g], F)$$

où pour $g_0, g \in Met(\Sigma)$ fixés,

$$I_c(\Sigma, [g], F) = \inf_{\beta \in \mathcal{C}^\infty_{>0}} E_F(\Sigma, g, \beta dA_{g_0}).$$

On obtient un problème de minimisation par rapport à la variable mesure puis par rapport à la variable métrique de $E_F(\Sigma, \cdot, \cdot)$. On sépare les difficultés. Par ailleurs la minimisation par rapport à la variable métrique est réduite à une minimisation parmi toutes les classes conformes de métriques par invariance conforme de $g \mapsto E_F(\Sigma, g, \mu)$. La minimisation dans une classe conforme (par rapport à la variable mesure) suit les étapes analytiques énumérées dans le Chapitre I. Du fait de l'invariance par difféomorphismes de $I(\Sigma, [g], F)$, sa minimisation parmi toutes les classes conformes se réduit alors à un espace variationnel de dimension finie : l'espace de Teichmuller, par exemple difféomorphe à $\mathbb{R}^{6\gamma-6}$ si Σ est compacte sans bord orientable de genre γ. Le principe est le même dans le cas à bord.

II.2.1 Fonctionnelles sur le spectre du Laplacien

On énonce le résultat principal de [Pet23a] redémontré dans [Pet25d].

Théorème II.2.1 ([Pet23a]). *Soit (Σ, g) une surface riemannienne compacte sans bord. On suppose que pour tout $\widetilde{\Sigma}$ qui s'écrit comme une union finie du type*

$$(\widetilde{\Sigma}, \tilde{g}) = (\Sigma, g) \sqcup (\mathbb{S}^2, h) \sqcup \cdots \sqcup (\mathbb{S}^2, h) \tag{II.3}$$

ou du type

$$(\widetilde{\Sigma},\tilde{g}) = (\mathbb{S}^2,h)\sqcup\cdots\sqcup(\mathbb{S}^2,h) \tag{II.4}$$

où h est la métrique ronde de $\mathbb{S}^2$, on a

$$I_c(\Sigma,[g],F) < I_c(\widetilde{\Sigma},[\tilde{g}],F). \tag{II.5}$$

Alors $I_c(\Sigma,[g],F)$ est atteint.

On remarque que pour toute surface $(\widetilde{\Sigma},\tilde{g})$ du type (II.3) ou (II.4),

$$I_c(\Sigma,[g],F) \leqslant I_c(\widetilde{\Sigma},[\tilde{g}],F) \tag{II.6}$$

par une adaptation des résultats de [CES03]. Cette égalité s'obtient en testant pour $I_c(\Sigma,[g],F)$ une métrique conforme à g qui s'approche de la géométrie d'une métrique presque minimale pour $\widetilde{\Sigma}$ via le recolement local de bulles. De plus, si k est le plus grand entier tel que F est non constante par rapport à la k-ème coordonnée, tester (II.5) pour des surfaces $\widetilde{\Sigma}$ ayant au maximum un nombre de composantes connexes plus petit que k est suffisant.

Dans un cas général, cette hypothèse portant sur des déconnexions de surfaces (ou dans un autre vocabulaire l'apparition de bulles) est optimale. En effet, dans le cas de la maximisation de la k-ème valeur propre sur la sphère, on a l'égalité (voir [KNPP21])

$$\Lambda_k(\mathbb{S}^2) = 8\pi k = k\Lambda_1(\mathbb{S}^2) = \Lambda_k(\mathbb{S}^2\sqcup\cdots\sqcup\mathbb{S}^2) \tag{II.7}$$

où l'union du terme à droite fait intervenir k copies de la sphère. De même, on a [Kar21]

$$\Lambda_k(\mathbb{RP}^2) = 12\pi + 8\pi(k-1) = \Lambda_1(\mathbb{RP}^2) + (k-1)\Lambda_1(\mathbb{S}^2) = \Lambda_k(\mathbb{RP}^2\sqcup\mathbb{S}^2\sqcup\cdots\sqcup\mathbb{S}^2) \tag{II.8}$$

où l'union du terme à droite fait intervenir $k-1$ copies de la sphère. C'est d'ailleurs précisément en utilisant le Théorème II.2.1 dans sa version initiale prouvée dans ma thèse pour des fonctionnelles spectrales faisant intervenir une seule valeur propre [Pet18] (voir aussi [KNPP22]) qu'il est démontré dans [KNPP21] et [Kar21] les égalités (II.7) et (II.8). Les preuves procèdent par contraposée. Par exemple, dans le cas de la sphère, $\Lambda_k(\mathbb{S}^2)$ n'est pas atteint pour $k\geqslant 2$. En effet, la k-ème valeur propre renormalisée des métriques induites des immersions minimales branchées $\Phi:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^N$ associées aux k-ème valeurs est strictement plus petite que $8\pi k$. C'est un résultat d'Ejiri [Eji98]. Ainsi, l'inégalité (II.6) ne peut être qu'une égalité pour tous $F(x) = (x_k)^{-1}$ pour $k\geqslant 2$.

Néanmoins, pour certains choix de $F:\mathbb{R}_+^m\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, on peut énoncer un résultat pour lequel il n'est pas nécessaire de tester des inégalités strictes pour des surfaces non connexes. On note $\hat{F}:\mathbb{R}_+^m\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ la fonction définie par

$$\hat{F}(x_1,x_2,\cdots,x_m) = F(0,x_2,\cdots,x_m).$$

Théorème II.2.2 ([Pet23a]). *Soit (Σ,g) une surface riemannienne compacte sans bord. On suppose que*

$$I_c(\Sigma,[g],F) < I_c(\Sigma,[g],\hat{F}) \tag{II.9}$$

et si

$$\Sigma\neq\mathbb{S}^2 \Rightarrow I_c(\Sigma,[g],F) < I_c(\mathbb{S}^2,F). \tag{II.10}$$

Alors $I_c(\Sigma,[g],F)$ est atteint.

L'hypothèse (II.9) peut s'interpréter comme une demande de stabilité sur l'indice de la première valeur propre. Elle empêche les suites minimisantes du problème de dégénérer en des surfaces non connexes car la suite des premières valeurs propres associées ne tend pas vers 0. Autrement dit, les "haltères de Cheeger" sont proscrites. Dans ce contexte, (II.10) est la conséquence de l'hypothèse (II.5) pour les surfaces $\widetilde{\Sigma}$ connexes. On note que (II.9) est automatique pour $f_{m,a,s}$ si $a_1 > 0$, mais elle nécessite des vérifications pour les fonctions $h_{m,a,s}$. Dans le cas le plus simple de la maximisation de la première valeur propre sue n'importe quelle classe conforme, (II.9) est automatique mais (II.10) a nécessité une preuve (voir Théorème I.3.2).

Dans [Pet23a, Pet24b], on donne des hypothèses plus générales où tester l'inégalité que pour des surfaces à k composantes connexes est suffisant sous une condition sur F qui empêche la k-ème valeur propre des suites minimisantes de tendre vers 0.

Noter que la condition (II.10) est vide lorsque Σ est difféomorphe à une sphère. Le Chapitre III donne des exemples d'application sur la sphère où la démonstration de (II.9) est nécessaire (par exemple $h_{2,(1,t),1}$ pour $t \geqslant 1$).

On donne un aperçu de la démonstration du Théorème II.2.1 en suivant les mêmes étapes que dans la Sous-section I.5.2. On insiste sur les différences entre le cas de la première valeur propre et celui des combinaisons. Le vocabulaire d'analyse multibulle qu'on utilise n'est pas défini ici, on renvoie à [Pet25d].

Etape 0 : On applique un principe variationnel d'Ekeland sur une suite maximisante $(\Sigma, g_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon)$ (analogue de la Proposition I.4.11 pour des combinaisons). On obtient des suites $g_\varepsilon = \tilde{\beta}_\varepsilon g$, β_ε, Φ_ε, θ_ε qui vérifient

$$\begin{cases} \Delta_g \Phi_\varepsilon = \beta_\varepsilon (\Lambda_\varepsilon . \Phi_\varepsilon, \cdot) \\ |\Phi_\varepsilon|^2_{\Lambda_\varepsilon} + \theta_\varepsilon^2 \geqslant 1 \text{ où } \|\theta_\varepsilon\|^2_{H^1(g_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon \\ \int_\Sigma |\Phi_\varepsilon|^2_{\Lambda_\varepsilon} d\beta_\varepsilon = \int_\Sigma d\beta_\varepsilon = 1 + O(\varepsilon) \end{cases} \tag{II.11}$$

où $\Lambda_\varepsilon = diag\left((\bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_m)(\Sigma, g, \beta_\varepsilon dA_g)\right)$.

Etape 1 : On pose

$$\omega_\varepsilon = \sqrt{|\Phi_\varepsilon|^2_{\Lambda_\varepsilon} + \theta_\varepsilon^2}.$$

D'après l'Etape 0, $\omega_\varepsilon \geqslant 1$ et les termes d'erreurs vérifient $\|\theta_\varepsilon\|^2_{H^1(g_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon$. On obtient

$$\int_\Sigma |\nabla \omega_\varepsilon|^2_g dA_g + \int_\Sigma \left| \nabla \left(\Phi_\varepsilon - \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon} \right) \right|^2_{\Lambda_\varepsilon, g} dA_g + \int_\Sigma \omega_\varepsilon^2 \left| \nabla \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon} \right|^2_{\Lambda_\varepsilon, g} dA_g \leqslant C \|\theta_\varepsilon\|^2_{H^1(g_\varepsilon)} \tag{II.12}$$

Etape 2 : C'est à cette étape qu'interviennent deux grandes différences matérialisées par deux sous-étapes :

Etape 2.1 : La suite des mesures (β_ε) peut admettre des points de concentration lorsque $\varepsilon \to 0$. Par un argument de type "haltères de Cheeger", il n'est pas difficile d'identifier une convergence en arbre de bulle par rapport à la convergence faible* de cette suite. Outre l'échelle de Σ, où on ne fait aucune transformation, quitte à faire une projection stéréographique et une dilatation, on peut observer les autres échelles de convergence de β_ε sur des sphères.

Le nombre de rééchelonnements de β_ε à masse uniformément minorée est majoré par le plus petit indice k tel que $\lambda_k(\Sigma, g, \beta_\varepsilon)$ ne tend pas vers 0. Noter que dans le cadre plus simple du Théorème II.2.2, on n'a que deux possibilités : soit (β_ε) ne se concentre pas, soit il n'a qu'une échelle de concentration qui prend toute la masse quand $\varepsilon \to 0$.

Enfin, il faut noter que si Σ est une sphère, quitte à utiliser le groupe conforme de la sphère, on peut supposer que si β_ε se concentre, alors il existe au moins deux échelles pour lesquelles β_ε a une masse uniformément minorée. Dans le cadre plus simple du Théorème II.2.2, on peut donc toujours supposer que β_ε n'a pas de point de concentration.

A partir de maintenant, par invariance par difféomorphisme conforme des deux premières lignes du système (II.11), elles sont vérifiées à chaque échelle.

Etape 2.2 : A chaque échelle où β_ε est de masse uniformément minorée lorsque $\varepsilon \to 0$, on peut démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \Sigma \setminus \{p_1, \cdots, p_k\}, \exists r(x) > 0, \lambda_\star(\mathbb{D}_{r(x)}(x), \beta_\varepsilon) \geqslant \lambda_m(\Sigma, \beta_\varepsilon) \tag{II.13}$$

ici écrite sur Σ mais qui peut s'écrire sur les copies de $\mathbb{S}^2$ après rééchelonnement. Ces inégalités locales ont lieu seulement en-dehors de points $p_1, \cdots, p_k$. Les points de concentration de β_ε en font partie, mais ce ne sont a priori pas les seuls ! Cet entier k est borné par $m-1$. L'inégalité (II.13) avec $\lambda_m(\Sigma, \beta_\varepsilon)$ comme majorant est primordiale pour montrer l'étape 3 et surtout la propriété (II.14).

Une fois cette étape 2 établie, l'analyse de la Sous-section I.5.2 se généralise à chaque échelle identifiée à l'Etape 2.1 où le rééchelonnement β_ε a une masse uniformément minorée. On travaille donc sur Σ ou par dilatation puis projection stéréographique sur $\mathbb{S}^2$. Toutes les estimées locales ont alors lieu en-dehors des points $p_1, \cdots, p_k$ donnés par l'Etape 2.2.

Etape 3 : On montre que pour $\varepsilon_0 > 0$ et $x \in \Sigma \setminus \{p_1, \cdots, p_k\}$ donné, il existe $r < r(x)$ tel que

$$\int_{\mathbb{D}_r(x)} |\nabla \Phi_\varepsilon|^2 \leqslant \varepsilon_0.$$

Etapes 4, 5, 6 : Sans rentrer dans les détails, on définit un bon remplacement harmonique Ψ_ε de Φ_ε sur $\mathbb{D}_r(x)$ de sorte que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}_r(x)} |\nabla (\Psi_\varepsilon - \Phi_\varepsilon)|^2 = o(1) \tag{II.14}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$ et en utilisant une borne L^∞ sur $|\nabla \Psi_\varepsilon|^2$ grâce à des estimées qui ne dépendent pas du nombre possiblement arbitrairement grand de coordonnées de Ψ_ε (voir [Pet25c]),

$$\| |\nabla \Psi_\varepsilon|^2 \|_{L^\infty(\mathbb{D}_{\frac{r}{2}}(x))} \leqslant C \int_{\mathbb{D}_r(x)} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2.$$

Ceci implique que quitte à prendre une sous-suite on obtient une mesure β absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue avec densité L^∞ telle que

$$\beta_\varepsilon \rightharpoonup_\star \beta \text{ sur } \mathbb{D}_{\frac{r}{2}}(x).$$

Quitte à globaliser l'argument avec des partitions de l'unité, β est défini sur Σ et éventuellement sur plusieurs copies de $\mathbb{S}^2$ qui correspondent aux échelles de concentration. La semi-continuité supérieure des valeurs propres pour la convergence faible* multibulle et les propriétés de monotonie de F impliquent

$$I_F(\Sigma, [g]) = \lim_{\varepsilon \to 0} E_F(\Sigma, g, \beta_\varepsilon) \geqslant E_F(\Sigma \sqcup \mathbb{S}^2 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{S}^2, \tilde{g}, \beta)$$

où $\tilde{g}$ est la métrique valant g sur Σ et la métrique de la sphère ronde h sur les copies de $\mathbb{S}^2$. Ainsi, cela contredit l'une des inégalités strictes (II.5) en cas de concentration de la suite β_ε. La limite β fournit alors un minimiseur pour $I_c(\Sigma, [g])$ qui est a posteriori lisse avec nombre fini de singularités coniques par régularité des minimiseurs.

II.2.2 Fonctionnelles sur le spectre de Steklov

Plus rapidement, énonçons le résultat pour le cas à bord tiré de [Pet24b] et revu avec les méthodes de [Pet25d].

Théorème II.2.3 ([Pet24b]). *Soit (Σ, g) une surface riemannienne compacte à bord. On suppose que pour tout $\widetilde{\Sigma}$ qui s'écrit comme une union finie du type*

$$(\widetilde{\Sigma}, \tilde{g}) = (\Sigma, g) \sqcup (\mathbb{D}, \xi) \sqcup \cdots \sqcup (\mathbb{D}, \xi) \tag{II.15}$$

ou du type

$$(\widetilde{\Sigma}, \tilde{g}) = (\mathbb{D}, \xi) \sqcup \cdots \sqcup (\mathbb{D}, \xi) \tag{II.16}$$

où ξ est la métrique euclidienne de $\mathbb{D}$, on a

$$I_c(\Sigma, [g], F) < I_c(\widetilde{\Sigma}, [\tilde{g}], F). \tag{II.17}$$

Alors $I_c(\Sigma, [g], F)$ est atteint.

On note que pour toute surface $(\widetilde{\Sigma}, \tilde{g})$ du type (II.15) ou (II.16),

$$I_c(\Sigma, [g], F) = I_c(\widetilde{\Sigma}, [\tilde{g}], F)$$

par un résultat qui n'a étonnamment jamais été écrit avant [Pet25a]. Le résultat est optimal. En effet, le seul disque minimal (immergé branché) à bord libre dans une boule unité de $\mathbb{R}^N$ est le disque euclidien (par [FS15]). Le supremum de $\sigma_k(\mathbb{D})$ ne peut pas être atteint pour $k \geqslant 2$ car le seul point critique de σ_k - le disque euclidien - satisfait $\sigma_k(\mathbb{D}, \xi) = \pi \left[\frac{k+1}{2}\right]$ et on a $\sigma_k(\mathbb{D}) \geqslant 2\pi k$. On déduit du Théorème II.2.3 :

$$\sigma_k(\mathbb{D}) = 2\pi k = k\sigma_1(\mathbb{D}) = \sigma_k(\mathbb{D} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{D}).$$

On obtient une preuve alternative d'un résultat de [HPS75], avec l'information supplémentaire que ce n'est jamais atteint pour $k \geqslant 2$.

On donne aussi la version "surfaces connexes" du Théorème II.2.3.

Théorème II.2.4 ([Pet24b]). *Soit (Σ, g) une surface riemannienne compacte à bord. On suppose que*

$$I_c(\Sigma, [g], F) < I_c(\Sigma, [g], \hat{F}) \tag{II.18}$$

et si

$$\Sigma \neq \mathbb{D} \Rightarrow I_c(\Sigma, [g], F) < I_c(\mathbb{D}, F). \tag{II.19}$$

Alors $I_c(\Sigma, [g], F)$ est atteint.

Encore une fois, noter que (II.19) est une hypothèse vide si Σ est difféomorphe à un disque. Une application détaillée de ce résultat est donnée dans le Chapitre III. Contrairement au cas analogue de la première valeur propre du Laplacien (Théorème I.3.2), l'inégalité (II.19) qui se traduit pour la première valeur propre de Steklov par $\sigma_1(\Sigma, [g]) > 2\pi$ reste ouverte en général. Dans [Pet25a], nous montrons qu'elle est vraie pour toutes les classes conformes de l'anneau et de la bande de Möbius.

II.2.3 Applications à l'optimisation parmi toutes les métriques

Soit Σ et $\widetilde{\Sigma}$ deux surfaces compactes sans bord (non nécessairement connexes). On dit que $\widetilde{\Sigma}$ est de topologie strictement inférieure à Σ et on note

$$\widetilde{\Sigma} < \Sigma$$

si $\widetilde{\Sigma}$ peut être construite à partir de Σ en la découpant le long d'un nombre fini non nul de courbes simples fermées disjointes. $\widetilde{\Sigma}$ est la surface compacte sans bord obtenue en recollant un disque le long de chaque composante connexe du bord.

De plus, pour des surfaces compactes connexes sans bord Σ, Σ_1, Σ_2, on dit que Σ est la somme connexe de Σ_1 et Σ_2 et on note

$$\Sigma = \Sigma_1 \sharp \Sigma_2$$

si Σ est obtenue en découpant un disque dans Σ_1 et Σ_2 et en les recollant bord à bord. Avec ces définitions, on a par exemple $\Sigma_1 < \Sigma$, $\Sigma_2 < \Sigma$ et $\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 < \Sigma$.

Théorème II.2.5 ([Pet23a]). *Soit Σ une surface connexe compacte sans bord. Si*

$$\forall \widetilde{\Sigma} < \Sigma, I(\Sigma, F) < I(\widetilde{\Sigma}, F). \tag{II.20}$$

Alors $I(\Sigma, F)$ est atteint.

On déduit de [CES03] et des hypothèses de monotonie sur F que

$$\forall \widetilde{\Sigma} < \Sigma, I(\Sigma, F) \leqslant I(\widetilde{\Sigma}, F). \tag{II.21}$$

La grande difficulté est de montrer des inégalités strictes comme on le verra.

En se focalisant sur les surfaces compactes connexes sans bord, leur classification à homéomorphisme/difféomorphisme près implique

$$\Sigma = \begin{cases} (\mathbb{T}^2)^{\sharp\gamma} & \text{si } \Sigma \text{ est orientable} \\ (\mathbb{RP}^2)^{\sharp\gamma} & \text{si } \Sigma \text{ est non orientable} \end{cases}$$

où $\mathbb{T}^2$ désigne un tore, $\mathbb{RP}^2$ un plan projectif et si γ est un entier positif, la puissance $\sharp\gamma$ est le nombre de fois qu'on fait la somme connexe de la variété avec une copie d'elle même. Ici, γ désigne le genre de la surface. Bien sûr, si $\gamma = 0$, Σ est une sphère par convention.

La terminologie de la "topologie strictement inférieure" était introduite pour prendre en compte les possibles déconnexions de surfaces, mais on peut énoncer un résultat qui les interdit en faisant une hypothèse supplémentaire sur $F : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$: on rappelle que $\hat{F} : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est la fonction définie par

$$\hat{F}(x_1, x_2, \cdots, x_m) = F(0, x_2, \cdots, x_m).$$

Théorème II.2.6 ([Pet23a]). *Soit Σ une surface connexe compacte sans bord qui vérifie les trois hypothèses suivantes :*

(i) S'il existe une surface Σ' telle que $\Sigma = \mathbb{T}^2 \sharp \Sigma'$, alors $I(\Sigma, F) < I(\Sigma', F)$.

(ii) S'il existe une surface Σ' telle que $\Sigma = \mathbb{RP}^2 \sharp \Sigma'$, alors $I(\Sigma, F) < I(\Sigma', F)$.

(iii) $I(\Sigma, F) < I(\Sigma, \hat{F})$

Alors $I(\Sigma, F)$ est atteint.

De nouveau, (iii) empêche les suites minimisantes du problème de dégénérer en des surfaces non connexes car la suite des premières valeurs propres associées ne tend pas vers 0. (i) et (ii) sont une traduction du Théorème II.2.6 et de (II.21) car il suffit d'obtenir (II.20) dans les cas où $\widetilde{\Sigma}$ est connexe. (ii) est vide si Σ est orientable et (i) est vide si Σ est une sphère.

Voici un exemple d'application du Théorème II.2.6. Sur le tore $\mathbb{T}^2$, Berger avait montré que le tore équilatéral plat n'était pas un minimum parmi les tores plats pour $I(\mathbb{T}^2, f_6)$ alors qu'il est le maximum de $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, \cdot)$ (de multiplicité 6 pour le tore équilatéral plat) parmi tous les tores plats [Ber73] [6]. Pourtant, par Hersch [Her70], la sphère ronde est l'unique minimiseur de $I(\mathbb{S}^2, f_3)$ et donc l'unique maximiseur de $\bar{\lambda}_1(\mathbb{S}^2, \cdot)$ (de multiplicité 3 pour la sphère ronde). Dans le Théorème II.2.6, pour obtenir le minimiseur de Berger, la seule hypothèse non triviale à vérifier est la première, c'est à dire

$$I(\mathbb{T}^2, f_6) < I(\mathbb{S}^2, f_6).$$

Celle-ci est vraie par le Théorème II.3.2 ci-dessous, mais on n'en a pas besoin ici :

$$\begin{aligned} I(\mathbb{S}^2, f_6) \geqslant I(\mathbb{S}^2, f_3) + \sum_{k=4}^{6} \Lambda_k(\mathbb{S}^2)^{-1} &= \frac{3}{8\pi} + \frac{1}{32\pi} + \frac{1}{40\pi} + \frac{1}{48\pi} \\ &> \frac{3\sqrt{3}}{4\pi^2} = \frac{6}{\Lambda_1(\mathbb{T}^2)} > I(\mathbb{T}^2, f_6), \end{aligned}$$

où on a utilisé le résultat principal de [Her70], et $\Lambda_k(\mathbb{S}^2) = 8\pi k$ (II.7). Le minimiseur obtenu correspond à une immersion minimale dans un ellipsoïde.

Donnons rapidement l'analogue pour les fonctionnelles spectrales de Steklov. Soit Σ et $\widetilde{\Sigma}$ deux surfaces compactes à bord (non nécessairement connexes). On dit que $\widetilde{\Sigma}$ est de topologie strictement inférieure à Σ et on note

$$\widetilde{\Sigma} < \Sigma$$

si $\widetilde{\Sigma}$ peut être construite à partir de Σ en la découpant le long d'un nombre fini non nul de courbes simples disjointes dont l'extrémité est exactement l'intersection de la courbe avec le bord $\partial\Sigma$.

Théorème II.2.7 ([Pet24b]). *Soit Σ une surface connexe compacte avec un bord. Si*

$$\forall \widetilde{\Sigma} < \Sigma, I^S(\Sigma, F) < I^S(\widetilde{\Sigma}, F)$$

Alors $I^S(\Sigma, F)$ est atteint.

On spécifie également le résultat dans le cas connexe :

Théorème II.2.8 ([Pet24b]). *Soit Σ une surface connexe compacte sans bord qui vérifie*

$$I^S(\Sigma, F) < I^S(\Sigma, \hat{F})$$

et pour toutes surfaces Σ' telles que Σ s'obtient de Σ' en collant chaque côté opposé d'un rectangle au voisinage de deux points distincts du bord de Σ' on a

$$I^S(\Sigma, F) < I^S(\Sigma', F).$$

Alors $I^S(\Sigma, F)$ est atteint.

6. On sait maintenant que le tore équilatéral plat est maximiseur de $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, \cdot)$ parmi toutes les métriques [Nad96]

C'est un cas particulier particulier de Théorème II.2.7, pour les surfaces $\widetilde{\Sigma} < \Sigma$ obtenues à partir de Σ par découpage le long d'une seule courbe simple qui intersecte le bord de Σ en ses extrémités et qui sont connexes. Cette hypothèse est vide si Σ est un disque. A partir d'une surface compacte orientable Σ', Σ peut avoir 4 formes topologiques possibles, selon si le collage du rectangle se fait au voisinage de points du bord dans la même composante connexe ou non, et selon si le collage renverse l'orientation ou non.

II.3 Optimisation parmi toutes les métriques

II.3.1 Avec le principe variationnel d'Ekeland

On énonce le résultat principal de cette sous-section. Pour une fonction $F : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on note $\hat{F} : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la fonction définie par

$$\hat{F}(x_1, x_2, \cdots, x_m) = F(0, x_2, \cdots, x_m).$$

Théorème II.3.1 ([Pet24a]). *Soit Σ une surface connexe compacte sans bord. On a les deux résultats (a) et (b) suivants*

(a) S'il existe une surface Σ' telle que $\Sigma = \mathbb{T}^2 \sharp \Sigma'$ et telle que $I(\Sigma', F)$ est atteint, alors

$$I(\Sigma, F) < I(\Sigma', F). \tag{II.22}$$

(b) Si Σ est orientable et si

$$I(\Sigma, F) < I(\Sigma, \hat{F}), \tag{II.23}$$

alors $I(\Sigma, F)$ est atteint.

Dans le résultat (b), on interprète encore l'hypothèse (II.23) comme une demande de stabilité sur l'indice de la première valeur propre. Elle empêche les suites minimisantes du problème de dégénérer en des surfaces non connexes en interdisant à la suite des premières valeurs propres associées de tendre vers 0. Bien sûr, le contenu principal du Théorème II.3.1 est une démonstration du résultat (a). Le reste n'est qu'une conséquence du Théorème II.2.6 et de la monotonie de $\Sigma \mapsto I(\Sigma, \hat{F})$ par rapport au genre de Σ avec une preuve par récurrence (l'initialisation de la récurrence est le Théorème II.2.2 sur la sphère). En appliquant le Théorème II.3.1 à une fonction F telle que $\hat{F}$ est une fonction constante égale à $+\infty$, alors (II.23) est automatique. C'est par exemple vrai pour la maximisation de la première valeur propre en posant $F(x_1) = (x_1)^{-1}$.

Théorème II.3.2 ([Pet24a]). *Si F vérifie que $\hat{F}$ est constante égale à $+\infty$, alors $I(\Sigma, F)$ est atteint pour toute surface Σ connexe compacte sans bord orientable. De plus,*

$$\Sigma \mapsto I(\Sigma, F)$$

est strictement décroissante par rapport au genre de Σ.

Pour le cas de la maximisation de la première valeur propre parmi toutes les métriques, on répond déjà à une question ouverte pour les surfaces orientables de genre $\gamma \geqslant 3$. Ce résultat était connu sur la sphère [Her70] le tore [Nad96] et les surfaces de genre 2 [NS19]. De manière plus générale, on montre que $I(\Sigma, f_{m,a,s})$ est atteint sur toute surface orientable Σ telles que où $a_1 = 1$ et $a_k \geqslant 0$ sont des réels quelconques et $s > 0$. En supposant $m = 2$, on retrouve l'étude spécifique du Chapitre III. Si on suppose $a_k = 1$ pour tous $1 \leqslant k \leqslant m$, c'est une somme partielle de la fonction ζ sur les valeurs propres. Elle intervient pour $s = 1$ dans les inégalités de Hersch ($m = 3$), Berger ($m = 6$), Yang-Yau ($m = 3$).

On donne maintenant les idées de démonstration pour (II.22) sous l'hypothèse que $\Sigma = \mathbb{T}^2 \sharp \Sigma'$ et $I(\Sigma', F)$ est atteint. Pour simplifier la présentation, on se restreint au cas de la maximisation de la première valeur propre. On suppose que $\Lambda_1(\Sigma')$ est atteint en g. Le but est de démontrer

$$\Lambda_1(\Sigma) > \Lambda_1(\Sigma'). \tag{II.24}$$

Etape 1 : Sélection d'une suite initiale par attachement d'anse

On construit une suite adaptée $(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ sur une suite de surfaces $\widetilde{\Sigma}_\varepsilon$ difféomorphes à $\Sigma' \sharp \mathbb{T}^2$ obtenues à partir de (Σ', g, dA_g) par l'attachement d'une anse dont l'aire est d'ordre ε^2. Les techniques d'attachement d'anse en géométrie spectrale qui remontent à Anné [Ann87], permettent d'obtenir

$$\bar{\lambda}_k(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon) \to \bar{\lambda}_k(\Sigma', g, dA_g)$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. Une idée naturelle, pour démontrer l'inégalité stricte (II.24) était de trouver la meilleure géométrie de l'anse pour laquelle on obtient un développement asymptotique

$$\bar{\lambda}_1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon) = \bar{\lambda}_1(\Sigma', g, dA_g) + \theta(\varepsilon) = \Lambda_1(\Sigma') + \theta(\varepsilon)$$

où $\theta(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et $\theta(\varepsilon) > 0$ pour ε suffisamment petit. On s'attend à ce que la première valeur propre λ_1 diminue lors de l'attachement de l'anse, mais on espère que la renormalisation par l'aire $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1.A$ compense largement cette diminution. Après de longues investigations dans [FS16, MS19, MP20] on a toujours $\theta(\varepsilon) \leqslant 0$ malgré le niveau de calcul fin auquel on aboutit dans [MP20].

Dans des problèmes d'optimisation équivariantes de la première valeur propre de Steklov [KKMS24], une nouvelle approche utilise le fait que g est choisie sur Σ' comme une métrique maximale. Inspiré par leur approche, j'ai démontré (II.24) en prenant en compte cette information avec une toute autre méthode. On attache d'abord une anse de sorte que même si $\theta(\varepsilon) \leqslant 0$, $\delta_\varepsilon = -\theta(\varepsilon) \to 0$ suffisamment rapidement.

Soit $p, q \in \Sigma'$ deux points distincts. On pose

$$\Sigma_\varepsilon = \Sigma' \setminus (D_\varepsilon(p) \sqcup D_\varepsilon(q))$$

et

$$C_{\ell,\varepsilon} = \varepsilon \mathbb{S}^1 \times \left[\frac{-\ell\varepsilon}{2}, \frac{\ell\varepsilon}{2}\right]$$

et on pose

$$\widetilde{\Sigma}_\varepsilon = (\Sigma_\varepsilon \sqcup C_{\ell,\varepsilon}) / \sim$$

où $\sim$ dénote un recollement bord à bord de Σ_ε et de $C_{\ell,\varepsilon}$ (que ce recollement respecte l'orientation ou non ne change rien à l'analyse qui suit). On munit $\widetilde{\Sigma}_\varepsilon$ de la métrique $\hat{g}_\varepsilon$ qui vaut g sur Σ' et la métrique plate sur $C_{\ell,\varepsilon}$. Il faut noter que cette métrique n'est pas continue sur $\widetilde{\Sigma}_\varepsilon$ a priori et qu'elle peut avoir un nombre fini de singularités coniques. Néanmoins, comme les fonctionnelles spectrales $E_F(\Sigma, g, \mu)$ sont invariantes conformes par rapport à la variable métrique, on peut ne faire porter cette discontinuité que sur la mesure. On peut trouver une fonction L^∞ notée V_ε et une métrique lisse (y compris en les points de singularité conique de $\hat{g}_\varepsilon$) telles que

$$\hat{g}_\varepsilon = V_\varepsilon \tilde{g}_\varepsilon$$

et on pose la mesure

$$\tilde{\beta}_\varepsilon = dA_{\hat{g}_\varepsilon}.$$

On obtient alors

Proposition II.3.3. *Il existe une constante $C_{\lambda,\ell,p,q} > 0$ telle que si $\lambda_k(\tilde{\Sigma}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon) \leqslant \lambda$,*

$$\lambda_k(\tilde{\Sigma}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon) \geqslant \lambda_k(\Sigma, g, dA_g) - C_{\lambda,\ell,p,q}\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon} \tag{II.25}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.

Comme on l'a dit, l'échelle $\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}$ n'est pas compensée par l'ajout de l'aire de $C_{\ell,\varepsilon}$ de l'ordre de $\pi\ell\varepsilon^2$. Dans la suite on note

$$\delta_\varepsilon = \sqrt{C_{\lambda,\ell,p,q}}\,\varepsilon\sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \tag{II.26}$$

la racine carrée du défaut de convergence de notre suite initiale.

Etape 2 : Perturbation de la suite avec le principe variationnel d'Ekeland

g est une métrique maximale pour $\Lambda_1(\Sigma')$. Pour exploiter cette propriété, on suppose par contradiction que $\Lambda_1(\Sigma)$ n'est pas atteint, ce qui implique par (II.21) $\Lambda_1(\Sigma) = \Lambda_1(\Sigma')$. Désormais, la suite $(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon)$ précédemment construite est maximisante pour $\Lambda_1(\Sigma)$ avec défaut δ_ε. On appliquera alors le principe variationnel d'Ekeland (Théorème I.4.1) à cette suite en définissant un espace variationnel complet adapté. Par invariance par difféomorphisme des fonctionnelles spectrales, on ramène tout le problème sur Σ. On note donc $\Sigma = \widetilde{\Sigma}_\varepsilon$.

On note $Met_0(\Sigma)$ l'ensemble des métriques riemanniennes continues sur Σ. On munit cet ensemble de la distance entre deux métriques $g_1, g_2 \in Met_0(\Sigma)$

$$\delta(g_1, g_2) := \max_{x\in\Sigma}\left(\ln\left(\max_{v\in T_x\Sigma\setminus\{0\}} \frac{g_1(x)(v,v)}{g_2(x)(v,v)}\right)^2 + \ln\left(\max_{v\in T_x\Sigma\setminus\{0\}} \frac{g_2(x)(v,v)}{g_1(x)(v,v)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

où on note pour $g \in Met_0(\Sigma)$ et un 2-tenseur symétrique $h \in S^2_0(\Sigma) = T_g\left(Met_0(\Sigma)\right)$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\delta(g, g+th)}{t} &= \max_{x\in\Sigma}\left(\left(\max_{v\in T_x\Sigma\setminus\{0\}} \frac{h(x)(v,v)}{g(x)(v,v)}\right)^2 + \left(\min_{v\in T_x\Sigma\setminus\{0\}} \frac{h(x)(v,v)}{g(x)(v,v)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &=: \max_{x\in\Sigma}\sqrt{\langle h, h\rangle_g(x)}\end{aligned} \tag{II.27}$$

où on définit pour un repère orthonormé local (e_1, e_2) par rapport à g au voisinage de x et pour $h_1, h_2 \in S^2_0(\Sigma) = T_g\left(Met_0(\Sigma)\right)$,

$$\langle h_1, h_2\rangle_g(x) = \sum_{i,j} h_1(x)(e_i(x), e_j(x)) \cdot h_2(x)(e_i(x), e_j(x))$$

un produit scalaire qui est indépendant du choix du repère orthonormé. Autrement dit, δ est la distance géodésique sur $Met_0(\Sigma)$ pour la métrique riemannienne qui vaut $\|h\|_g$ sur l'espace tangent $S_0^2(\Sigma)$ de $g \in Met_0(\Sigma)$. Il faut noter que $(Met_0(\Sigma), \delta)$ est localement complet dans le but d'appliquer le théorème d'Ekeland.

Maintenant, comme on l'a vu dans le Chapitre I on munit l'espace $\overline{X}$ où

$$X = \left\{ (\varphi, \psi) \mapsto \int_\Sigma e^{2u} \varphi\psi; u \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \right\}$$

et son adhérence est prise dans l'espace des formes bilinéaires continues sur H^1 munies de la norme

$$\|\beta\|_\varepsilon = \sup_{\varphi,\psi \in H^1} \frac{\beta(\varphi,\psi)}{\|\varphi\|_{\tilde{g}_\varepsilon,\tilde{\beta}_\varepsilon} \|\psi\|_{\tilde{g}_\varepsilon,\tilde{\beta}_\varepsilon}}$$

où

$$\|\varphi\|^2_{\tilde{g}_\varepsilon,\tilde{\beta}_\varepsilon} = \int_\Sigma \varphi^2 d\tilde{\beta}_\varepsilon + \int_\Sigma |\nabla\varphi|^2_{\tilde{g}_\varepsilon} dA_{\tilde{g}_\varepsilon}.$$

On cherche à minimiser $-\bar{\lambda}_1$ qui est semi-continue inférieurement sur l'espace complet

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{g \in Met_0(\Sigma); \delta(g, \tilde{g}_\varepsilon) \leqslant 1\} \times \{\beta \in \overline{X}, \beta(1,1) \geqslant 1\}$$

muni de la distance

$$d_\varepsilon((g_1,\beta_1),(g_2,\beta_2)) = \max\left(\delta(g_1,g_2); \|\beta_1 - \beta_2\|_\varepsilon\right).$$

Par le principe variationnel d'Ekeland (Théorème I.4.1), il existe $(g_\varepsilon, \beta_\varepsilon) \in \mathcal{A}_\varepsilon$ tel que

$$d_\varepsilon((\tilde{g}_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon),(g_\varepsilon,\beta_\varepsilon)) \leqslant \delta_\varepsilon \tag{II.28}$$

et tel que pour tous $(g,\beta) \in \mathcal{A}_\varepsilon$,

$$\bar{\lambda}_1(\Sigma, g, \beta) - \bar{\lambda}_1(\Sigma, g_\varepsilon, \beta_\varepsilon) \leqslant \delta_\varepsilon d_\varepsilon\left((g_\varepsilon,\beta_\varepsilon),(g,\beta)\right). \tag{II.29}$$

Bien sûr, on a en particuler $|\beta_\varepsilon(1,1) - \tilde{\beta}_\varepsilon(1,1)| \leqslant \delta_\varepsilon \tilde{\beta}_\varepsilon(1,1)$. On déduit alors l'équation d'Euler-Lagrange associée :

Proposition II.3.4. *Il existe une application $\Phi_\varepsilon : \Sigma \to \mathbb{R}^{n_\varepsilon} \in H^1(\Sigma, \mathbb{R}^{n_\varepsilon})$ telle que*

$$\begin{cases} \Delta_{g_\varepsilon}\Phi_\varepsilon = \lambda_1(\Sigma, g_\varepsilon, \beta_\varepsilon)\beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon, .) \\ |\Phi_\varepsilon|^2 \geqslant_{a.e} 1 - \theta_\varepsilon^2 \textit{ dans } \Sigma \textit{ où } \|\theta_\varepsilon\|^2_{\tilde{g}_\varepsilon,\tilde{\beta}_\varepsilon} \leqslant \delta_\varepsilon \\ \beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon,\Phi_\varepsilon) = \beta_\varepsilon(1,1). \end{cases}$$

et

$$\forall h \in S_0^2(\Sigma), \left| \int_\Sigma \left(d\Phi_\varepsilon \otimes d\Phi_\varepsilon - \frac{|\nabla\Phi_\varepsilon|^2_{g_\varepsilon}}{2} g_\varepsilon, h \right)_{g_\varepsilon} dA_{g_\varepsilon} \right| \leqslant \delta_\varepsilon \|h\|_{g_\varepsilon}$$

où $\|h\|_{g_\varepsilon} = \sup_{x\in\Sigma} \sqrt{\langle h,h\rangle_{g_\varepsilon}(x)}$.

L'objectif est désormais de passer à la limite quand $\varepsilon \to 0$ sur ce système d'équations (voir le passage à la limite final dans l'Etape 5 : (II.39)). De la première partie de cette proposition, on déduit en posant $\omega_\varepsilon = \sqrt{|\Phi_\varepsilon|^2 + \theta_\varepsilon^2}$

$$\int_{\tilde{\Sigma}_\varepsilon} (\omega_\varepsilon^2 - 1)\left|\nabla\frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right|^2_{g_\varepsilon} dA_{g_\varepsilon} + \int_{\tilde{\Sigma}_\varepsilon} |\nabla\omega_\varepsilon|^2_{g_\varepsilon} dA_{g_\varepsilon} + \int_{\tilde{\Sigma}_\varepsilon} \left|\nabla\left(\Phi_\varepsilon - \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right)\right|^2_{g_\varepsilon} dA_{g_\varepsilon} \leqslant O(\delta_\varepsilon) \tag{II.30}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, de sorte que si on a besoin de rendre Φ_ε borné dans L^∞ dans nos estimées, c'est son remplacement global $\frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}$ qui jouera ce rôle.

Etape 3 : Petite énergie sur l'anse d'attachement

De la construction précédente, on déduit d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|\lambda_k(\Sigma, g_\varepsilon, \beta_\varepsilon) - \lambda_k(\Sigma', g)| \leqslant O(\delta_\varepsilon) \tag{II.31}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. En particulier, quitte à réarranger les coordonnées de Φ_ε de sorte qu'elles soient indépendentes, on peut supposer que n_ε est borné. Quitte à prendre une sous-suite, $n_\varepsilon = n$ est une constante.

On définit l'énergie de l'application sur le cylindre.

$$Q_\varepsilon = \int_{C_{l,\varepsilon}} \left|\nabla \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right|^2_{g_\varepsilon} dA_{g_\varepsilon}. \tag{II.32}$$

Proposition II.3.5.

$$Q_\varepsilon = O\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}\right) \text{ \textit{lorsque} } \varepsilon \to 0. \tag{II.33}$$

Idée de démonstration. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on teste la fonction $\eta_\varepsilon \frac{\phi_i^\varepsilon}{\omega_\varepsilon}$ pour $\lambda_1(\Sigma', g)$ où $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\Sigma_\varepsilon)$ tel que $0 \leqslant \eta_\varepsilon \leqslant 1$, $\eta_\varepsilon = 1$ sur $\Sigma_{\sqrt{\varepsilon}}$ et

$$\int_\Sigma |\nabla \eta_\varepsilon|_g^2 dA_g \leqslant O\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}\right) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

On obtient

$$\left(\int_{\Sigma'} \left(\eta_\varepsilon \frac{\phi_i^\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right)^2 dA_g - \left(\int_{\Sigma'} \eta_\varepsilon \frac{\phi_i^\varepsilon}{\omega_\varepsilon} dA_g\right)^2\right) \lambda_1(\Sigma', g) \leqslant \int_{\Sigma'} |\nabla \eta_\varepsilon \frac{\phi_i^\varepsilon}{\omega_\varepsilon}|_g^2 dA_g. \tag{II.34}$$

En jouant avec (II.28), (II.29) (II.30), le fait que $\frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}$ est uniformément borné dans L^∞ et par rapport à la norme $\|\cdot\|^2_{g_\varepsilon,\beta_\varepsilon}$, on obtient

$$\int_{\Sigma'} |\nabla \frac{\phi_i^\varepsilon}{\omega_\varepsilon}|_g^2 dA_g \leqslant \int_{\widetilde{\Sigma}_\varepsilon} |\nabla \phi_i^\varepsilon|^2_{g_\varepsilon} dA_{g_\varepsilon} - \int_{C_{\ell,\varepsilon}} |\nabla \phi_i^\varepsilon|^2_{g_\varepsilon} dA_{g_\varepsilon} + O(\delta_\varepsilon)$$

$$\int_{\Sigma'} \left(\eta_\varepsilon \frac{\phi_i^\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right)^2 dA_g = \beta_\varepsilon(\phi_i^\varepsilon, \phi_i^\varepsilon) + O(\delta_\varepsilon)$$

$$\int_{\Sigma'} \eta_\varepsilon \frac{\phi_i^\varepsilon}{\omega_\varepsilon} dA_g = \beta_\varepsilon(\phi_i^\varepsilon, 1) + O(\delta_\varepsilon).$$

On calcule le terme de droite dans (II.34) et on fait une somme sur i :

$$\int_{\Sigma'} |\nabla \eta_\varepsilon \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}|_g^2 dA_g = \int_{\Sigma'} \eta_\varepsilon^2 |\nabla \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}|_g^2 dA_g + \int_\Sigma \langle \nabla \eta_\varepsilon, \nabla \left|\frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right|^2 \rangle_g dA_g + \int_\Sigma |\nabla \eta_\varepsilon|^2 \left|\frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right|^2 dA_g$$

Comme on a par (II.30) avec $|\Phi_\varepsilon|^2 + \theta_\varepsilon^2 = \omega_\varepsilon^2$

$$\int_\Sigma \langle \nabla \eta_\varepsilon, \nabla \left|\frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right|^2 \rangle_g dA_g = -\int_\Sigma \langle \nabla \eta_\varepsilon, \nabla \left|\frac{\theta_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right|^2 \rangle_g dA_g = O\left(\left(\frac{\delta_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

On obtient avec (II.26),

$$\int_{\Sigma'} |\nabla \eta_\varepsilon \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}|_g^2 dA_g \leqslant \int_{\widetilde{\Sigma}_\varepsilon} |\nabla \Phi_\varepsilon|_{g_\varepsilon}^2 dA_{g_\varepsilon} - Q_\varepsilon + O\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}\right).$$

En sommant sur i en partant de (II.34) et avec l'équation $\Delta_{g_\varepsilon} \phi_i^\varepsilon = \lambda_1(\Sigma, g_\varepsilon, \beta_\varepsilon)\beta_\varepsilon(\phi_i^\varepsilon, \cdot)$, on obtient :

$$(\beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) + O(\delta_\varepsilon))\, \lambda_1(\Sigma', g) \leqslant \lambda_1(\Sigma, g_\varepsilon, \beta_\varepsilon)\beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) - Q_\varepsilon + O\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}\right).$$

En utilisant (II.26) et (II.31), on obtient la proposition. □

Etape 4 : Projection sur Σ des coordonnées de Φ_ε

On note Ψ_ε l'extension harmonique sur Σ' de la fonction $\frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}$ définie sur Σ_ε. On pose

$$B(F,F) = \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Sigma'} |\nabla F_i|_g^2 dA_g - \lambda_1(\Sigma', g) \left(\int_{\Sigma'} F_i^2 dA_g - \left(\int_{\Sigma'} F_i dA_g \right)^2 \right) \right) \tag{II.35}$$

Proposition II.3.6. *On a*

$$B(\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon) \leqslant Ce^{-\ell} Q_\varepsilon + O(\delta_\varepsilon) \ \textit{lorsque}\ \varepsilon \to 0.$$

Idée de démonstration. En jouant avec (II.28), (II.29) (II.30), le fait que Ψ_ε est uniformément borné dans L^∞ et par rapport à la norme $\|\cdot\|_{g_\varepsilon,\beta_\varepsilon}^2$, on obtient :

$$\int_{\Sigma'} |\nabla \psi_i^\varepsilon|_g^2 dA_g = \int_{\widetilde{\Sigma}_\varepsilon} |\nabla \phi_i^\varepsilon|_{g_\varepsilon}^2 dA_{g_\varepsilon} + \int_{D_\varepsilon(p,q)} |\nabla \psi_i^\varepsilon|_{g_\varepsilon}^2 dA_{g_\varepsilon} - \int_{C_{\ell,\varepsilon}} |\nabla \frac{\phi_i^\varepsilon}{\omega_\varepsilon}|_{g_\varepsilon}^2 dA_{g_\varepsilon} + O(\delta_\varepsilon)$$

$$\int_{\Sigma'} (\psi_i^\varepsilon)^2 dA_g = \beta_\varepsilon(\phi_i^\varepsilon, \phi_i^\varepsilon) + O(\delta_\varepsilon)$$

$$\int_{\Sigma'} \psi_i^\varepsilon dA_g = \beta_\varepsilon(\phi_i^\varepsilon, 1) + O(\delta_\varepsilon).$$

D'après le lemme II.3.7,

$$\int_{D_\varepsilon(p,q)} |\nabla \Psi_\varepsilon|_{g_\varepsilon}^2 dA_{g_\varepsilon} - \int_{C_{\ell,\varepsilon}} |\nabla \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}|_{g_\varepsilon}^2 dA_{g_\varepsilon} \leqslant Ce^{-\ell} \int_{C_{\ell,\varepsilon}} |\nabla \frac{\Phi_\varepsilon}{\omega_\varepsilon}|_{g_\varepsilon}^2 dA_{g_\varepsilon} = Ce^{-\ell} Q_\varepsilon$$

En utilisant l'équation $\Delta_{g_\varepsilon} \phi_i^\varepsilon = \lambda_1(\Sigma, g_\varepsilon, \beta_\varepsilon)\beta_\varepsilon(\phi_i^\varepsilon, \cdot)$ puis en sommant sur i,

$$B(\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon) = (\lambda_1(\Sigma, g_\varepsilon, \beta_\varepsilon) - \lambda_1(\Sigma, g))\, \beta_\varepsilon(\Phi_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) + Ce^{-\ell} Q_\varepsilon + O(\delta_\varepsilon)$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. On utilise (II.31) pour conclure.

□

Le lemme suivant était nécessaire :

Lemme II.3.7 ([KKMS24])**.** *There is a constant $C > 0$ such that for any $l > 3 \ln 2$ and ψ a H^1 function defined on the cylinder $C_l^+ := \mathbb{S}^1 \times [0, \frac{l}{2}]$, the harmonic extension of ψ on $\mathbb{S}^1 \times \{0\} \to \mathbb{R}$ to the disk $\hat{\psi} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ satisfies*

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla \hat{\psi}|^2 \leqslant \left(1 + Ce^{-l}\right) \int_{\left[0, \frac{l}{2}\right] \times \mathbb{S}^1} |\nabla \psi|^2.$$

On décompose alors

$$\Psi_\varepsilon = F_\varepsilon + \int_{\Sigma'} \Psi_\varepsilon dA_g + R_\varepsilon.$$

où $F_i^\varepsilon = \pi(\psi_i^\varepsilon)$ est la projection orthogonale dans $L^2(g)$ sur l'espace propre associé à $\lambda_1(\Sigma', g)$. On a alors

Proposition II.3.8.

$$\|R_\varepsilon\|_{W^{1,2}}^2 \leqslant Ce^{-\ell} Q_\varepsilon + O(\delta_\varepsilon) \tag{II.36}$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon(p)} R_\varepsilon dL_\xi\right|^2 + \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon(q)} R_\varepsilon dL_\xi\right|^2 \leqslant Ce^{-\ell} + O(\delta_\varepsilon \ln\frac{1}{\varepsilon}) \tag{II.37}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.

Démonstration. Montrons (II.36). Une inégalité de Cauchy-Schwarz donne,

$$B(R_\varepsilon, R_\varepsilon) = B(\Psi_\varepsilon, R_\varepsilon) \leqslant \sqrt{B(\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon)}\sqrt{B(R_\varepsilon, R_\varepsilon)}$$

et la Proposition II.3.6 donne

$$B(R_\varepsilon, R_\varepsilon) \leqslant B(\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon) \leqslant C\frac{Q_\varepsilon}{\ell} + O(\delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. Comme $R_i^\varepsilon \in \bigoplus_{\lambda > \lambda_1(\Sigma', g)} E_\lambda$, on obtient

$$B(R_\varepsilon, R_\varepsilon) \geqslant \left(1 - \frac{\lambda_1(\Sigma', g)}{\lambda_{k+1}(\Sigma', g)}\right)\int_{\Sigma'} |\nabla R_\varepsilon|_g^2 dA_g. \tag{II.38}$$

où k est la multiplicité de $\lambda_1(\Sigma', g)$. On obtient (II.36).

Montrons l'inégalité (II.37). Dans une carte conforme au voisinage de p et q, on a

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon(p)} R_\varepsilon dL_\xi = \int_{S_1(p)} R_\varepsilon dL_\xi - \int_{D_1(p)\setminus D_\varepsilon(p)} \langle \nabla \ln|x| \nabla R_\varepsilon\rangle_\xi dA_\xi$$

de sorte que

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon(p)} R_\varepsilon dL_\xi\right|^2 + \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon(q)} R_\varepsilon dL_\xi\right|^2 \leqslant C\ln\frac{1}{\varepsilon}\|R_\varepsilon\|_{W^{1,2}}^2.$$

et (II.33) et (II.36) permettent de conclure. □

Etape 5 : Convergences finales et contradiction

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, $\Psi_\varepsilon - F_\varepsilon$ tend vers 0 fortement dans $H^1_{loc}(\Sigma' \setminus \{p, q\})$ (utiliser (II.36) et que la moyenne de Ψ_ε sur Σ' tend vers 0). Comme F_ε est une suite de premières fonctions propres bornées dans H^1, quitte à prendre une sous-suite, (F_ε) converge fortement dans C^1 vers Φ en faisant $\varepsilon \to 0$ puis $\ell \to +\infty$. La Proposition II.3.4, (II.31) et (II.37) impliquent sur Σ' :

$$\begin{cases} \Delta_g \Phi = \lambda_1(\Sigma', g)\Phi \\ |\Phi|^2 = 1 \\ d\Phi \otimes d\Phi = \frac{|\nabla\Phi|_g^2}{2} g \end{cases} \tag{II.39}$$

Mais (II.37) implique aussi en faisant $\varepsilon \to 0$ puis $\ell \to +\infty$

$$\Phi(p) = \Phi(q).$$

Il faut noter que l'application obtenue Φ dépend de p et q. Soit $X \in T_p(\Sigma') \setminus \{0\}$. Alors en faisant $q \to p$ dans la direction de X, on obtient une application Φ qui vérifie (II.39) et

$$D_p\Phi(X) = 0.$$

En utilisant que Φ est conforme (équation 3 de (II.39)), $|D_p\Phi(X^\perp)| = |D_p\Phi(X)| = 0$. Ainsi $\nabla\Phi(p) = 0$. Par les équations 1 et 2 de (II.39), si p n'est pas un point de singularité conique, $\lambda_1(\Sigma, g) = |\nabla\Phi(p)|_g^2 = 0$. C'est une contradiction.

II.3.2 Avec la théorie de Karpukhin-Stern

On énonce maintenant le résultat de cette sous-section en notant

$$\Lambda_1(\Sigma) = \sup_{g \in Met(\Sigma)} \bar{\lambda}_1(\Sigma, g).$$

Théorème II.3.9 ([KPS25])**.** *Soit Σ une surface connexe compacte sans bord. Alors $\Lambda_1(\Sigma)$ est atteint.*

Ce théorème généralise à toute topologie (y compris non-orientable) le résultat de la sous-section précédente pour la maximisation de la première valeur propre. Cette généralisation demeure spécifique à la première valeur propre. On répond donc à la question qui était ouverte en genre non orientable $\gamma \geqslant 2$. Le cas du plan projectif [LY82] et de la bouteille de Klein [JNP06, ESGJ06] étaient déjà connus.

Pour démontrer le Théorème II.3.9 on utilise le résultat suivant qui est une spécification du Théorème II.2.6 à la maximisation de la première valeur propre.

Théorème II.3.10 (cas orientable : [Pet14a], cas non orientable : [MS21])**.** *Soit Σ une surface connexe compacte sans bord qui vérifie les deux hypothèses suivantes :*

(i) S'il existe une surface Σ' telle que $\Sigma = \mathbb{T}^2 \sharp \Sigma'$, alors $\Lambda_1(\Sigma) > \Lambda_1(\Sigma')$.

(ii) S'il existe une surface Σ' telle que $\Sigma = \mathbb{RP}^2 \sharp \Sigma'$, alors $\Lambda_1(\Sigma) > \Lambda_1(\Sigma')$.

Alors $\Lambda_1(\Sigma)$ est atteint.

Le Théorème II.3.1 fournit (i). Il suffit donc de montrer (ii) pour obtenir le Théorème II.3.9 dans le cas où Σ est non orientable. La démonstration utilise astucieusement la construction de [KS23] dans le cas de l'ajout d'une cross-cap à Σ'. Une preuve alternative de (i) par recollement d'anse est aussi donnée avec une technique similaire.

Etape 1 : Choix de la suite de classes conformes initiale

Soit g un maximum de $\Lambda_1(\Sigma')$. On choisit un point $p \in \Sigma'$. Comme nos constructions respecteront une invariance conforme, on choisit $\tilde{g}$ une métrique conforme à g qui est lisse sur Σ' et qui est plate au voisinage de p. On pose

$$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \setminus D_\varepsilon(p)$$

et en notant $\Gamma_L := \mathbb{S}^1 \times [-L, L]/\sim$ la bande de Möbius plate de taille 2π et longueur L, où $(z,t) \sim (-z,-t)$, et on pose

$$\widetilde{\Sigma}_\varepsilon = (\Sigma_\varepsilon \sqcup \Gamma_L) \,/\, \sim$$

où $\sim$ est le recollement bord à bord naturel de Σ_ε et de Γ_L. On munit $\widetilde{\Sigma}_\varepsilon$ de la métrique $\tilde{g}_\varepsilon$ qui vaut $\tilde{g}$ sur Σ' et la métrique plate sur Γ_L.

Etape 2 : Création d'applications presque harmoniques équilibrées

Cette étape est la grosse boîte noire de ce mémoire. Elle repose sur la théorie Karpukhin-Stern [KS23]. Cela rend la technique très spécifique à la première valeur propre. On ne travaille plus tout à fait avec les applications harmoniques associées aux maximiseurs de $\Lambda_1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon, [g_\varepsilon])$ mais avec des applications harmoniques sur $(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon, [g_\varepsilon])$ qui ressemblent le plus possible aux maximiseurs de $\Lambda_1(\Sigma', [g])$ en passant par un opérateur de projection bien choisi $T : H^1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon) \to H^1(\Sigma')$. Plus précisément, [KS23] donne une marge de manoeuvre pour ajuster la mesure β pour laquelle l'application harmonique est bien équilibrée : son centre de gravité par rapport à β est en 0, dans l'esprit du résultat topologique de [Her70] :

Proposition II.3.11 ([KNPS21], Proposition 3.1 ou [KS23], Proposition 2.2)**.** *Soit (M, h) une variété Riemannienne de dimension 2. Alors, il existe un entier $n = n([g]) \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $\beta \in H^{-1}(M)$, il existe une application $\Phi \in H^1(M, \mathbb{S}^n)$ telle que*

$$\beta(\Phi) = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\textit{et } \int_M |\nabla\Phi|_h^2 \, dA_h \leqslant \Lambda_1(M, [h]).$$

On appliquera cette proposition à $(M, h) = (\widetilde{\Sigma}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon)$ où β est défini par un opérateur $T : H^1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon) \to H^1(\Sigma')$:

$$\beta(\varphi) = \int_{\Sigma'} T(\varphi) dA_g.$$

On obtient une application Φ_ε. Les coordonnées de $T(\Phi_\varepsilon)$ sont alors orthogonales aux fonctions constantes, par construction, ce qui permet l'estimée directe :

$$\left(\int_{\Sigma'} |T(\Phi_\varepsilon)|^2 dA_g\right) \lambda_1(\Sigma', g) \leqslant \int_{\Sigma'} |\nabla(T(\Phi_\varepsilon))|_g^2 dA_g. \tag{II.40}$$

Remarque : comparaison entre méthodes

On compare ce qu'on obtient ici et ce qu'on obtenait avec la méthode utilisant le principe variationnel d'Ekeland. Noter que Γ_L ou $C_{\ell,\varepsilon}$ jouent le même rôle. Par le Lemme II.3.7, l'opérateur le plus naturel à choisir est $\varphi \in H^1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon) \mapsto \hat{\varphi} \in H^1(\Sigma')$ définie par l'extension continue de φ de Σ_ε à Σ' comme une fonction harmonique sur $D_\varepsilon(p)$ (ou $D_\varepsilon(p, q)$). En notant $\Psi_\varepsilon = \hat{\Phi}_\varepsilon$, on a alors par la Proposition II.3.11 et (II.40) :

$$\left(1 + \int_{D_\varepsilon(p,q)} \left(|\Psi_\varepsilon|^2 - 1\right) dA_g\right) \lambda_1(\Sigma', g) \leqslant \Lambda_1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon, [\tilde{g}_\varepsilon]) + \int_{D_\varepsilon(p)} |\nabla\Psi_\varepsilon|_\xi^2 dA_\xi - \int_{C_{\ell,\varepsilon}} |\nabla\Phi_\varepsilon|_\xi^2 dA_\xi.$$

On utilise une inégalité de Poincaré sur le disque pour obtenir

$$\int_{D_\varepsilon(p,q)} \left(|\Psi_\varepsilon|^2 - 1\right) dA_g \leqslant C\varepsilon^2 \sqrt{\int_{D_\varepsilon(p)} |\nabla\Psi_\varepsilon|_\xi^2 dA_\xi}, \tag{II.41}$$

et en rappelant la définition de B donnée dans (II.35). on obtient grâce au lemme II.3.7,

$$B(\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon) \leqslant \Lambda_1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon, [\tilde{g}_\varepsilon]) - \lambda_1(\Sigma', g) + Ce^{-\ell} \int_{C_{\ell,\varepsilon}} |\nabla\Phi_\varepsilon|_\xi^2 dA_\xi + C\varepsilon^2 \sqrt{\int_{D_\varepsilon(p)} |\nabla\Psi_\varepsilon|_\xi^2 dA_\xi}.$$

En supposant que $\Lambda_1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon, [\tilde{g}_\varepsilon]) \leqslant \lambda_1(\Sigma', g)$, ce qui est le cas si $\Lambda_1(\Sigma')$ est atteint en g et si on suppose par l'absurde $\Lambda_1(\Sigma) = \Lambda_1(\Sigma')$, on obtient

$$B(\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon) \leqslant Ce^{-\ell}Q_\varepsilon + C\varepsilon^2\sqrt{Q_\varepsilon} \text{ où } Q_\varepsilon = \int_{C_{\ell,\varepsilon}} |\nabla\Phi_\varepsilon|_\xi^2 dA_\xi. \tag{II.42}$$

Cette inégalité correspond à la Proposition II.3.6 sans le "bruit" δ_ε précédemment dû à l'application du principe variationnel d'Ekeland. C'est le principal avantage de la théorie de Karpukhin-Stern : on peut espérer obtenir des estimées très fines car très naturelement, le terme de droite est seulement local : c'est l'énergie de Φ_ε sur Γ_L (ou sur $C_{\ell,\varepsilon}$).

Une contrepartie inconvéniente est que, quelque soit la vitesse de convergence de Q_ε vers 0, l'application limite Φ de Ψ_ε sera seulement harmonique sur Σ' (équations 1 et 2 dans (II.39)), pas conforme (l'équation 3 de (II.39) n'est donc pas vérifiée). Pour obtenir une contradiction, on demande que le passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ donne directement $\nabla\Phi(p) = 0$. Le choix naturel $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ de T ne le permet pas car on ne peut pas obtenir mieux que $Q_\varepsilon = O(\varepsilon^2)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, cette estimée n'est pas suffsante pour avoir le résultat attendu à l'ordre 1.

Etape 3 : Choix de l'opérateur de prolongement

La fonction $u \in W^{1,2}(\Gamma_L)$ sur la bande de Möbius Γ_L peut être identifiée à une fonction $u \in W^{1,2}(C_L)$ qui satisfait $u(z,0) = u(-z,0)$, de sorte que l'opérateur d'extension harmonique $H\colon W^{1,2}(\Gamma_L) \to W^{1,2}(\mathbb{D})$ satisfait les estimées du lemme II.3.7 (avec $L = \frac{\ell}{2}$). Comme précedemment dit, on a besoin ici d'un opérateur plus fin $K\colon W^{1,2}(\Gamma_L) \to W^{1,2}(\mathbb{D})$ adapté à la bande de Möbius Γ_L. On définit la décomposition orthogonale

$$W^{1,2}(\Gamma_L) = \mathcal{E} \oplus \mathcal{O},$$

de $W^{1,2}(\Gamma_L)$ dans l'espace des fonctions paires

$$\mathcal{E} := \{u \in W^{1,2}(\Gamma_L) \mid u(-z,t) = u(z,t)\}$$

et des fonctions impaires

$$\mathcal{O} := \{u \in W^{1,2}(\Gamma_L) \mid u(-z,t) = -u(z,t)\}$$

pour la rotation $(z,t) \mapsto (-z,t)$. Noter que pour tout $u \in \mathcal{O}$, l'identification $(z,0) \sim (-z,0)$ donne

$$u(z,0) = u(-z,0) = -u(z,0) = 0 \text{ pour tous } z \in \mathbb{S}^1. \tag{II.43}$$

En posant $\pi_E\colon W^{1,2}(\Gamma_L) \to \mathcal{E}$ et $\pi_O\colon W^{1,2}(\Gamma_L) \to \mathcal{O}$ la projection évidente, on définit un nouvel opérateur K comme suit :

Lemme II.3.12. *Pour $L \geqslant \frac{3}{2}\log(2)$, il existe un opéreateur $K\colon W^{1,2}(\Gamma_L) \to W^{1,2}(\mathbb{D})$ tel que*

$$K(u)(z) = u(z,L) \text{ pour } z \in \mathbb{S}^1,$$

$$\|K(u)\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leqslant 2\|u\|_{L^\infty(\Gamma_L)},$$

et en écrivant $u_E = \pi_E(u)$ et $u_O = \pi_O(u)$, on a

$$\|\nabla[K(u_E)]\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \leqslant (1 + Ce^{-2L})\|\nabla(u_E)\|^2_{L^2(\Gamma_L)}$$

et

$$\|\nabla[K(u_O)]\|^2_{L^2(\mathbb{D})} = \|\nabla(u_O)\|^2_{L^2(\Gamma_L)}.$$

De plus, $K(u_E)$ est pair et $K(u_O)$ est impair par rapport à l'antipodie $z \mapsto -z$ du disque, et $K(u_O) \equiv 0$ sur $D_{e^{-L}}(0)$.

Une conséquence clé du Lemme II.3.12, est l'égalité suivante :

$$\|\nabla(K(u))\|^2_{L^2(\mathbb{D})} - \|\nabla u\|^2_{L^2(\Gamma_L)} = \|\nabla(K(u)_E)\|^2_{L^2(\mathbb{D})} - \|\nabla u_E\|^2_{L^2(\Gamma_L)}, \tag{II.44}$$

où $K(u)_E$ est la partie paire de $K(u)$ par rapport à la rotation $z \mapsto -z$. Cela provient des estimées de $\|d(K(u_E))\|_{L^2}$ et $\|d(K(u_O))\|_{L^2}$, sachant que $K(u_E) = K(u)_E$ et $K(u_O) = K(u)_O$ sont orthogonaux dans $W^{1,2}(\mathbb{D})$.

Etape 4 : Estimées à l'ordre 1

Cette fois, on pose $T : H^1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon) \to H^1(\Sigma')$ l'opérateur de projection tel que $\varphi \in H^1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon)$ a pour image lorsque $x \in \widetilde{\Sigma}_\varepsilon$

$$\begin{cases} T(\varphi)(x) = \varphi(x) & \text{si } x \in \Sigma_\varepsilon \\ T(\varphi)(x) = K(\varphi_{|\Gamma_L})(x) & \text{si } x \in D_\varepsilon(p). \end{cases}$$

En appliquant (II.40) à cet opérateur et en notant comme dans le Lemme II.3.12 φ_E et φ_O les parties paires et impaires de φ sur Γ_L, et en utilisant (II.44), les calculs qui menaient à (II.42) donnent maintenant en notant $\Psi_\varepsilon = T(\Phi_\varepsilon)$

$$B(\Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon) \leqslant \|\nabla(\Psi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(D_\epsilon(p))} - \|\nabla(\Phi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(\Gamma_L)} + C'\epsilon^2\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_L)}, \tag{II.45}$$

On pose $R_\varepsilon = \Psi_\varepsilon - F_\varepsilon$ où F_i^ε est la projection orthogonale pour $L^2(g)$ sur l'espace propre correspondant à $\lambda_1(\Sigma', g)$ de ψ_i^ε. Une démonstration de la proposition suivante est donnée pour bien sentir l'auto-amélioration des estimées :

Proposition II.3.13. *On a lorsque $\varepsilon \to 0$:*

$$\|R_\varepsilon\|^2_{H^1} \leqslant C'\varepsilon^3. \tag{II.46}$$

Démonstration. Comme dans la démonstration précédente de (II.36), on obtient (II.38), ce qui implique

$$\|R_\varepsilon\|^2_{H^1} \leqslant C\left(\|\nabla(\Psi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(D_\epsilon(p))} - \|\nabla(\Phi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(\Gamma_L)} + \epsilon^2\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_L)}\right). \tag{II.47}$$

Première amélioration : On montre

$$\|R_\varepsilon\|^2_{H^1} \leqslant C'e^{-2L}\|\nabla\left(\Psi_\varepsilon\right)_E\|^2_{L^2(D_\varepsilon)} + C'\varepsilon^2\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_L)}. \tag{II.48}$$

Comme le terme de gauche est positif dans (II.47), on obtient

$$\|\nabla(\Phi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(\Gamma_L)} \leqslant \|\nabla(\Psi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(D_\varepsilon)} + C\varepsilon^2\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_L)},$$

ce qui avec l'application du Lemme II.3.12

$$\|\nabla(\Psi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(D_\epsilon(p))} \leqslant (1 + Ce^{-2L})\|\nabla(\Phi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(\Gamma_L)},$$

donne

$$\|\nabla(\Psi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(D_\epsilon(p))} - \|\nabla(\Phi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(\Gamma_L)} \leqslant Ce^{-2L}\left(\|\nabla(\Psi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(D_\varepsilon(p))} + \varepsilon^2\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_L)}\right) \tag{II.49}$$

et (II.47) devient (II.48).

Deuxième amélioration : On montre

$$\|R_\varepsilon\|^2_{H^1} \leqslant C(\varepsilon^2\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_L)} + \varepsilon^4). \tag{II.50}$$

Maintenant, on peut tirer parti du fait que les coordonnées de F_ε sont bornées dans H^1 dans un espace de dimension finie, ainsi, on a les estimées uniformes suivantes pour la parties impaire et paire de F_ε

$$(F_\varepsilon)_O(z) = \frac{1}{2}\left(F_\varepsilon(z) - F_\varepsilon(-z)\right) = dF_\varepsilon(0)\cdot z + O(|z|^3)$$

and

$$(F_\varepsilon)_E(z) = \frac{1}{2}\left(F_\varepsilon(z) + F_\varepsilon(-z)\right) = F_\varepsilon(0) + O(|z|^2),$$

sur le disque $D_\varepsilon(p) \cong D_\varepsilon(0)$, de sorte que

$$|\nabla(F_\varepsilon)_E(z)|_\xi \leqslant \|(F_\varepsilon)_E\|_{C^2}|z| \leqslant C|z|,$$

et donc

$$\|\nabla(F_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(D_\varepsilon(p))} \leqslant C\varepsilon^4.$$

En utilisant la définition $F_\varepsilon = \Psi_\varepsilon + R_\varepsilon$,

$$\|\nabla(\Psi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(D_\varepsilon(p))} \leqslant 2\|\nabla(\Phi_\varepsilon)_E\|^2_{L^2(D_\varepsilon(p))} + 2\|R_\varepsilon\|^2_{H^1} \leqslant 2\|R_\varepsilon\|^2_{H^1} + C\varepsilon^4, \tag{II.51}$$

puis avec (II.48), on peut écrire

$$\|R_\varepsilon\|^2_{H^1} \leqslant C''e^{-2L}(\|R_\varepsilon\|^2_{H^1} + \varepsilon^4) + C'\varepsilon^2\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_L)}.$$

En prenant L suffisamment grand tel que $C''e^{-2L} < \frac{1}{2}$, on obtient (II.50).

Troisième amélioration : On montre (II.46)

On applique (II.50) et on utilise les estimées uniformes sur F_ε, pour déduire

$$\|\nabla\Psi_\varepsilon\|^2_{L^2(D_\varepsilon(p))} \quad\leqslant\quad 2\|\nabla F_\varepsilon\|^2_{L^2(D_\varepsilon(p))} + 2C(\varepsilon^2\|\nabla\Phi_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_L)} + \varepsilon^4) \leqslant C'\varepsilon^2,$$

et comme on a par définition de Ψ_ε et (II.40),

$$\|\nabla\Psi_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma,g)} \geqslant \lambda_1(\Sigma,g)\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma,g)} \geqslant \lambda_1(\Sigma,g) - C\varepsilon^2,$$

ce qui impose en utilisant (II.44), (II.49) et (II.51),

$$\|\nabla\Phi_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma'\setminus D_\varepsilon(p))} \geqslant \bar{\lambda}_1(\Sigma',g) - C'\epsilon^2.$$

De plus, en utilisant l'hypothèse $\Lambda_1(\Sigma) = \Lambda_1(\Sigma')$,

$$\|\nabla\Phi_\varepsilon\|^2_{L^2(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon,\tilde{g}_\varepsilon)} \leqslant \Lambda_1(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon,[\tilde{g}_\varepsilon]) \leqslant \lambda_1(\Sigma',g)$$

on obtient

$$\|\nabla\Phi_\varepsilon\|^2_{L^2(\Gamma_L)} = \|\nabla\Phi_\varepsilon\|^2_{L^2(\widetilde{\Sigma}_\varepsilon,\tilde{g}_\varepsilon)} - \|\nabla\Phi_\varepsilon\|^2_{L^2(\Sigma'\setminus D_\varepsilon(p))} \leqslant C'\varepsilon^2.$$

On applique cette estimée au terme de droite de (II.50), et on obtient (II.46). □

La proposition impose en particulier sur les parties impaires de Ψ_ε, F_ε sur $D_\varepsilon(p)$ que

$$\|\nabla(\Psi_\varepsilon)_O - \nabla(F_\varepsilon)_O\|^2_{L^2(D_\varepsilon(p))} \leqslant C'\varepsilon^3. \tag{II.52}$$

Par construction de K (Lemme II.3.12), on a $(\Psi_\varepsilon)_O \equiv 0$ sur $D_{e^{-L}\varepsilon}(p)$. Ainsi, (II.52) donne

$$\|d(F_\varepsilon)_O\|^2_{L^2(D_{e^{-L}\varepsilon}(p))} \leqslant C'\varepsilon^3.$$

Des estimées uniformes sur F_ε (borné $\mathcal{C}^3$ par exemple) permettent d'écrire

$$|\nabla(F_\varepsilon)_O(z) - \nabla F_\varepsilon(p)| \leqslant C|z-p| \leqslant C\varepsilon$$

pour tous $z \in D_\varepsilon(p)$. On calcule maintenant la valeur moyenne sur $D_{e^{-L}\varepsilon}(p)$ par rapport à z du carré l'inégalité précédente, et

$$|\nabla F_\varepsilon(p)|^2 \leqslant C\varepsilon^2 + \frac{C'}{\varepsilon^2}\int_{D_{e^{-L}\varepsilon}(p)} |d(F_\varepsilon)_O|^2 \leqslant C''\varepsilon. \tag{II.53}$$

Etape 5 : Convergence finale et contradiction

On remarque que quitte à prendre une sous-suite, F_ε converge vers Φ lorsque $\varepsilon \to 0$. L'équation (II.50) permet d'écrire avec l'inégalité de Poincaré (II.41) $\int_{\Sigma'}(1-|F_\varepsilon|)^2 \leqslant C\varepsilon^2$. Ainsi $|F_\varepsilon|^2 \to 1$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Enfin, avec (II.53), on peut écrire

$$\begin{cases} \Delta_g \Phi = \lambda_1(\Sigma', g)\Phi \\ |\Phi|^2 = 1 \\ \nabla\Phi(p) = 0. \end{cases} \tag{II.54}$$

Ceci fournit une contradiction lorsque p n'est pas une singularité conique de g.

II.4 Perspectives

On dispose de deux approches qui permettent de démontrer des inégalités strictes sur des invariants spectraux du type $I(\Sigma, F)$ en fonction de perturbations topologiques sur Σ et de montrer qu'ils sont atteint pour toute topologie. Chacune a ses avantages et ses inconvénients.

L'une des méthodes (par application du principe variationnel d'Ekeland) permet de traiter les combinaisons de valeurs propres et peut s'envisager avec des changements d'opérateurs, voire des combinaisons de valeurs propres pour différents opérateurs. Il peut aussi être utilisé quand il n'existe pas a priori de maximiseurs dans la classe conforme, puisqu'on raisonne avec des presque-minimiseurs. C'est exactement ce qu'on fait dans [Pet25a] pour démontrer par contradiction le résultat de rigidité suivant : $\bar{\sigma}_1(\Sigma,[g]) > \bar{\sigma}_1(\mathbb{D}) = 2\pi$ lorsque Σ est un anneau ou une bande de Möbius. En effet, si on suppose par contradiction $\bar{\sigma}_1(\Sigma,[g]) = 2\pi$, on est dans le cas limite où on ne sait pas s'il existe un maximiseur. On a donc une piste prometteuse pour montrer ce résultat de rigidité pour toute surface compacte sans bord $(\Sigma,[g])$ non difféomorphe au disque. En effet, la construction devrait permettre, comme dans [Pet25a] de démontrer que ce résultat est vrai partout en-dehors d'un ensemble compact de l'espace de Teichmüller d'une surface compacte à bord.

L'autre méthode (par application de la théorie de Karpukhin-Stern) permet de faire des estimées plus fines car le principe variationnel d'Ekeland induit un "bruit" δ_ε qui semble répercuté dans toutes les estimées. Cependant, elle semble limitée au cas où une seule valeur propre de Steklov ou du Laplacien apparaît dans la fonctionnelle spectrale.

Il serait intéressant de tirer parti de ces différentes approches pour étendre au maximum leurs champs d'application. En étant plus attentif sur les estimées, il n'est pas exclus qu'on traite le cas non-orientable avec la première méthode, ou le cas des combinaisons de valeurs propres dans la deuxième méthode, voire qu'on fournisse un point de vue plus unificateur.

Pour insister sur la portée de toutes les techniques mises en jeu dans les Chapitres I et II, je donne dans les chapitres suivants des exemples divers où leur adaptation permet des résultats dans la théorie des surfaces minimales et en géométrie spectrale. Je souhaite également tirer parti de ces techniques pour obtenir des résultats sur d'autres opérateurs, des combinaisons positives infinies de valeurs propres ou des combinaisons non positives de valeurs propres.

Chapitre III

Applications à la construction de surfaces minimales

Ce chapitre synthétise les travaux [Pet23b, Pet25b, Pet25a]. On énonce un résultat d'existence de disques minimaux plongés à bord libre *non plans* dans des ellipsoïdes de révolution suffisamment allongés de $\mathbb{R}^3$. Cela répond à une question posée 30 ans auparavant de Dierkes, Hildebrandt, Küster, Wohlrab [DHKW92, page 335]. Pour le montrer, on optimise des fonctionnelles spectrales de Steklov sur le disque. Plus précisément, ces plongements sont par exemple construits par minimisation de combinaisons linéaires des inverses de la première et de la deuxième valeur propre de Steklov non nulle, parmi des métriques symétriques par rapport aux deux axes du plan sur le disque unité centré en 0. Avec ces contraintes de symétrie, on parle d'optimisation équivariante. L'équivariance va à la fois porter sur la métrique optimale et sur l'immersion minimale associée à cette métrique critique.

Après l'idée initialement introduite par Fraser et Schoen de construire des surfaces minimales à bord libre par optimisation spectrale, [Pet23b] présente donc le premier exemple où l'optimisation spectrale équivariante a permis de construire de nouvelles surfaces minimales. Dans la même idée, Karpukhin, Kusner, McGrath, Stern [KKMS24] ont par la suite construit des plongements de n'importe quelle surface à bord orientable dans la boule unité de $\mathbb{R}^3$ par optimisation équivariante de la première valeur propre de Steklov. Le cadre équivariant est une façon commode de résoudre une difficulté inhérente aux points critiques que nous obtenons : ils ne fournissent a priori que des immersions minimales branchées de codimension quelconque, pas des plongements dans $\mathbb{R}^3$. On sait que les coordonnées des immersions minimales en jeu sont des fonctions propres. Le célèbre théorème de Courant impose des bornes sur le nombre de domaines nodaux. Couplé aux symétries imposées par le cadre équivariant, le nombre de domaines nodaux des fonctions propres est alors d'autant plus contraint. Ainsi, si le cadre équivariant est bien posé, on montre que la multiplicité des valeurs propres est bornée pour obtenir au plus 3 coordonnées et les immersions ne peuvent être que des plongements.

Il est important de rappeler que, bien que cette méthode indirecte de construction de surfaces minimales par optimisation spectrale donne de nouveaux résultats spectaculaires et fins, elle reste spécifique à des problèmes particuliers, où les variétés ambiantes sont certaines quadriques de l'espace Euclidien ou de l'espace de Minkowski. [1] Ces dernières décennies, les méthodes de min-max ont apporté de grandes avancées (résolution de la

1. Quadriques qu'on ne peut pas prescrire a priori (sauf si c'est la sphère) puisque leurs paramètres sont les valeurs propres associées à la métrique critique qui apparaissent dans la fonctionnelle spectrale

conjecture de Willmore [MN14], de la conjecture de Yau [MNS19, Son23] etc) et restent les approches variationnelles les plus naturelles. Dans une moindre mesure, on a aussi contribué dans [LP19] à la construction de disques minimaux à bord libre dans une plus large classe de variétés par une méthode de min-max dans le même esprit que Colding et Minicozzi dans [CM08]. Par ailleurs, il est désormais montré dans [HK23] par des méthodes de min-max, que tous les ellipsoïdes suffisamment allongés contiennent des disques minimaux plongées à bord libre non plans. Il serait intéressant de savoir s'ils produisent les mêmes objets que dans ce chapitre.

On peut enfin évoquer le problème analogue des sphères minimales plongés non hyperplanes dans des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^4$. Dans [HK19], les auteurs résolvaient une conjecture de Yau en prouvant leur existence dans des ellipsoïdes suffisamment allongés. Dans [BP22], les auteurs montrent que pour un nombre entier arbitrairement grand fixé, il existe un ellipsoïde suffisamment allongé qui contient au moins ce nombre de sphères minimales plongées non hyperplanes. Dans cet esprit, j'ai donné un point de vue nouveau par optimisation de combinaison de la première et de la deuxième valeur propre du Laplacien sur la sphère parmi toutes les métriques symétriques par rapport à un plan équatorial et invariantes par rotation autour de l'axe orthogonal à au plan équatorial.

III.1 Existence de disque minimal à bord libre non plan dans un ellipsoïde

On considère l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^3$ paramétré par $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$:

$$\mathcal{E}_\sigma := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 = 1\}$$

de demi-axes $(\sigma_i)^{-\frac{1}{2}}$ pour $i = 1, 2, 3$. Les courbes equatoriales $\{x_i = 0\} \cap \mathcal{E}_\sigma$ pour $i = 1, 2, 3$ sont des géodésiques fermées simples de $\mathcal{E}_\sigma$. Par [Mor31] ce sont les seules parmi les ellipses proches de la sphère. Dans un célèbre résultat, démontré par une combinaison de la méthode min-max de Lusternik and Schnirelmann [LS47] et le flot de courbure moyenne par Grayson [Gra89], toute 2-sphère munie d'une métrique riemannienne quelconque contient au moins 3 géodésiques fermées. C'est un rafinement de la méthode de min-max de Birkhoff [Bir17] pour montrer l'existence de géodésiques fermées sur une sphère. De nombreux exemples d'ellipsoïdes $\mathcal{E}_\sigma$ réalisent donc le nombre minimal de géodésiques fermées simples ; 3. Plus tard, Viesel [Vie71] a démontré l'existence d'ellipsoïdes qui contiennent un nombre arbitrairement grand de géodésiques fermées simples.

Une question analogue pour les disques minimaux à bord libre dans $\mathcal{E}_\sigma$ se pose. On rappelle qu'un disque minimal à bord libre dans $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est un disque topologique qui est un point critique de la fonctionnelle d'aire parmi tous les disques D tels que $\partial D \subset \Sigma$. Ce sont exactement les disques minimaux D de $\mathbb{R}^3$ tels que $\partial D \subset \Sigma$ et D rencontre Σ orthogonalement sur ∂D. Les disques plans $\{x_i = 0\} \cap co(\mathcal{E}_\sigma)$ sont les premiers exemples triviaux de de disques minimaux à bord libre dans un ellipsoïde $\Sigma = \mathcal{E}_\sigma$. La question est la suivante :

Question 1 (Dierkes, Hildebrandt, Küster, Wohlrab, 1993, [DHKW92] p335)**.** Existe-t-il des disques minimaux à bord libre non plans dans des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^3$?

Cette question est analogue à celle des géodésiques non planes sur les ellipsoïdes pour deux raisons.

D'abord, c'est la version à bord de la question suivante : existe-t-il des 2-sphères minimales dans un ellipsoïde de $\mathbb{R}^4$ qui sont non équatoriales ? Cette question avait été posée par Yau, et a la réponse donnée par Haslhofer and Ketover [HK19] est oui pour des ellipsoïdes suffisamment allongés, grâce à des méthodes de min-max et de flot de courbure moyenne. On discutera du cas sans bord dans la section III.2 où j'ai construit de telles sphères minimales par optimisation spectrale.

Ensuite, on peut directement voir cette question comme la recherche de géodésiques non locales fermées simples non planes sur des ellipsoïdes. En effet, il existe une correspondance entre les disques minimaux à bord libre et les géodésiques non locales associées au demi-Laplacien (voir [DLR11]). Plus précisément, pour une surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, il y a une correspondance bijective entre les courbes fermées paramétrées sur $\mathbb{R}$: $\gamma : \mathbb{R} \to \Sigma$ et qui satisfont l'équation [2]

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\gamma \perp T_\gamma\Sigma \text{ et } \gamma(-\infty) = \gamma(+\infty)$$

et les disques minimaux à bord libre dans Σ qui lorsqu'ils sont paramétrés par le disque $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ satisfont l'équation

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \text{ dans } \mathbb{D} \\ \partial_r\Phi \perp T_\Phi\Sigma \text{ sur } \mathbb{S}^1. \end{cases}$$

On peut obtenir Φ comme l'extension harmonique de $\gamma \circ \pi$ où $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2_+$ est une application biholomorphe. On peut obtenir γ comme la restriction à $\mathbb{R}$ de $\Phi \circ \pi^{-1}$. En effet, l'opérateur Dirichlet à Neumann sur $\mathbb{R}$ vu comme le bord de $\mathbb{R}^2_+$ est exactement le demi-Laplacien sur $\mathbb{R}$ et les équations sont invariantes conforme. La Question 1 a donc une version plus faible intéressante :

Question 2. Existe-t-il une géodésique fermée simple non locale associée à $\Delta^{\frac{1}{2}}$ non plane dans un ellipsoïde ?

La réponse aux Questions 1 et 2 est non si l'ellipsoïde est une sphère ronde ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) par [Nit85] : les seuls disques minimaux à bord libre dans la 2-sphère sont les disques plans équatoriaux. On a d'ailleurs le même résultat dans le cas sans bord pour les 2-spheres dans les 3-spheres par Almgren [Alm66]. Par contre, on sait que la version à bord est en un certain sens plus rigide, parce que même en augmentant la codimension et en autorisant les disques à être seulement immergés, on a le résultat suivant de [FS15] : pour tout n, les seuls disques immergés (possiblement branchés) à bord libre dans $\mathbb{S}^n$ sont plans. Dans le cas sans bord, on peut construire de nombreuses sphères minimales non planes dans des sphères de dimension paires $\mathbb{S}^{2n}$ avec $n \geqslant 2$ (théorie initiée par Calabi [Cal67]).

Dans le théorème suivant, ces deux questions ont une réponse :

Théorème III.1.1 ([Pet23b]). *Il existe une famille à un paramètre $(p_t)_{t>0}$ telle qu'il existe un disque D_t minimal à bord libre plongé dans l'ellipsoïde de révolution*

$$\mathcal{E}_{p_t} := \{x \in \mathbb{R}^3; p_t x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

et tel que les coordonnées x_0, x_2, x_2 sont des premières et secondes fonctions propres de Steklov pour la métrique $g_t = e^{2v_t}\xi$ sur D_t satisfaisant

$$e^{v_t} = \frac{1}{(p_t^2 x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ sur } \partial D_t$$

2. L'équation classique des géodésiques sur Σ s'écrit $\Delta\gamma \perp T_\gamma\Sigma$

où ξ est la métrique Euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Pour tous $t_1 < t_2$, D_{t_1} is n'est pas isométrique à D_{t_2}. De plus, en notant L_t la longueur de ∂D_t par rapport à la métrique g_t, $t \mapsto L_t p_t$ est strictement décroissante et $t \mapsto L_t$ est strictement croissante. Enfin, $p_t \to 0$ et $L_t \to 4\pi$ lorsque $t \to +\infty$ et D_t converge au sens des varifolds vers le disque $\{0\} \times \mathbb{D}$ avec multiplicité 2 lorsque $t \to +\infty$.

Depuis, la réponse aux Questions 1 et 2 a été généralisée à tous les ellipsoïdes suffisamment allongés de $\mathbb{R}^3$ par des méthodes de min-max [HK23]. Dans les sous-sections suivantes, on détaille les étapes de la démonstration originale par optimisation spectrale.

Etape 1 : Optimisation spectrale. Il existe des minimiseurs pour de nombreuses combinaisons bien choisies de premières et deuxièmes valeurs propres de Steklov parmi les métriques riemanniennes sur le disque. Les minimiseurs existent également parmi les métriques qui sont paires par rapport aux deux coordonnées du plan. C'est l'objet de la Sous-section III.1.1

Etape 2 : Bornes sur la multiplicité. Les immersions (possiblement branchées) minimales à bord libre dans des ellipsoïdes associées aux métriques minimales ont au plus 3 coordonnées. C'est une conséquence directe de [Jam16] : la deuxième valeur propre de Steklov sur le disque est de multiplicité au plus 2.

Etape 3 : Les surfaces sont non planes. Il existe des choix de combinaisons de première et deuxième valeurs propres pour lesquels une immersion (possiblement branchée) minimale à bord libre associée à une métrique minimisante est forcément non plane. C'est l'objet de la Sous-section III.1.2

Etape 4 : Les surfaces sont plongées. Des immersions (possiblement branchées) minimales à bord libre obtenues sont en fait des plongements. Plus précisément, les immersions minimales n'ont jamais de points de branchement du fait qu'elles le sont par premières et deuxièmes fonctions propres. Sous hypothèse de symétries (métriques minimales paires par rapport à chaque coordonnée), ce sont des plongements. C'est l'objet de la Sous-section III.1.3.

III.1.1 Existence de minimiseurs

Le point de départ de cette étude est le Théorème II.2.4, donné dans [Pet24b]. L'existence de minimiseurs pour des combinaisons de valeurs propres de Steklov sur une surface fournit une immersion (possiblement branchée) minimale à bord libre dans un ellipsoïde (voir Théorème II.1.2). Ainsi, pour donner un exemple le plus simple possible de construction, on suppose que la surface est un disque et que seules la première et la deuxième fonction propre de Steklov interviennent dans la combinaison. Il reste à choisir une famille de combinaisons suffisamment simple pour être exploitée. On peut énoncer l'inégalité de Weinstock [Wei54], qui se généralise très bien à la somme des inverses des deux premières fonctions propres sur le disque [HP68] :

$$\bar{\lambda}_1(\mathbb{D}, \cdot)^{-1} + \bar{\lambda}_2(\mathbb{D}, \cdot)^{-1} \geqslant \frac{1}{\pi}. \tag{III.1}$$

La fonctionnelle de gauche n'est atteinte que pour des disques isométriques au disque muni de la métrique euclidienne. Par ailleurs, les combinaisons linéaires de valeurs propres sont assez simples à manipuler. Partant de ces observations, on pose pour $t \geqslant 0$ et $s \in \mathbb{R}^*$

$$h_{s,t}(x_1, x_2) = \left(x_1^{-s} + t x_2^{-s}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

afin de déterminer les métriques qui atteignent

$$I^S(\mathbb{D}, h_{s,t}) = \inf_{g \in Met(\mathbb{D})} E^S_{h_{s,t}}(\mathbb{D}, g)$$

où g désigne l'ensemble des métriques sur le disque et

$$E^S_{h_{s,t}}(\mathbb{D}, g) = h_{s,t}(\bar{\sigma}_1(\mathbb{D}, g), \bar{\sigma}_2(\mathbb{D}, g)).$$

Il est important de noter à ce stade que par le théorème d'uniformisation, minimiser $E^S_{h_{s,t}}$ sur l'espace des métriques d'un disque topologique est équivalent à le minimiser dans l'ensemble des métriques conformes à la métrique euclidienne sur le disque. Comme les valeurs propres de Steklov ne dépendent que de la valeur du facteur conforme au bord, c'est même équivalent à un problème de minimisation parmi des fonctions lisses et strictement positives sur un cercle. D'ailleurs, on dit que deux métriques g_1 et g_2 sont Steklov-isométriques s'il existe un difféomorphisme du disque Φ tel que g_2 est conforme à $\Phi^\star g_1$ avec un facteur conforme valant 1 au bord.

Pour les fonctionnelles $h_{s,t}$, on remarque que si $t = 0$, on obtient le maximiseur de $\bar{\sigma}_1$, c'est à dire par Weinstock (III.1), c'est le disque euclidien. Plus particulièrement, pour $s = 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, (III.1) implique que le seul minimiseur est un disque. De manière diamétralement opposée pour tout s, si $t = +\infty$, un minimiseur de $h_{s,t}$ correspond à un maximiseur de $\bar{\sigma}_2$. Par [HPS75]

$$\bar{\sigma}_2 < 4\pi \tag{III.2}$$

et ce n'est pas atteint (voir [GP10]). Par contre, 4π correspond à la deuxième valeur propre renormalisée de l'union de deux disques euclidiens disjoints dont les bords ont la même longueur. En particulier, il existe des suites maximisantes dont la deuxième valeur propre tend vers 4π qui explosent et convergent vers une union disjointe de deux disques.

En utilisant le Théorème II.2.4 pour ces choix de combinaison $h_{s,t}$, on obtient le Théorème suivant :

Théorème III.1.2 ([Pet23b]). *Pour tous $s \in \mathbb{R}^*$ et $t \geqslant 0$, $I^S(\mathbb{D}, h_{s,t})$ est atteint.*

Pour démontrer ce Théorème, il s'agit simplement de vérifier (voir Théorème II.2.3) que

$$I^S(\mathbb{D}, h_{s,t}) < I^S(\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D}, h_{s,t}). \tag{III.3}$$

Pour toute métrique g sur $\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D}$, on a $\bar{\sigma}_1(\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D}, g) = 0$ car $\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D}$ est une surface non connexe. Le maximiseur de $\bar{\sigma}_2(\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D})$ est 4π atteint en une union disjointe de deux disques euclidiens isométriques. Ainsi :

$$I^S_{h_{s,t}}(\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D}) = \begin{cases} +\infty \text{ si } s > 0 \\ (4\pi)^{-1} t^{\frac{1}{s}} \text{ si } s < 0. \end{cases} \tag{III.4}$$

Ainsi, (III.3) est évident quand $s > 0$. Quand $s < 0$, on construit une suite de métriques qui impliquent (III.3) pour tout $t \geqslant 0$:

Théorème III.1.3 ([Pet23b]). *Il existe une famille à 1 paramètre de métriques $h_\varepsilon = e^{2v_\varepsilon}(dx^2 + dy^2)$ telles que*

$$\bar{\sigma}_1(h_\varepsilon) = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} + O\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2}\right) \text{ and } \bar{\sigma}_2(g_\varepsilon) = 4\pi - 16\pi\varepsilon + o(\varepsilon)$$

lorsque $\epsilon \to 0$ et e^{2v_ϵ} satisfait les propriétés de symétrie suivantes

$$\forall (x, y) \in \mathbb{D}, e^{2v_\varepsilon}(x, y) = e^{2v_\varepsilon}(-x, y) = e^{2v_\varepsilon}(x, -y).$$

Ces métriques $g_\varepsilon = e^{2u_\varepsilon}\xi$ sont définies naturellement comme une somme de deux "bulles" [3]

$$e^{2v_\varepsilon(z)} = \frac{\beta_\varepsilon^2 - 1}{|\beta_\varepsilon - z|^2} + \frac{\beta_\varepsilon^2 - 1}{|\beta_\varepsilon + z|^2} ,$$

où

$$\beta_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} > 1 .$$

au sens où chaque terme de la somme est le facteur conforme associée à un disque plat euclidien obtenu par tiré en arrière de la conjugaison par des applications biholomorphes $f_\pm : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{D}$ telles que $f_\pm(0) = (\pm 1, 0)$ d'une dilatation d'un facteur ε dans $\mathbb{R}^2_+$. Par construction, on induit une concentration de chaque facteur conforme vers le point $(\pm 1, 0)$ du disque. Cette construction de métriques est relativement standard. Néanmoins, il n'était pas connu que la première et la seconde valeur propre pour h_ε ne convergent pas du tout à la même vitesse vers leur valeur limite, ce qui permet d'obtenir (III.3).

Enfin, on remarque dans la Sous-section III.1.3 qu'une hypothèse supplémentaire de symétrie permet de montrer que les immersions minimales de disques à bord libre par première et deuxième fonction propre de Steklov sont en fait plongées. Pour construire de tels objets, on adapte la démonstration du Théorème III.1.2 au cas de la minimisation de $E^S_{h_{s,t}}$ parmi les métriques g qui vérifient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{D}, g(x,y) = g(-x,y) = g(x,-y).$$

On note $Met_{eq}(\mathbb{D})$ l'ensemble de ces métriques et

$$I^S_{eq}(\mathbb{D}, h_{s,t}) = \inf_{g \in Met_{eq}(\mathbb{D})} E^S_{h_{s,t}}(\mathbb{D}, g).$$

Noter que cette optimisation est équivalente à l'optimisation parmi toutes les métriques de la forme $g = e^{2u}\xi$ sur le disque $\mathbb{D}$ qui satisfont la propriété

$$\forall (x,y) \in \mathbb{D}, e^u(x,y) = e^u(-x,y) = e^u(x,-y) \text{ sur } \mathbb{S}^1.$$

On a aussi dans ce cas l'existence d'un minimiseur

Théorème III.1.4 ([Pet23b])**.** *Pour tous $s \in \mathbb{R}^*$ et $t \geqslant 0$, $I^S_{eq}(\mathbb{D}, h_{s,t})$ est atteint.*

Les métriques minimales pour ce problème correspondent également à des immersions (possiblement branchées) minimales dans un ellipsoïde. La démonstration de ce théorème nécessite encore de vérifier une inégalité stricte du type

$$I^S_{eq}(\mathbb{D}, h_{s,t}) < I^S_{eq}(\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D}, h_{s,t}). \tag{III.5}$$

où $I^S_{eq}(\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D}, h_{s,t})$ et l'infimum de $E^S_{h_{s,t}}$ parmi toutes les métriques sur $\mathbb{D} \sqcup \mathbb{D}$ qui sont égales sur chaque copie du disque et qui sont paires par rapport à une coordonnée du disque. Cette inégalité se vérifie encore car toutes les métriques test de (III.1.3) vérifient cette propriété.

Comme on l'a dit, un minimiseur de $I^S(\mathbb{D}, h_{s,t})$ ou $I^S_{eq}(\mathbb{D}, h_{s,t})$ est un disque euclidien pour $t = 0$, et l'union disjointe de deux disques euclidiens pour $t = +\infty$. Si on imagine que les minimiseurs de $I(\mathbb{D}, h_{s,t})$ ou $I^S_{eq}(\mathbb{D}, h_{s,t})$ sont continus le long de t, les disques minimaux à bord libre associés ne peuvent pas rester plans le long de t. Dans la sous-section suivante on montre en effet qu'à partir d'une certaine valeur t, les disques minimaux à bord libre ainsi construits sont non plans.

3. Le terme de bulle est plus couramment utilisé dans le cas analogue des facteurs conformes qui se concentrent en un point intérieur à la surface avec la géométrie de la sphère ronde. Ici, c'est le disque euclidien qui joue le rôle de la sphère ronde.

III.1.2 Ellipses critiques non minimisantes

Pour montrer que les minimiseurs de $E^S_{h_{s,t}}$ sont non plans, on classifie les points critiques qui admettent des immersions minimales à bord libre dans une ellipse par première et deuxième valeurs propres de Steklov. Ainsi, on montre que pour tous $s \neq 0$, il existe un certain rang $t(s) > 0$ tel que ceux-ci ne peuvent plus être minimiseurs de $h_{s,t}$.

Pour $q \geqslant 1$, on note l'ellipse $co(E_q) = \{x^2 + qy^2 \leqslant 1\}$ où

$$E_q = \{x^2 + qy^2 = 1\}$$

munie de la métrique riemannienne $g_q = e^{2v_q}(dx^2 + dy^2)$ telle que

$$e^{v_q} = (x^2 + q^2y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

sur E_q. Dans le résultat suivant, on montre que $(co(E_q), g_q)$ est critique pour de nombreuses combinaisons de valeurs propres de Steklov. C'est donc un bon candidat à être un extremum pour ces combinaisons. On note que si σ est une valeur propre de Steklov de (Σ, g), l'indice de σ est le plus petit entier k tel que $\sigma_k(\Sigma, g) = \sigma$.

Théorème III.1.5 ([Pet25a])**.** *Pour $q \geqslant 1$, l'ellipse $(co(E_q), g_q)$ a la suite suivante de fonctions propres $(Re(P^q_n), Im(P^q_n))$ et de valeurs propres associées (σ^q_n, τ^q_n) :*

$$\sigma^q_n = n\sqrt{q}\frac{(\sqrt{q}+1)^n - (\sqrt{q}-1)^n}{(\sqrt{q}+1)^n + (\sqrt{q}-1)^n} \text{ and } \tau^q_n = n\sqrt{q}\frac{(\sqrt{q}+1)^n + (\sqrt{q}-1)^n}{(\sqrt{q}+1)^n - (\sqrt{q}-1)^n}$$

et

$$P^q_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k} z^{n-2k}\left(z^2 - \left(1 - \frac{1}{q}\right)\right)^k.$$

De plus, pour $q > 1$, g_q est une métrique critique pour toutes les fonctionnelles spectrales $g \mapsto f(\bar\sigma_{k_1}(g), \bar\sigma_{k_2}(g))$ telles que

$$\frac{\partial_1 f(\bar\sigma_{k_1}(g_q), \bar\sigma_{k_2}(g_q))}{\partial_2 f(\bar\sigma_{k_1}(g_q), \bar\sigma_{k_2}(g_q))} = \frac{\int_{E_q} Re(P^q_n)^2 dL_{g_q}}{\int_{E_q} Im(P^q_n)^2 dL_{g_q}}.$$

où (k_1, k_2) est le couple des indices du couple de valeurs propres distinctes (σ^q_n, τ^q_n).

On note que pour $q = 1$, $P^q_n = z^n$ correspond aux fonctions propres de Steklov sur le disque plat : les polynômes homogènes harmoniques. Bien que le résultat soit simple et que les polynômes en jeu sont connus, c'est à ma connaissance la première fois qu'on décrit une nouvelle surface riemannienne à bord simplement connexe, critique pour des fonctionnelles spectrales. Insistons sur le fait que l'ordre des valeurs propres sur le disque

$$1 = \sigma^1_1 = \tau^1_1 < 2 = \sigma^1_2 = \tau^1_2 < \cdots < n = \sigma^n_2 = \tau^n_2 < \cdots$$

n'est à un certain point plus respecté lorsque q croît du fait des propriétés suivantes :

$$\forall q \in [1, +\infty[, (\sigma^q_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (\tau^q_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont strictement croissants}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (\sigma^q_n)_{q\geqslant 1} \text{ est borné et } \tau^q_n \sim q \text{ lorsque } q \to +\infty.$$

Dans la suite, on se restreint aux fonctionnelles spectrales sur le disque mettant en jeu la première et la deuxième valeur propre de Steklov sur le disque. C'est à dire pour $F : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ décroissante par rapport à chaque coordonnée, on pose

$$E_F^S(\mathbb{D}, g) = F(\bar{\sigma}_1(\mathbb{D}, g), \bar{\sigma}_2(\mathbb{D}, g)).$$

Dans ce cas, la proposition suivante indique que les seuls points critiques de $E_F^S(\mathbb{D}, \cdot)$ tels qu'il existe une immersion minimale branchée associée qui prend ses valeurs dans des ellipses sont (quitte à reparamétrer le disque) du type (E_q, g_q) pour $q \geqslant 1$.

Proposition III.1.6 ([Pet23b, Pet25a])**.** *Soit* $\Phi : \mathbb{D} \to co\,(\mathcal{E}_\sigma) \subset \mathbb{R}^2$ *une application harmonique à bord libre conforme dans une ellipse. On suppose que les coordonnées de* Φ *sont des premières et deuxièmes fonctions propres de Steklov par rapport à la métrique*

$$g = e^{2v} \Phi^\star \xi \ \textit{tel que}\ e^v = (\sigma_1^2 (\phi_1)^2 + \sigma_2^2 (\phi_2)^2)^{-\frac{1}{2}} \ \textit{sur}\ \mathbb{S}^1$$

où ξ *est la métrique Euclidienne sur* E_q*. Alors* Φ *est un biholomorphisme. Ainsi, il existe* $q > 1$ *tel que* $(\mathbb{D}, g)$ *est (Steklov)-isométrique à dilatation près à* (E_q, g_q)*.*

Démonstration. Comme une application conforme harmonique entre deux ouverts de $\mathbb{C}$ est holomorphe, le contenu du théorème est de démontrer que Φ est un difféomorphisme du disque fermé vers l'ellipsoïde fermé. La démonstration est relativement simple et demande les étapes suivantes

Etape 1 : On montre par une application astucieuse du principe du maximum et du lemme de Hopf que sur $\mathbb{S}^1$ le facteur conforme associé à $\Phi^\star \xi$ par rapport à $d\theta$ ne peut pas s'annuler. Ce résultat est en fait plus général (voir Proposition (III.1.8)).

Etape 2 : On utilise qu'une coordonnée, disons ϕ_1 est une première fonction propre de Steklov. Elle n'a donc que deux domaines nodaux, ce qui se traduit par une seule ligne nodale qui ne coupe que 2 fois le bord. Ainsi, $\Phi_{|\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{E}_\sigma$ ne peut être que de degré 1.

Etape 3 : Pour des raisons topologiques, l'application holomorphe Φ entre deux domaines simplement connexes, de degré 1 au bord est un biholomorphisme. $\square$

Reprenons les exemples de fonctions $F = h_{s,t}$ de [Pet23b] pour $s > 0$ et $t \geqslant 0$,

$$h_{s,t}(x_1, x_2) = \left(x_1^{-s} + t x_2^{-s}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition III.1.7 ([Pet23b, Pet25a])**.** *On Suppose que pour* $q > 1$, (E_q, g_q) *est critique pour* $E_F^S(\mathbb{D}, \cdot)$*. Alors :*

$$q \leqslant 3 \ \textit{et}\ \frac{\partial_1 F(\frac{2\pi}{\sqrt{q}}, 2\pi\sqrt{q})}{\partial_2 F(\frac{2\pi}{\sqrt{q}}, 2\pi\sqrt{q})} = q. \tag{III.6}$$

En particulier, soit $g_{s,t}$ *un minimiseur de* $E_{h_{s,t}}^S(\mathbb{D}, \cdot)$*. On suppose que*

$$s > 0 \ \textit{et}\ t > 3^s \ \textit{ou}\ s < 0 \ \textit{et}\ t \geqslant (2^{-s} - 1)^{-1}.$$

Alors toute immersion minimale à bord libre dans un ellipsoïde par premières et deuxièmes fonctions propres de Steklov associée à la métrique $g_{s,t}$ *est non plane.*

III.1.3 Caractère plongé et hypothèses de symétrie

On donne maintenant des conditions suffisantes pour que des immersions minimales à bord libre dans des ellipsoïdes soient plongées. Soit $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ une immersion (possiblement branchée) conforme à bord libre dans un ellipsoïde.

$$\mathcal{E}_\sigma = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sigma_1 x_1^2 + \cdots + \sigma_n x_n^2 = 1\} ,$$

paramétré par $\sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$. Soit $e^{2u}(dx^2 + dy^2) = \Phi^\star \xi$ le tiré en arrière de la métrique euclidienne ξ par Φ. Les points de ramification x correspondent à $u(x) = -\infty$. On sait que les fonctions coordonnées de Φ sont des fonctions propres de Steklov par rapport au facteur conforme $e^v = \frac{e^u}{|\sigma\Phi|}$ au bord. La proposition suivante est une conséquence du principe du maximum et du lemme de Hopf.

Proposition III.1.8 ([Pet23b]). *Soit $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ une immersion (possiblement branchée) conforme à bord libre dans $\mathcal{E}_\sigma$. Alors $\Phi(\Sigma) \subset co(\mathcal{E}_\sigma)$, $\Phi^{-1}(\mathcal{E}_\sigma) = \partial\Sigma$ et $\Phi(\Sigma)$ n'a pas de point de ramification sur $\Phi(\partial\Sigma)$.*

Démonstration. Soit $x \in \partial\Sigma$. On pose $\psi = \sigma_1 \phi_1(x)\phi_1 + \cdots + \sigma_n \phi_n(x)\phi_n$. On a pour tous $y \in \mathbb{D}$,

$$\psi(y) = \langle \sigma\phi(x), \phi(y)\rangle \leqslant \sqrt{\langle \sigma\phi(x), \phi(x)\rangle}\sqrt{\langle \sigma\phi(y), \phi(y)\rangle} = \sqrt{\langle \sigma\phi(y), \phi(y)\rangle}$$

La fonction $f : y \mapsto \langle \sigma\phi(y), \phi(y)\rangle$ est sous-harmonique car

$$\Delta f = -\langle \sigma\nabla\phi, \nabla\phi\rangle \leqslant 0 ,$$

donc f réalise sont maximum au bord, et $f = 1$ au bord implique que

$$\psi(y) \leqslant 1 = \psi(x) .$$

ψ est une fonction harmonique qui réalise son maximum en $x \in \mathbb{S}^1$. Comme ψ est harmonique, le lemme de Hopf implique $\partial_\nu\psi(x) \neq 0$ et on déduit

$$e^{u(x)} = |\sigma\Phi(x)|^2 e^{v(x)} = \langle \sigma\Phi(x), \partial_\nu\Phi(x)\rangle = \partial_\nu\psi(x) \neq 0 .$$

□

Cet outil important permet d'utiliser des propriétés topologiques des lignes nodales et des domaines nodaux des premières et secondes fonctions de Steklov [4] sur un disque :

Proposition III.1.9 ([Pet23b]). *Soit $x \in \mathbb{D}$ et soit ψ une première ou deuxième fonction propre de Steklov sur le disque associé à un certain poids sur le bord e^v. Alors*

$$\psi(x) = 0 \Rightarrow \nabla\psi(x) \neq 0 .$$

4. On rappelle qu'une ligne nodale est l'ensemble des points d'annulation de la fonction propre et qu'un domaine nodal est une composante connexe de l'ensemble des points où la fonction propre ne s'annule pas. Le théorème de Courant dans le cadre des valeurs propres de Steklov indique qu'une fonction propre associé à σ_k admet au plus $k + 1$ domaines nodaux.

Démonstration. Par le théorème de Courant, ψ a au plus 3 domaines nodaux. De plus, l'ensemble nodal est soit une courbe lisse dont les extrémités sont deux points distincts du bord de $\mathbb{S}^1$ ou l'union disjointe de deux courbes lisses ayant chacune pour extrémités deux points distincts du bord de $\mathbb{S}^1$ (noter que les deux courbes peuvent avoir une extrémité commune). En effet, comme les fonctions propres sont non constantes et harmoniques, les ensembles nodaux ne peuvent pas contenir une courbe fermée. De plus, ils ne peuvent pas contenir une singularité à l'intérieur car sinon, la fonction propre aurait au moins 4 domaines nodaux. Maintenant, soit $x \in \mathbb{D}$ un point intérieur tel que $\psi(x) = 0$. Soit D un domaine nodal tel que $x \in \partial D$. Comme on l'a dit ∂D est lisse en x et x est un point extrémal de ψ sur D. Par le lemme de Hopf, $\partial_\nu \psi(x) \neq 0$. □

On déduit de manière générale qu'une application conforme harmonique à bord libre dans un ellipsoïde par premières ou deuxièmes fonctions propres sur le disque ne peut pas avoir de points de ramification.

Proposition III.1.10 ([Pet23b]). *On suppose que $\Phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2) : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ est une immersion (possiblement branchée) minimale à bord libre dans $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2; \sigma_1 x_0^2 + \sigma_2(x_1^2 + x_2^2) = 1\}$, où $\sigma_1 < \sigma_2$ et ϕ_0 est une première fonction propre et ϕ_1 et ϕ_2 sont des secondes fonctions propres. Alors Φ n'admet pas de points de ramification.*

Démonstration. Grâce à la proposition III.1.8, Φ n'a pas de point de ramification au bord du disque. Il reste à le montrer à l'intérieur : pour $z \in \mathbb{D}$, on montre que $\nabla\Phi(z) \neq 0$. On va même montrer que $\nabla\eta(z) \neq 0$, où $\eta = (\phi_1, \phi_2)$. Soit $v \in \mathbb{S}^1$ tel que $\langle v, \eta(z)\rangle = 0$. Alors $\langle v, \eta\rangle$ s'annule en z et la Proposition III.1.9 donne $\langle v, \nabla\eta(z)\rangle = \nabla\left(\langle v, \nabla\eta\rangle\right)(z) \neq 0$. □

Il n'est pas clair qu'une immersion minimale à bord libre du disque dans un ellipsoïde par premières et deuxièmes fonctions propres $\Phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2) : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ est plongée. Bien sûr comme on l'a vu dans la Proposition III.1.6, elle est plongée si elle est plane (c'est à dire ϕ_1 et ϕ_2 sont colinéaires). En fait, elle est plongée sous une hypothèse de symétrie.

Théorème III.1.11 ([Pet23b]). *On suppose que $\Phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2) : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ est une immersion minimale à bord libre dans $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2; \sigma_1 x_0^2 + \sigma_2(x_1^2 + x_2^2) = 1\}$, où $\sigma_1 < \sigma_2$ et ϕ_0 est une première fonction propre et ϕ_1 et ϕ_2 sont des secondes fonctions propres. On suppose de plus qu'étant donnée la métrique $e^{2u}\left(dx^2 + dy^2\right) = \Phi^\star\xi$, le facteur conforme $e^v = \frac{e^u}{|\sigma\Phi|}$ satisfait*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{S}^1, e^v(x, y) = e^v(-x, y) = e^v(x, -y).$$

Alors Φ est un plongement.

La démonstration de ce résultat repose sur une description fine des domaines nodaux des fonctions propres associées à la première et deuxième valeur propre de Steklov dans le cas symétrique. On comprend qu'une association avec le théorème de Courant contraint très fortement le problème. [5]

5. Une première étape de la démonstration repose sur le fait que l'ensemble nodal des fonctions propres à deux domaines nodaux est forcément $\{0\} \times [-1, 1]$ ou $[-1, 1] \times \{0\}$. Une deuxième propriété est que par le Théorème de Courant, une fonction propre ne peut pas s'annuler sur chacun de ces deux ensembles car elle aurait au moins 4 domaines nodaux.

Proposition III.1.12 ([Pet23b]). *Sous les hypothèses du Théorème III.1.11, quitte à faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ du disque paramètre et une rotation de l'ellipsoïde de révolution, on a*

$$\forall x, y \in \mathbb{D}, \phi_0(x,-y) = -\phi_0(x,y) \text{ et } \phi_0(-x,y) = \phi_0(x,y)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{D}, \phi_1(x,-y) = \phi_1(x,y) \text{ et } \phi_1(-x,y) = -\phi_1(x,y)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{D}, \phi_2(x,-y) = \phi_2(x,y) \text{ et } \phi_2(-x,y) = \phi_2(x,y)$$

où ϕ_0 et ϕ_1 ont exactement 2 domaines nodaux et ϕ_2 a exactement 3 domaines nodaux. De plus, ϕ_2 ne s'annule pas sur $[-1,1] \times \{0\} \cup \{(0,\pm 1)\}$.

La deuxième étape de la démonstration du Théorème III.1.11 est essentiellement de démontrer grâce aux équations sur Φ (Φ est conforme et harmonique à l'intérieur, et $\partial_\nu \Phi$ est parallèle à $\sigma \cdot \Phi$ au bord) que sa projection restreinte à un demi-disque $\eta = (\phi_1, \phi_2) : \mathbb{D}_+ \to \eta(\mathbb{D}_+)$ est un homéomorphisme. Par les propriétés de symétrie (Proposition III.1.12) on déduit que Φ est injective et donc que c'est un plongement. L'outil est une utilisation fine d'une généralisation d'un théorème de Kneser [Kne26]. [6] On utilise pour cela une généralisation formulée dans [AN09, AN21]. L'adaptation du théorème de Kneser est nécessaire en plusieurs sens : l'image de $\partial\mathbb{D}_+$ par η n'est pas nécessairement en ensemble convexe. Le domaine de départ $\mathbb{D}_+$ n'est pas un disque et surtout, il admet un bord avec deux singularités : on ne peut pas appliquer directement la théorie d'Alessandrini et Nesi mais devons adapter le résultat en faisant une approximation lisse de η dont le domaine de départ est lisse.

Ce schéma de preuve du Théorème III.1.11 s'inspire de la démonstration du résultat suivant de [FS16] : toute immersion minimale à bord libre d'une surface de genre 0 dans une boule par les premières fonctions propres est plongée. Néanmoins, dans notre cas, la démonstration est plus difficile car il y a moins de symétries du problème à exploiter, l'image de l'immersion étant seulement un ellipsoïde de révolution, pas une sphère : la différence notable est que dans notre cas, une combinaison linéaire de (ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2) n'est pas une fonction propre en général, et donc ne satisfait pas forcément le théorème de Courant. Cette propriété, lorsque toutes les coordonnées sont des premières fonctions propres, était un ingrédient important de la démonstration de Fraser et Schoen. Dans notre cas, seule une combinaison linéaire de (ϕ_1, ϕ_2) est une deuxième fonction propre. On ne peut donc travailler que sur l'application $\eta = (\phi_1, \phi_2) : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$. C'est aussi une raison pour laquelle on ajoute une hypothèse de symétrie.

III.2 Sphères minimales plongées non hyperplanes dans des ellipsoïdes

Dans cette section, on pourrait de manière analogue à la section précédente détailler la construction de sphères minimales non hyperplanes plongées dans des ellipsoïdes de révolution suffisamment allongés de $\mathbb{R}^4$. On se contentera de contextualiser rapidement ce travail et de donner l'énoncé principal.

6. Le théorème classique de Kneser stipule qu'une application harmonique du disque à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ tel que l'image du cercle est une courbe qui borde un ensemble convexe est un difféomorphisme sur son image. On pouvait utiliser ce résultat dans la démonstration de la Proposition III.1.6 sans avoir besoin de la conformalité de l'application.

Répondant à une question de Yau de 1987, Haslhofer et Ketover [HK19] ont montré qu'il existe des 2-sphères non équatoriales plongées dans des ellipsoïdes de $\mathbb{R}^4$ suffisamment allongés, On énonce dans cette section une preuve alternative du résultat de Haslhofer and Ketover [HK19] dans le cas particulier où les ellipsoïdes sont de révolution. On note également que par une théorie de bifurcation, Bettiol et Piccione [BP22] ont montré l'existence d'un nombre arbitrairement grand de 2-spheres minimales dans des ellipsoïdes de révolution (au moins deux demi-axes coincident).

Théorème III.2.1 ([Pet25b])**.** *Il existe une famille à un paramètre $(p_t, q_t)_t$ telle qu'il existe une sphère minimale non hyperplane S_t dans l'ellipsoïde de révolution*

$$\mathcal{E}_t := \{x \in \mathbb{R}^4; p_t x_0^2 + q_t x_1^2 + q_t x_2^2 + q_t x_3^2 = 1\}$$

et tel que les coordonnées x_0, x_2, x_2, x_3 sont des premières et secondes fonctions propres du Laplacien pour la métrique

$$g_t = \frac{H_{S_t}(x)}{(p_t^2 x_0^2 + q_t^2 x_1^2 + q_t^2 x_2^2 + q_t^2 x_3^2)^{\frac{1}{2}}} \xi$$

sur S_t, où ξ est la métrique euclidienne et H_{S_t} est la norme du vecteur courbure moyenne de S_t dans $\mathbb{R}^4$. Pour tous $t_1 < t_2$, S_{t_1} n'est pas isométrique à S_{t_2}. De plus $t \mapsto p_t$ est strictement décroissante et $t \mapsto q_t$ est strictement croissante. Enfin $p_t \to 0$ et $q_t \to 16\pi$ lorsque $t \to +\infty$ et S_t converge au sens des varifold vers la sphère ronde $\{0\} \times \mathbb{S}^2$ avec multiplicité 2 lorsque $t \to +\infty$.

Bien qu'il soit spécifique, ce résultat apporte une compréhension spectrale sur les sphères plongées minimales construites : les fonctions coordonnées restreintes à ces sphères sont des premières et secondes fonctions propres du Laplacien pour une métrique donnée sur la surface (ici, g_t). Cela impose une certaine géométrie à la sphère minimale dans le même esprit que la Proposition III.1.12 dans le cas à bord. Par ailleurs, dans l'esprit de [BP22], notre suivi fin du paramètre des fonctionnelles spectrales peut permettre de résoudre la question naturelle suivante : quelle est la valeur précise de bifurcation sur un paramètre d'ellongation de l'ellipsoïde à partir de laquelle il existe une sphère minimale plongée non plane ?

Dans le même esprit qu'après le Théorème III.1.1, donnons quelques éléments de chaque étape de démonstration :

Etape 1 : Optimisation spectrale. Il existe des minimiseurs pour de nombreuses combinaisons bien choisies de premières et deuxièmes valeurs propres du Laplacien parmi des métriques riemanniennes sur le disque. Les minimiseurs existent également parmi les métriques qui sont symétrique par rapport à un plan équatorial et invariantes par rotation par rapport à l'axe orthogonal. L'analogue de l'inégalité de Weinstock qui inspire le choix des fonctionnelles spectrales est l'inégalité de Hersch :

$$\left(\bar{\lambda}_1(\mathbb{S}^2, \cdot)\right)^{-1} + 2\left(\bar{\lambda}_2(\mathbb{S}^2, \cdot)\right)^{-1} \geqslant \frac{3}{8\pi}.$$

Les minima de $\bar{\lambda}_1^{-1} + t\bar{\lambda}_2^{-1}$ passent d'une sphère ronde pour $0 \leqslant t \leqslant 2$ à une union disjointe de deux sphères rondes de même aire pour $t = +\infty$, ce qui laisse intuitivement penser que certaines sphères minimales doivent sortir d'un hyperplan à partir d'un certain point de bifurcation t.

Etape 2 : Bornes sur la multiplicité. Les immersions (possiblement branchées) minimales de sphères dans des ellipsoïdes associées aux métriques minimales ont au plus 4 coordonnées. C'est une conséquence directe de [HOHON99] : la deuxième valeur propre du Laplacien sur une sphère est de multiplicité au plus 3.

Etape 3 : Les surfaces sont non hyperplanes. Il existe des choix de combinaisons de première et deuxième valeurs propres pour lesquels une immersion (possiblement branchée) minimale associée à une métrique minimisante est forcément non hyperplane. D'ailleurs, le Théorème III.2.1 répond à une question de [HOHON99] : il existe des métriques sur la sphère pour lesquelles la multiplicité maximale 3 est atteinte pour la deuxième valeur propre. Dans ce cas, les valeurs propres associées aux sphères critiques sont moins faciles à calculer que dans le cas à bord. Le comportement est néanmoins similaire.

Etape 4 : Les surfaces sont plongées. Des immersions (possiblement branchées) minimales obtenues sont en fait des plongements. Plus précisément, les immersions minimales n'ont jamais de points de branchement du fait qu'elles le sont par premières et deuxièmes fonctions propres. Sous les hypothèses de symétries mentionnées ci-dessus, ce sont des plongements. Sans rentrer dans le détail dans ce mémoire, les arguments ici utilisés sont assez différents du cas à bord.

III.3 Perspectives

On donne des questions dans le cadre à bord même si les mêmes questions peuvent se formuler dans le cas sans bord.

Une question naturelle est de savoir à quel point le nombre de disques minimiaux à bord libre dans un ellipsoïde donné est rare. Il est possible que parmi toutes les immersions par premières et deuxièmes fonctions propres, ceux qui sont construits dans le Théorème III.1.1 sont les seuls possibles.

Par contre, l'analogue du résultat de [BP22] a de bonnes raisons d'être vérifié dans le cas à bord : pour un entier k donné, il existe une élongation à partir de laquelle tous les ellipsoïdes de révolution plus allongés contiennent au moins k disques minimaux à bord libres non plans plongés. Dans [BP22], les auteurs construisent leurs sphères par des méthodes de bifurcation. Dans le cas à bord, leur méthode ne peut pas fonctionner en l'état. En effet, leur méthode joue sur sur le paramètre associé à l'invariance par rotation des sphères minimales qu'ils construisent. Dans le cas sans bord, l'ellipsoïde perd une dimension et les disques minimaux ne sont plus invariants par rotation. Pourtant, dans le même esprit, se concentrer sur des bifurcations des valeurs propres associées à la métrique critique est prometteur : on identifie dans le Théorème III.1.5 des bifurcations des valeurs propres associées au ellipses planes (E_q, g_q). On conjecture que les disques minimaux à bord libre dans un ellipsoïde ne peuvent apparaître que dans les ellipsoïdes

$$\mathcal{E}_p = \{px_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

d'ellongation $\frac{1}{p} \geqslant 3$, où 3 correspond à l'ellongation critique de l'ellipse critique (E_q, g_q) pour lequelle la deuxième valeur propre de Steklov est multiple, c'est à dire

$$\sigma_1(g_q) = \sigma_1^q = 1 \text{ et } \sigma_2(g_q) = q = \tau_1^q = \sigma_2^q.$$

Comme on l'a vu, cette condition apparaît dans la démonstration Théorème III.1.1 pour montrer que les objets construits sont non plans. De manière plus générale, les élongations critiques sont les valeurs $\frac{1}{p} \geqslant q_k$ ou q_k est le réel défini pour $k \geqslant 1$ comme le plus petit réel plus grand que 1 satisfaisant :

$$\sigma_1(g_{q_k}) = \sigma_1^{q_k} = 1 \text{ et } \sigma_{k+1}(g_{q_k}) = q_k = \tau_1^{q_k} = \sigma_{k+1}^{q_k}.$$

Ici, $q_1 = 3$. On conjecture alors que pour $\frac{1}{p} \geqslant q_k$, il existe au moins k disques minimaux à bord libre plongés dans $\mathcal{E}_p$. On s'attend à ce que cet ensemble de disques se plonge par première et j-ème valeur propre de Steklov pour $1 \leqslant j \leqslant k$.

On peut envisager ces questions par optimisation de combinaisons de la première et de la k-ème valeur propre de Steklov. Ici, une difficulté supplémentaire est de montrer que l'immersion (à points de branchement) a bien lieu dans $\mathbb{R}^3$ et qu'elle est plongée alors que les k-èmes fonctions propres peuvent avoir beaucoup de domaines nodaux. Il faut bien choisir les symétries du problème. On peut aussi imaginer une méthode non variationnelle qui suit les métriques critiques le long du paramètre t pour la fonction $h_{s,t}$ qui définit la combinaison de valeurs propres. C'est un bon objet d'étude pour trouver de nouvelles méthodes à la création de points critiques de fonctionnelles spectrales.

En terme d'inégalités spectrales, on s'attend à une inégalité généralisée de Weinstock

$$\bar{\sigma}_1(\mathbb{D}, \cdot)^{-1} + t\bar{\sigma}_2(\mathbb{D}, \cdot)^{-1} \geqslant \begin{cases} \frac{1+t}{2\pi} \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \frac{\sqrt{t}}{\pi} \text{ si } 1 \leqslant t \leqslant 3 \end{cases}$$

où la valeur pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ vient directement de l'inégalité de [HP68] et est atteinte sur les disques euclidiens et la valeur pour $1 \leqslant t \leqslant 3$ est conjecturale et l'égalité est atteinte pour les ellipses (E_t, g_t). Pour $t > 3$, la Proposition III.1.7 montre que le minimum est forcément atteint pour un disque minimal à bord libre non plan dans un ellipsoïde. De manière plus générale, les ellipses critiques du Théorème III.1.5 donnent des candidats aux bornes optimales de fonctionnelles spectrales.

Bien sûr, des questions similaires se posent en changeant la topologie de la surface. D'un point de vue plus général, la construction de surfaces minimales par optimisation équivariante est actuellement donnée par plusieurs approches, chacune ayant son avantage. Comme on l'a vu, pour le moment, seule la méthode de [Pet25d, Pet24a] fonctionne dans le cas de combinaisons de valeurs propres et seule la méthode de [KKMS24] basée sur la théorie de [KS23] fonctionne dans le cas non orientable. Par ailleurs, la démonstration d'inégalités strictes sur des fonctionnelles spectrales par recollement d'anses dans le cas sans bord ou de bandes dans le cas à bord s'adapte très naturellement au cadre équivariant avec la méthode qui utilise le principe variationnel d'Ekeland.

Chapitre IV

Valeurs propres d'opérateurs conformément covariants

Ce chapitre synthétise [HPP25]. Il traite de l'optimisation de valeurs propres d'opérateurs GJMS (Graham-Jenne-Sparkling-Mason [GJMS92]) dans une classe conforme de métriques sur une variété riemannienne compacte de dimension $n \geqslant 3$. Parmi ces opérateurs notés P_g^s d'ordre $2s$ où $2s < n$, le modèle est le Laplacien conforme sur des variétés riemanniennes de dimension $n \geqslant 3$ pour $s = 1$. Comme on l'a vu dans le Chapitre I, l'optimisation de la première valeur propre du Laplacien conforme est équivalent à résoudre le problème de Yamabe. Par ailleurs, au-delà de l'intérêt qu'elle suscite en géométrie spectrale, l'optimisation des valeurs propres suivantes permet la construction de solutions d'un système de type Yamabe, et en particulier parfois de solutions nodales de l'équation de Yamabe. De la même façon, l'optimisation des valeurs propres de P_g^s pour des ordres $2s$ plus grands est reliée à des problèmes de Q-courbure qui généralisent le problème de Yamabe. Dans [HPP25], on donne un cadre général de travail et de nombreux nouveaux résultats, améliorant de manière significative les précédents travaux sur le sujet [AH06, GPA22].

IV.1 Opérateurs GJMS

IV.1.1 Introduction aux opérateurs GJMS

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geqslant 3$. Soit $s \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que $s < \frac{n}{2}$. On note P_g^s l'opérateur GJMS d'ordre $2s$ sur M. Cet opérateur différentiel sur M, a été introduit par Graham-Jenne-Sparkling-Mason [GJMS92]. Il est conformément covariant au sens suivant : si $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$ et $\hat{g} = u^{\frac{4}{n-2s}} g$ est une métrique conforme à g,

$$P_{\hat{g}}^s(f) = u^{-\frac{n+2s}{n-2s}} P_g^s(uf) \quad \text{pour tout } f \in C^\infty(M). \tag{IV.1}$$

Les opérateurs P_g^s sont auto-adjoints dans $L^2(M)$ (voir par exemple [GZ03]) et leur terme dominant est la s-ème puissance du Laplacien Δ_g : précisément (voir encore [GJMS92]) on a

$$P_g^s = \Delta_g^s + A_g^s \tag{IV.2}$$

où $\Delta_g = -\mathrm{div}_g(\nabla \cdot)$ et où A_g^s est un opérateur différentiel à coefficients de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'ordre $2s - 1$ qui permet la covariance conforme de P_g^s. Si $s = 1$ et $n \geq 3$, P_g^1 est le

Laplacien conforme

$$P_g^1 = \Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g,$$

où S_g est la courbure scalaire de (M, g). Si $s = 2$ et $n \geq 5$, P_g^2 est l'opérateur de Paneitz-Branson [Bra87, Pan08], qui s'écrit

$$P_g^2 u = \Delta_g^2 u - \mathrm{div}_g \left[\left(a_n S_g g - \frac{4}{n-2} \mathrm{Ric}_g \right) (\nabla u, \cdot) \right] + \frac{n-4}{2} Q_g u$$

pour $u \in C^\infty(M)$. Ici, $a_n = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}$, Ric_g est le tenseur de Ricci de (M, g) et Q_g est appelée la Q-curvature dont l'expression est

$$Q_g = \frac{1}{2(n-1)} \Delta_g S_g + \frac{n^3 - 4n^2 + 16n - 16}{8(n-1)^2(n-2)^2} S_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2} |\mathrm{Ric}_g|_g^2.$$

On trouve une expression de P_g^3 dans [Juh13], mais des formules explicites pour $P_g^s, s \geq 4$, dans le cas de métriques g générales n'existe pas : les termes d'ordre inférieur dans (IV.2) deviennent exponentiellement complexes en fonction de la géométrie de (M, g). Des formules de récurrences existent dans [Juh13]. De plus, une formule explicite existe si on suppose que (M, g) est une variété Einstein : Il est montré dans Fefferman-Graham [FG12, Proposition 7.9] que si $\mathrm{Ric}(g) = \frac{S}{n} g$, alors

$$P_g^s = \prod_{j=1}^{s} \Big(\Delta_g + \frac{(n+2j-2)(n-2j)}{4n(n-1)} S \Big). \tag{IV.3}$$

IV.1.2 Un problème de continuation unique

Comme on l'a identifié dans le Chapitre I, l'hypothèse suivante de continuation unique est requise dans la plupart de nos résultats :

$$\forall \varphi \in \mathrm{Ker}\,(P_g^s); |\varphi^{-1}(\{0\})| > 0 \Rightarrow \varphi = 0 \tag{IV.4}$$

C'est crucial pour définir des valeurs propres généralisées $\lambda_k(\beta)$ lorsque $\beta \in L^{\frac{n}{2s}}(M) \backslash \{0\}$ est une fonction seulement positive. L'hypothèse (IV.4) est bien sûr satisfaite si le noyau est trivial $\mathrm{Ker}\,(P_g^s) = \{0\}$. Quand $\mathrm{Ker}\,(P_g^s) \neq \{0\}$, (IV.4) garantit qu'un élément non nul de $\mathrm{Ker}\,(P_g^s)$ s'annule sur un ensemble de mesure nulle de M. La littérature, fournit tout de même plusieurs autres cas où cette hypothèse est satisfaite :

Proposition IV.1.1 ([HPP25]). *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 3$ et soits $\in \mathbb{N}^*$, avec $2s < n$. On suppose que l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :*
— $s = 1$
— $s \geq 1$ *et* $\mathrm{Ker}\,(P_g^s) = \{0\}$
— $s \geq 1$ *et M et g sont analytiques*
— $s \geq 1$ *et (M, g) est locallement conformément Einstein.*
Alors P_g^s satisfait (IV.4).

Le cas locallement conformément Einstein couvre le cas localement conformément plat.

L'hypothèse (IV.4) est aussi sans doute vérifiée pour toute variété (M, g), telle que $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $2s < n$. En effet, par covariance conforme (IV.1) de P_g^s, l'ensemble des zéros des éléments du noyau est un invariant conforme de (M, g), et c'est suffisant de montrer (IV.4) pour n'importe quelle métrique fixée de $[g]$. Au voisinage d'un point de M, et quitte à changer conformément g, on peut utiliser les coordonnées normales conformes (voir [LP87]) où $\det g \equiv 1$. Dans ces coordonnées P_g^s s'écrit $P_g^s = \Delta_g^s + T$ où T est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant 2s-2$: (voir par exemple [MV20, Equation (2.7)]). Dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$ un résultat d'unique continuation pour les operateurs polyharmoniques (voir [Pro60, Lin07]) stipule que des solutions u de $\Delta_\xi^s u + Tu = 0$ dans une boule B qui s'annulent à l'ordre infini en un point doit satisfaire $u = 0$ dans B à la condition que T est opérateur différentiel à coefficients réguliers T d'ordre $\leq [\frac{3s}{2}]$. Ainsi, on s'attend au même résultat pour P_g^s sous les hypothèses identifiées par [Lin07, Pro60], c'est à dire $2s-2 \leq [\frac{3s}{2}]$, ce qui est équivalent à $s \in \{1, 2, 3, 4\}$. L'analyse dans [Lin07, Pro60] est seulement écrite pour le Laplacien plat mais les estimées de Carleman qui apparaissent dans ces papiers devraient s'adapter à un opérateur de Laplace-Beltrami général : c'est ce qu'il faut vérifier.

IV.2 Théorie générale

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geqslant 3$, et $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $s < \frac{n}{2}$, pour noter P_g^s l'opérateur GJMS d'ordre $2s$ sur M. Comme M est compacte, le spectre de P_g^s est discret et les valeurs propres s'écrivent

$$\lambda_k(g) = \inf_{\substack{V \subset H^s(M) \\ \dim V = k}} \max_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\int_M v P_g^s v \, dv_g}{\int_M v^2 \, dv_g}.$$

On pose

$$k_- = \max\left\{k \geqslant 1, \lambda_k(g) < 0\right\} \text{ et } k_+ = \min\left\{k \geqslant 1, \lambda_k(g) > 0\right\}.$$

k_+ et k_- sont invariant conformes (voir Chapitre I ou [CGJP14, ES14]) et ne dépendent que de $[g]$. On a alors $\dim \mathrm{Ker}\,(P_g^s) = k_+ - k_- - 1$ et si $\lambda_1(g) \geqslant 0$, on écrit par convention $k_- = 0$.

On s'intéresse à la fonctionnelle

$$h \in [g] \mapsto \lambda_k(h) Vol(M, h)^{\frac{2s}{n}}$$

pour $k \geq 1$ donné. On observe d'abord que

$$\begin{aligned} \sup_{h \in [g]} \lambda_k(h) Vol(M, h)^{\frac{2s}{n}} &= +\infty \quad \text{si} \quad k \geqslant k_+, \\ \inf_{h \in [g]} \lambda_k(h) Vol(M, h)^{\frac{2s}{n}} &= -\infty \quad \text{si} \quad k \leqslant k_-. \end{aligned} \tag{IV.5}$$

Ce résultat est montré dans [HPP25] (c'est le Théorème I.1.3 pour le Laplacien conforme) en combinant les résultats principaux de [AJ12] et [CM24]. Ainsi, avec (IV.5) on ne considère que la minimisation des valeurs propres strictement positives [1] et la maximisation

1. Ce constat peut paraître troublant quand on sait que c'est précisemment l'inverse qu'il faut faire pour le Laplacien en dimension 2. On peut l'expliquer par une différence fondamentale entre les lois de covariance conforme des opérateurs GJMS pour $n = 2s$ et celle des opérateurs GJMS pour $n > 2s$. En terme de fonctionnelle spectrale, c'est la différence de choix de renormalisation de β par la norme L^1 ou une norme L^p pour $p > 1$ dans IV.7

des valeurs propres strictement négatives de P_h^s pour $h \in [g]$:

$$\Lambda_k^s(M,[g]) = \begin{cases} \inf\limits_{h\in[g]} \lambda_k(h)Vol(M,h)^{\frac{2s}{n}} & \text{si} \quad k \geqslant k_+, \\ \sup\limits_{h\in[g]} \lambda_k(h)Vol(M,h)^{\frac{2s}{n}} & \text{si} \quad k \leqslant k_-. \end{cases} \tag{IV.6}$$

On appelle ici $\Lambda_k^s(M,[g])$ la *k-ème valeur propre conforme* de $(M,[g])$. Si $k_+ - k_- \geq 2$ et $k_- < k < k_+$ on définit $\Lambda_k(M,[g]) = 0$. Pour tous $k \geq 1$, $\Lambda_k^s(M,[g])$ est un invariant conforme de (M,g). Le but est de déterminer des conditions pour lesquelles $\Lambda_k^s(M,[g])$ est atteint ou n'est pas atteint, et de déterminer les métriques extrémales si elles existent.

IV.2.1 Valeurs propres généralisées

Dans le même esprit que dans le Chapitre I, on cherche à définir l'espace variationnel de travail. Par ailleurs, contrairement à la dimension 2 où les métriques extrémales du Laplacien ne peuvent présenter qu'un nombre fini de singularités coniques d'angle un multiple de 2π, les singularités des métriques extrémales du Laplacien conforme P_g^1, (voir [AH06, GPA22]) sont bien plus pathologiques [2]. Ainsi, dans [HPP25], on généralise la définition des valeurs propres aux fonctions $\beta \in L^{\frac{n}{2s}}(M)\backslash\{0\}$ positives. Pour $k \geq 1$, on pose

$$\bar{\lambda}_k(\beta) = \inf_{V\in\mathcal{G}_k^\beta(C^\infty(M))} \max_{v\in V\backslash\{0\}} \frac{\int_M vP_g^s v\, dv_g}{\int_M \beta v^2\, dv_g} \left(\int_M \beta^{\frac{n}{2s}} dv_g\right)^{\frac{2s}{n}}. \tag{IV.7}$$

Ici, $\mathcal{G}_k^\beta(C^\infty(M))$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels $V = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k)$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $\beta^{\frac{1}{2}}v_1, \cdots, \beta^{\frac{1}{2}}v_k$ sont linéairement indépendantes. Comme on ne suppose pas $\beta > 0$ presque partout dans M, $\lambda_k(\beta)$ peut valoir $-\infty$ quand $k \leq k_-$. On dit que $\bar{\lambda}_k(\beta)$ est la *k-ème valeur propre généralisée renormalisée* associée à β. En effet géométriquement, si $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$, les propriétés de covariance conforme de P_g^s donnent

$$\lambda_k(u^{\frac{4}{n-2s}}g) = \inf_{V\subset H^s(M),\dim V=k} \max_{v\in V\backslash\{0\}} \frac{\int_M vP_g^s v\, dv_g}{\int_M u^{\frac{4s}{n-2s}}v^2\, dv_g}.$$

Ainsi $\bar{\lambda}_k(\beta)$ doit être vue comme la k-ème valeur propre de P_h^s pour la métrique $h = \beta^{\frac{1}{s}}g$ multipliée par $Vol(h)^{\frac{2s}{n}}$. On prove dans [HPP25]

$$\Lambda_k^s(M,[g]) = \begin{cases} \inf\limits_{\beta\in L^{\frac{n}{2s}}(M)\backslash\{0\},\beta\geq 0} \bar{\lambda}_k(\beta) & \text{si } k \geqslant k_+, \\ \sup\limits_{\beta\in L^{\frac{n}{2s}}(M)\backslash\{0\},\beta\geq 0} \bar{\lambda}_k(\beta) & \text{si } k \leqslant k_-. \end{cases} \tag{IV.8}$$

On dira alors que $\Lambda_k^s(M,[g])$ est *atteint* s'il existe $\beta \in L^{\frac{n}{2s}}(M)\backslash\{0\}$, $\beta \geq 0$, tel que

$$\Lambda_k^s(M,[g]) = \bar{\lambda}_k(\beta).$$

On peut aussi dire que $\Lambda_k^s(M,[g])$ est atteint en la métrique généralisée $\beta^{\frac{1}{s}}g$.

2. L'espace singulier correspond aux zéros du facteur conforme : c'est une intersection d'ensembles nodaux de fonctions propres comme on l'a vu au Chapitre I. Sans résultat de continuation unique ou sans théorème de Courant dans le cas GJMS général, l'ensemble singulier est encore moins bien compris.

Remarque IV.2.1. On rappelle ici que la plupart des résultats reposent sur l'hypothèse (IV.4). Dans [HPP25], sa nécessité est identifiée pour montrer que $\bar{\lambda}_k(\beta)$ admet des fonctions propres lorsqu'on autorise β à s'annuler sur un ensemble de mesure non nulle. Pour cela, on a besoin du lemme I.5.2 adapté au cas GJMS. Le Chapitre I montre bien que l'existence des fonctions propres est primordiale pour formuler des équations d'Euler-Lagrange sur les métriques extrémales ou presque extrémales.

IV.2.2 Résultats théoriques

Lorsque $k \leq k_-$, on maximise les valeurs propres généralisées négatives. Cela donne un résultat d'existence général :

Théorème IV.2.2. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n > 2s$. Soit P_g^s l'opérateur GJMS d'ordre $2s$ dans M et on suppose qu'il satisfait* (IV.4) *et $k_- \geq 1$. Soit $k \leq k_-$ un entier. Alors $\Lambda_k^s(M,[g]) < 0$ et $\Lambda_k(M,[g])$ est atteint en une métrique généralisée $\beta^{\frac{1}{s}} g$, où β est une fonction positive, $\beta \in C^{0,\alpha}(M)$ pour un certain $0 < \alpha < 1$ et β est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\beta^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.*

Le Théorème IV.2.2 a été prouvé dans le cas $s = 1$ et $k = 2$ dans [GPA22], sous l'hypothèse supplémentaire $\operatorname{Ker}(P_g^s) = \{0\}$. Nous ne supposons que (IV.4) et donc quand $s = 1$ et $k \leq k_-$ nous n'avons pas besoin de supposer que P_g^1 est sans noyau. $\Lambda_k^s(M,[g]) < 0$ est une conséquence de notre analyse (adapter aux valeurs propres généralisées la démonstration du Théorème I.1.4). On peut reconstituer la démonstration du Théorème IV.2.2 en adaptant la Proposition I.5.1 du présent mémoire aux opérateurs GJMS.

Lorsque $k \geq k_+$ on minimise les valeurs propres positives. Ce cas est plus difficile à cause de possibles phénomènes de concentration. Pour énoncer un résultat satisfaisant, on introduit un nouvel invariant conforme : en notant la sphère ronde $(\mathbb{S}^n, g_0)$, on peut simplifier l'écriture de $\Lambda_k^s(\mathbb{S}^n, [g_0])$ en $\Lambda_k^s(\mathbb{S}^n)$. Pour $k \geqslant k_+$ et $s \in \mathbb{N}^*$ on définit alors

$$X_k^s(M,[g]) = \min\left\{ \left(\Lambda_{\ell_0}^s(M,[g])^{\frac{n}{2s}} + \Lambda_{\ell_1}^s(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2s}} + \cdots + \Lambda_{\ell_r}^s(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2s}}\right)^{\frac{2s}{n}} \right\}, \tag{IV.9}$$

Où le minimum est pris parmi l'ensemble des indices $r, \ell_0 \in \mathbb{N}$ et $\ell_1, \cdots, \ell_r \in \mathbb{N}^*$ tels que

1. $\ell_0 \in \{0\} \cup \{k_+, \cdots, k-1\}$, où par convention, $\Lambda_0^s(M,[g]) = 0$;
2. $\ell_0 + \cdots + \ell_r = k$ si $\ell_0 \geqslant k_+$ et $\ell_1 + \cdots + \ell_r = k - k_+ + 1$ si $\ell_0 = 0$;
3. $\Lambda_{\ell_i}(\mathbb{S}^n)$, $1 \leq i \leq r$ sont atteints, et $\Lambda_{\ell_0}^s(M,[g])$ est atteint si $\ell_0 > 0$.

On établit alors que $\Lambda_k^s(M,[g])$, pour $k \geq k_+$, est atteint sous l'hypothèse qu'il est strictement inférieur à $X_k^s(M,[g])$:

Théorème IV.2.3. *Soit (M,g) une variété compacte de dimension $n \geq 3$ et soit $s \in \mathbb{N}^*$, $s < \frac{n}{2}$. Soit P_g^s l'opérateur GJMS d'ordre $2s$ dans M. Soit $k \geqslant k_+$ un entier. Alors :*

1. *On a $\Lambda_k^s(M,[g]) \leqslant X_k^s(M,[g])$.*
2. *On suppose que P_g^s satisfait* (IV.4)*. Alors $\Lambda_k(M,[g]) > 0$. De plus, si $\Lambda_k^s(M,[g]) < X_k^s(M,[g])$ alors $\Lambda_k^s(M,[g])$ est atteint en une métrique généralisée $\beta^{\frac{1}{s}} g$, où β est une fonction positive $\beta \in C^{0,\alpha}(M)$ pour un certain $0 < \alpha < 1$ et β est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\beta^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.*

Comme précédemment, $\Lambda_k^s(M,[g]) > 0$ est une conséquence de notre analyse (voir [HPP25] ou adapter la démonstration du Théorème I.1.4 au cas des valeurs propres généralisées des opérateurs GJMS). On peut donc écrire sous l'hypothèse (IV.4) :

$$\Lambda_k^s(M,[g]) = 0 \Longleftrightarrow k_- < k < k_+. \tag{IV.10}$$

La condition $\Lambda_k^s(M,[g]) < X_k^s(M,[g])$ dans le théorème IV.2.3 peut se comparer aux résultats [Pet14a, Pet18, Pet25d, NS15, KS23] pour le Laplacien en dimension 2 (voir Chapitre II). Dans la preuve du Théorème IV.2.3 l'invariant $X_k^s(M,[g])$ apparaît comme un seuil d'énergie pour une suite minimisante de $\Lambda_k^s(M,[g])$ bien construite : plus précisément, l'hypothèse $\Lambda_k^s(M,[g]) < X_k^s(M,[g])$, permet d'empêcher les phénomènes d'explosion en arbre de bulles. Le théorème IV.2.3 généralise de façon significative tous les résultats précédents sur (IV.6) qui étaient connus dans des cas spécifiques : dans [AH06] lorsque $s=1$, $k=2$ et quand $\lambda_1(g) \geq 0$, dans [ES14] lorsque $s=1$, $k=2$ et $\lambda_1(g) < 0$, et dans [BB10] lorsque $s=2$, $k=2$, $\lambda_1(g) \geq 0$ et (M,g) est une variété Einstein. Le théorème IV.2.3 implique aussi les résultats de [SX20]. La nouveauté de l'approche du Théorème IV.2.3 est que $X_k(M,[g])$ ne fait intervenir que les invariants $\Lambda_\ell^s(M,[g])$ et $\Lambda_\ell^s(\mathbb{S}^n)$ d'ordre inférieurs qui sont eux-mêmes atteints. Cette observation permet de déduire par récurrence de nombreux nouveaux résultats d'existence et d'inexistence de métriques généralisées extrémales pour $\Lambda_k(M,[g])$.

IV.3 Résultats d'existence, d'inexistence et calculs d'invariants conformes

On donne ici les nombreuses conséquences des Théorèmes IV.2.2 et IV.2.3. On obtient des résultats d'existence et d'inexistence pour les invariants $\Lambda_k^s(M,[g])$ (y compris lorsque (M,g) est la sphère ronde) ainsi que la structure de l'équation d'Euler-Lagrange (et son utilité) pour les métriques généralisées extrémales de $\Lambda_k^s(M,[g])$.

IV.3.1 Simplicité lorsque $k = k_-$ et $k = k_+$.

Pour les cas $k = k_-$ et $k = k_+$ dans les Théorèmes IV.2.2 et IV.2.3, qui correspondent à la valeur propre strictement négative la plus grande et la valeur propre strictement positive la plus petite nous remarquons une propriété particulière.

En effet, si $\bar{\lambda}_k^s(M,[g])$ est atteint, cette valeur propre est simple en ses métriques extrémales et les résultats des Théorèmes IV.2.2 et IV.2.3 sont plus précis. C'est dû à la Proposition I.2.3 appliquée aux opérateurs GJMS [3] et aux trous spectraux $\bar{\lambda}_{k_+}(\beta) > 0 \geqslant \bar{\lambda}_{k_+-1}(\beta)$ lorsque β est minimale pour $\bar{\lambda}_{k_+}^s(M,[g])$ et $\bar{\lambda}_{k_-}(\beta) < 0 \leqslant \lambda_{k_-+1}(\beta)$ lorsque β est maximale pour $\bar{\lambda}_{k_-}^s(M,[g])$. [4] On donne plus tard (voir Théorème IV.3.7) une conséquence qui utilise également les subtilités de la Proposition I.2.3 (ou du Théorème I.2.7). Le cas $k = k_-$ donne :

3. C'est aussi réécrire l'énoncé du Théorème I.2.7 avec le Laplacien conforme au cadre plus général des GJMS.

4. C'est un fait général : pour avoir la conclusions du Corollaire IV.3.1 il suffit que β soit un maximum local de $\bar{\lambda}_k(\beta)$ et que $\bar{\lambda}_k(\beta) < \bar{\lambda}_{k+1}(\beta)$ ou que β soit un minimum local de $\bar{\lambda}_k(\beta)$ et que $\bar{\lambda}_k(\beta) > \bar{\lambda}_{k-1}(\beta)$. Ces conditions sont automatiques pour $k = k_+$ et $k = k_-$ par (IV.10). Cette condition avait aussi été exploitée de manière similaire dans [Amm09] pour la minimisation de la première valeur propre de Dirac.

Corollaire IV.3.1. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $n > 2s$. Soit P_g^s l'opérateur GJMS d'ordre $2s$ dans M dont on suppose qu'il vérifie* (IV.4) *et $k_- \geq 1$. Alors l'espace propre correspondant à $\Lambda_{k_-}^s(M, [g])$ est de dimension 1 et il existe une fonction propre $\varphi \in C^{2s,\alpha}(M)$, $0 < \alpha < 1$, qui satisfait $\|\varphi\|_{L^{\frac{2n}{n-2s}}} = 1$ et*

$$P_g^s \varphi = \Lambda_{k_-}^s(M, [g]) |\varphi|^{\frac{4s}{n-2s}} \varphi \quad in \quad M.$$

et elle est associée à la métrique généralisée $|\varphi|^{\frac{4}{n-2s}} g$ qui atteint $\Lambda_{k_-}^s(M, [g])$. Si de plus $s = 1$ et $k_- \geqslant 2$, φ change de signe.

Si $s = 1, k_- \geq 2$ et P_g^1 satisfait (IV.4), le Corollaire IV.3.1 montre en particulier qu'il existe des solutions qui changent de signe pour les équations de courbure scalaire prescrite strictement négative constante sur M. Cela généralise des résultats de [GPA22]. Le cas $k = k_+$ est similaire sous l'hypothèse que $\Lambda_{k_+}^s(M, [g])$ est atteint :

Corollaire IV.3.2. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n > 2s$. Soit P_g^s l'opérateur GJMS d'ordre2s sur M et on suppose qu'il satisfait* (IV.4). *On suppose que $\Lambda_{k_+}^s(M, [g]) < \Lambda_1^s(\mathbb{S}^n)$. Alors $\Lambda_{k_+}^s(M, [g])$ est atteint, et son premier espace propre généralisé est de dimension* 1. *De plus, il existe une fonction propre $\varphi \in C^{2s,\alpha}(M)$, $0 < \alpha < 1$, qui satisfait $\|\varphi\|_{L^{\frac{2n}{n-2s}}} = 1$ et*

$$P_g^s \varphi = \Lambda_{k_+}^s(M, [g]) |\varphi|^{\frac{4s}{n-2s}} \varphi \quad in \quad M.$$

et elle est associée à la métrique généralisée $|\varphi|^{\frac{4}{n-2s}} g$ qui atteint $\Lambda_{k_+}^s(M, [g])$. Si de plus $s = 1$ et $k_+ \geqslant 2$, alors φ change de signe.

Les fonctions φ obtenues dans les IV.3.1 et IV.3.2 satisfont les équations de Q-courbure constante prescrite (à changement de signe possible pour φ). Ce n'est pas surprenant puisque comme on l'a vu dans le Chapitre I (Théorème I.1.5) pour $k = 1$ et $s = 1$, optimiser $\Lambda_1^1(M, [g])$ est équivalent au problème de minimisation de Yamabe. De manière générale, dans le cas $s \geqslant 1$, lorsque $k_+ = 1$, minimiser $\Lambda_1^s(M, [g])$ est équivalent au problème de Yamabe pour la Q-courbure associée à P_g^s (voir [HPP25]) [5]. On peut donc voir les problèmes d'optimisation de $\Lambda_k^s(M, [g])$ comme une généralisation du problème de Yamabe pour la Q-curvature, et les Théorèmes IV.2.2 et IV.2.3 montrent l'analogie directe : les valeurs propres négatives sont toujours atteintes (lorsque P_g^s satisfait (IV.4)), et les valeurs propres strictement négatives le sont si $\Lambda_k^s(M, [g]) < X_k^s(M, [g])$, ce qui est une généralisation de la célèbre condition de seuil d'Aubin pour l'équation de Yamabe [Aub76]. Cette remarque fournit une autre motivation pour étudier les invariants $\Lambda_k^s(M, [g])$.

Ces résultats de simplicité de $\Lambda_{k_\pm}^s(M, [g])$ sont spécifiques aux problèmes des valeurs propres de P_g^s. Comme on l'a vu dans le Chapitre I, si une k-ème valeur propre du Laplacien est maximisée par une métrique riemannienne dans une classe conforme d'une variété compacte sans bord de dimension 2, celle-ci n'est jamais simple pour cette métrique (sauf si c'est la valeur propre nulle). [6]

5. Montrer l'analogue dans le cas $k_- \geqslant 1$ est possible s'il y a unicité de l'ensemble des minimiseurs du problème de Q-courbure strictement négative pour P_g^s, comme dans la preuve du Théorème I.1.5 pour le Laplacien conforme.

6. Intuitivement, ceci peut encore s'expliquer par la différence fondamentale entre la covariance conforme des opérateurs GJMS pour $n > 2s$ et celle pour $n = 2s$ et sa conséquence : le fait qu'on minimise les valeurs propres strictement positives dans un cas induit des trous spectraux au moins pour le bas du spectre ; le fait qu'on les maximise dans l'autre cas encourage au contraire leur multiplicité.

IV.3.2 Valeurs propres conformes de la sphère

Les valeurs propres conformes $\Lambda_k^s(\mathbb{S}^n)$ de la sphère ronde $(\mathbb{S}^n, g_0)$ sont fondamentales car dans la (I.9) et le Théorème IV.2.3, elles interviennent dans les seuils d'énergies qui décident de l'existence de métriques extrémales pour $\Lambda_k^s(M,[g])$ pour n'importe quelle classe conforme sur une variété (M,g). Sur $(\mathbb{S}^n, g_0)$, $\lambda_1(g_0) > 0$: on a donc $k_- = 0$, $k_+ = 1$, et (IV.4) a lieu pour $P_{g_0}^s$. Pour tous $s \geq 1$, la covariance conforme de $P_{g_0}^s$, $\Lambda_1^s(\mathbb{S}^n)$ est la constante de Sobolev optimale dans $\mathbb{R}^n$ et est atteint pour la métrique ronde de $[g_0]$ (voir [HPP25]). Par contre, à l'instar des résultats principaux de [GNP09, Pet14b, BH19, GL21b, FL22, Kim22] qui optimisent des deuxièmes valeur propre non nulle dans de nombreux contextes différents, $\Lambda_2^s(\mathbb{S}^n)$ n'est jamais atteint

Théorème IV.3.3. *Soit $n \geq 3$ et $1 \leq s < \frac{n}{2}$. Alors*

$$\Lambda_2^s(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2s}} = 2\Lambda_1^s(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2s}}$$

et $\Lambda_2^s(\mathbb{S}^n)$ n'est pas atteint.

Le Théorème IV.3.3 ainsi que ce qu'il se passe dans le cas analogue de la maximisation des valeurs propres du Laplacien sur $\mathbb{S}^2$ (voir (II.7)) pourraient laisser penser que l'ensemble des entiers $k \geq 1$ tels que $\Lambda_k^s(\mathbb{S}^n)$ est atteint se réduit à $\{1\}$. Pourtant, de manière surprenante, c'est toujours faux en grande dimension :

Théorème IV.3.4. *Soit $s \geq 1$ et on suppose que $n \geq 2s+5$. Il existe $k \in \{3, \cdots, n+1\}$ tel que $\Lambda_k^s(\mathbb{S}^n)$ est atteint. De plus, $\Lambda_k^s(\mathbb{S}^n)$ n'est pas atteint en la métrique ronde.*

On ne sait rien dire pour $2s < n \leq 2s+5$. Pour tout $n \geq 2s+5$, l'indice minimal $k \geqslant 3$ pour lequel $\Lambda_k^s(\mathbb{S}^n)$ est atteinte reste inconnu. Néanmoins, nous montrons l'existence d'une borne indépendante de $n \geq 2s+5$ sur cet indice (voir [HPP25]).

IV.3.3 Extrémales pour $\Lambda_{k_+}^s(M,[g])$.

On décrit maintenant le cas $k = k_+$ de la plus petite valeur propre strictement positive. Si (M,g) est une variété riemannienne compacte sans bord, nous donnons une condition suffisante sur (M,g) pour que $\Lambda_{k_+}^s(M,[g])$ soit atteinte. On suppose d'abord que P_g^s est sans noyau :

Théorème IV.3.5. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$ and (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n > 2s$. Soit P_g^s l'opérateur GJMS d'ordre $2s$ sur M. On suppose que* $\operatorname{Ker} P_g^s = \{0\}$ *et que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*
- *$n \geq 2s+4$ et (M,g) n'est pas localement conformément plat*
- *$[2s+1 \leq n \leq 2s+3$ ou (M,g) est localement conformément plat$]$ et il existe $\xi \in M$ tel que $m(\xi) > 0$, où $m(\xi)$ est la masse de la fonction de Green de P_g^s en ξ.*

Alors $\Lambda_{k_+}^s(M,[g]) < \Lambda_1^s(\mathbb{S}^n)$ et $\Lambda_{k_+}^s(M,[g])$ est atteint.

Lorsque le Théorème IV.3.5 s'applique, le Corollaire IV.3.2 montre que $\Lambda_{k_+}^s(M,[g])$ est simple. Lorsque $2s+1 \leq n \leq 2s+3$ ou lorsque (M,g) est localement conformément plate, la *masse* en $\xi \in M$ est définie comme le terme constant dans le développement asymptotique de la fonction de Green de P_g^s en ξ (voir par exemple [HPP25] pour sa définition). Lorsque $k_+ \geq 2$, le Théorème IV.3.5 est nouveau sauf dans les cas $s = 1$ et $k_+ = 2$ déjà montrés par [ES14].

Lorsque $k_+ = 1$, c'est à dire si P_g^s est coercif, le Théorème IV.3.5 est équivalent au problème de Yamabe pour la Q-courbure de P_g^s (voir [HPP25]). Pour $s = 1$, cette équivalence est aussi vraie dans le cas $k_+ \geqslant 2$ (voir Théorème I.1.5). Ainsi, c'est déjà connu pour l'équation de Yamabe lorsque $s = 1$ par [Aub76, Sch84], pour l'opérateur de Paneitz lorsque $s = 2$ par [DHL00, ER02, GHL16, GM15, HY16] et pour $s \geq 2$ par [MV20]. Le théorème IV.3.5 est nouveau pour toutes les valeurs propres $k_+ \geq 1$: l'approche par fonction test à la Aubin est améliorée. Lorsque $k_+ = 1, s = 1$, en supposant $3 \leq n \leq 5$ ou (M, g) est localement conformément plat et non conforme à $(\mathbb{S}^n, g_0)$, le célèbre théorème de la masse positive ([SY79, LP87]) montre que la masse est strictement positive. Lorsque $s = 2$ et $5 \leq n \leq 7$ ou (M, g) est localement conformément plat la fonction de masse est strictement positive sur M dans le cas $k_+ = 1$, l'invariant de Yamabe de g est strictement positif, la Q-courbure est positive et (M, g) n'est pas conformément difféomorphe à $(\mathbb{S}^n, g_0)$, voir [HY16] (et des résultats précédents de [GM15, HR09, Mic11]). Aucun autre résultat de masse strictement positive n'est connu pour la fonction de Green de P_g^s sur M lorsque $s \geq 3$. Bien sûr, dans le Théorème IV.3.5 on n'a besoin que d'un point où la masse est strictement positive, on peut donc l'appliquer à de nombreux exemples spécifiques.

On suppose que le noyau de P_g^s n'est pas nécessairement trivial, ce qui est possible grâce au Théorème IV.2.3 sous l'hypothèse (IV.4). On a alors un résultat analogue au Théorème IV.3.5 :

Théorème IV.3.6. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et (M, g) une variété riemannienne de dimension $n > 2s$. Soit P_g^s l'opérateur GJMS d'ordre $2s$, et on suppose que* $\mathrm{Ker}\,(P_g^s) \neq \{0\}$. *On suppose que $n \geq 4s + 5$ et que (M, g) n'est pas conformément plat. Alors*

$$\Lambda_{k_+}^s(M, [g]) < \Lambda_1^s(\mathbb{S}^n, [g_0]).$$

Ainsi, si P_g^s satisfait (IV.4), *alors $\Lambda_{k_+}^s(M, [g])$ est atteint.*

Dans le cas où le noyau de P_g^s est non trivial les calculs de fonctions test deviennent plus compliqués pour $\Lambda_{k_+}^s(M, [g])$, c'est la raison pour laquelle les hypothèses du Théorème IV.3.6 sont plus fortes que pour le Théorème IV.3.5. Néanmoins, le Théorème IV.3.6 fournit le premier résultat d'existence pour des minimiseurs de $\Lambda_k^s(M, [g])$ avec $k \geq k_+$ dans le cas $\mathrm{Ker}\,(P_g^s) \neq \{0\}$, ce qui en fait aussi un résultat nouveau pour le Laplacien conforme $s = 1$.

IV.3.4 Autres résultats

On donne ici d'autres conséquences des Théorèmes IV.2.2 et IV.2.3. Le premier est la généralisation du trou spectral (IV.10) pour tous $k \geqslant k_+$ et $k \leqslant k-$:

Théorème IV.3.7. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$, (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $n > 2s$ st soit P_g^s l'opérateur GJMS d'ordre $2s$. On suppose que P_g^s satisfait* (IV.4). *Soit $k, k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $k < k'$ et tel que $\Lambda_k^s(M, [g])\Lambda_{k'}^s(M, [g]) \neq 0$. Alors $\Lambda_k^s(M, [g]) < \Lambda_{k'}^s(M, [g])$.*

Ce résultat et IV.10 montrent que la suite $(\Lambda_k^s(M, [g]))_{\{k \leqslant k_-\} \cup \{k \geqslant k_+\}}$ est strictement croissante. On n'a pas besoin que $\Lambda_k^s(M, [g])$ soit atteint pour obtenir le Théorème IV.3.7. On écrit ici la preuve du Théorème IV.3.7 car elle utilise de façon relativement succinte et nouvelle les finesses de plusieurs résultats théoriques précédemment énoncés dans ce mémoire.

Démonstration. On suppose que $k \geqslant k_+$, et on montre que $\Lambda^s_{k+1}(M,[g]) > \Lambda^s_k(M,[g])$. Le cas $k \leqslant k_-$ est plus simple car $\Lambda^s_k(M,[g])$ est toujours atteint dans ce cas (seul le Cas 1 ci-dessous sera utilisé). On suppose par l'absurde que $\Lambda^s_{k+1}(M,[g]) = \Lambda^s_k(M,[g])$.
Cas 1 : On suppose que $\Lambda_{k+1}(M,[g])$ est atteint en $\beta \in L^{\frac{n}{2s}}(M)\backslash\{0\}$, $\beta \geq 0$, avec $\|\beta\|_{L^{\frac{n}{2s}}} = 1$. Par définition de $\Lambda^s_k(M,[g])$,

$$\Lambda^s_k(M,[g]) \leqslant \lambda_k(\beta) \leqslant \lambda_{k+1}(\beta) = \Lambda^s_{k+1}(M,[g]) = \Lambda^s_k(M,[g]). \tag{IV.11}$$

Cela implique $\Lambda^s_k(M,[g]) = \lambda_k(\beta)$, et ainsi que $\Lambda^s_k(M,[g])$ est atteint, et que $\lambda_k(\beta) = \lambda_{k+1}(\beta)$. On contredit le Lemme I.2.10 (qui reste vrai en remplaçant L_g par P^s_g).
Cas 2 : On suppose que $\Lambda^s_{k+1}(M,[g])$ n'est pas atteint. Par le théorème IV.2.3, il existe des entiers $\ell_0, \cdots, \ell_r$ tels que

1. $\ell_0 \in \{0\} \cup \{k_+, \cdots, k\}$, où par convention, $\Lambda^s_0(M,[g]) = 0$;
2. $\ell_0 + \cdots + \ell_r = k+1$ si $\ell_0 \geqslant k_+$ et $\ell_1 + \cdots + \ell_r = k - k_+ + 2$ si $\ell_0 = 0$;
3. $\Lambda_{\ell_i}(\mathbb{S}^n)$, $1 \leq i \leq r$ sont atteints, et $\Lambda^s_{\ell_0}(M,[g])$ est atteint si $\ell_0 > 0$.

et

$$\Lambda^s_{k+1}(M,[g])^{\frac{n}{2s}} = \Lambda^s_{\ell_0}(M,[g])^{\frac{n}{2s}} + \Lambda^s_{\ell_1}(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2s}} + \cdots + \Lambda^s_{\ell_r}(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2s}}. \tag{IV.12}$$

Comme $\ell_0 < k+1$ on a $r \geqslant 1$, et en particulier $\ell_1 \geqslant 1$ et donc $\Lambda^s_{\ell'_1}(\mathbb{S}^n) > 0$. Avec $\Lambda^s_{k+1}(M,[g]) = \Lambda^s_k(M,[g])$ et (IV.12), on obtient

$$\Lambda^s_k(M,[g])^{\frac{n}{2s}} = \Lambda^s_{\ell_0}(M,[g])^{\frac{n}{2s}} + \Lambda^s_{\ell_1}(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2s}} + \cdots + \Lambda^s_{\ell_r}(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2s}} > \Lambda^s_{\ell_0}(M,[g])^{\frac{n}{2s}},$$

ce qui implique

$$\ell_0 \in \{0\} \cup \{k_+, \cdots, k-1\}. \tag{IV.13}$$

Pour $0 \leq i \leq$ on définit

$$\ell'_0 = \ell_0, \quad \ell'_1 = \ell_1 - 1 \quad \text{and} \quad \ell'_i = \ell_i \quad \text{if } 2 \leq i \leq r,$$

de sorte que par (IV.13), on a

1. $\ell'_0 \in \{0\} \cup \{k_+, \cdots, k-1\}$;
2. $\ell'_0 + \cdots + \ell'_r = k$ if $\ell_0 \geqslant k_+$ and $\ell'_1 + \cdots + \ell'_r = k - k_+ + 1$ if $\ell_0 = 0$.

Par simple calcul de fonctions tests à la Aubin, on a l'inégalité (voir [HPP25]) [7]

$$\Lambda^s_k(M,[g])^{\frac{n}{2s}} \leqslant \Lambda^s_{\ell'_0}(M,[g])^{\frac{n}{2s}} + \Lambda^s_{\ell'_1-1}(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2s}} + \cdots + \Lambda^s_{\ell'_r}(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2s}}.$$

Cette inégalité, l'hypothèse $\Lambda^s_{k+1}(M,[g]) = \Lambda^s_k(M,[g])$ et (IV.12) impliquent alors $\Lambda^s_{\ell'_1}(\mathbb{S}^n) \geqslant \Lambda^s_{\ell_1}(\mathbb{S}^n)$ dont on déduit

$$\Lambda^s_{\ell_1-1}(\mathbb{S}^n) = \Lambda^s_{\ell_1}(\mathbb{S}^n). \tag{IV.14}$$

Si $\Lambda^s_{\ell_1}(\mathbb{S}^n)$ était atteint, on obtient une contradiction comme dans (IV.11) en utilisant (IV.14) et le Lemme I.2.10. Ainsi $\Lambda^s_{\ell_1}(\mathbb{S}^n)$ n'est pas atteint mais cela contredit la définition de ℓ_1. On a donc démontré le Théorème IV.3.7. □

7. Il faut noter qu'ici, on n'utilise pas l'inégalité $\Lambda^s_k(M,[g]) \leqslant X_k(M,[g])$ du Théorème IV.2.3 car on ne sait pas si $\Lambda^s_{\ell'_1-1}(\mathbb{S}^n)$ est atteint. L'inégalité a aussi lieu si on ne demande pas que les invariants soient atteints pour les invariants qui apparaissent dans la formule de $X_k(M,[g])$

Le deuxième résultat concerne les opérateurs P_g^s coercifs, c'est à dire sur une variété riemannienne compacte (M,g) de dimension $n \geq 3$ on suppose que $\lambda_1(g) > 0$ (ou $k_+ = 1$). Bien sûr, dans ce cas $\mathrm{Ker}\,(P_g^s) = \{0\}$ et l'hypothèse (IV.4) est satisfaite. Si $s \geq 1$ et $n \geq 2s+5$, on note $k_n \in \{3, \cdots, n+1\}$ le plus petit indice k pour lequel $\Lambda_k^s(\mathbb{S}^n)$ est atteint. Son existence est donnée par le Théorème IV.3.4. Comme conséquence du Théorème IV.3.4 et une approche par récurrence permise par le Théorème IV.2.3 on montre qu'en grandes dimensions, $\Lambda_k^s(M,[g])$ est atteint pour tous $k < k_n$ lorsque $(M,[g])$ est non localement conformément plate et P_g^s est coercif :

Théorème IV.3.8. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$, (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n > 2s$ et soit P_g^s l'opérateur GJMS d'ordre $2s$ sur M. On suppose que $k_+ = 1$, $n \geq 2s+9$ et que (M,g) n'est pas localement conformément plat. Alors $\Lambda_k^s(M,[g])$ est atteint pour tous $k \leq k_n - 1$.*

Sous les hypothèses du Théorème IV.3.8, on déduit directement du Théorème IV.3.5 que $\Lambda_1^s(M,[g])$ est atteint. Comme $k_n \geq 3$, le Théorème IV.3.8 implique que si P_g^s est coercif, si (M,g) n'est pas localement conformément plat et si $n \geq 2s+9$, $\Lambda_1^s(M,[g])$ et $\Lambda_2^s(M,[g])$ sont atteints. Dans [PV24], les auteurs on montré que lorsque $s=1$, le Théorème IV.3.8 est optimal pour $k=2$. En effet, ils montrent que lorsque $3 \leq n \leq 10$, il existe un voisinage ouvert U de la métrique ronde g_0 de $\mathbb{S}^n$ en un sens fort tel que pour $g \in U$, $\Lambda_2^1(\mathbb{S}^n,[g])$ n'est jamais atteint et satisfait $\Lambda_2^1(\mathbb{S}^n,[g])^{\frac{n}{2}} = \Lambda_1^1(\mathbb{S}^n,[g])^{\frac{n}{2}} + \Lambda_1^1(\mathbb{S}^n)^{\frac{n}{2}}$.

IV.4 Perspectives

On identifie d'abord deux questions qui ne relèvent pas de la géométrie spectrale, mais plutôt de la structure des opérateurs GJMS. Le but est essentiellement d'étendre des propriétés bien comprises du Laplacien conforme aux opérateurs GJMS d'ordres supériéurs pour compléter mécaniquement notre cadre théorique et les applications. Le résultat de continuation unique (IV.4) est il vrai en toute généralité ? Peut-on énoncer un théorème de la masse positive pour tous les opérateurs P_g^s ?

On se concentre maintenant sur des questions typiques d'optimisation spectrale. L'importance du Théorème IV.2.3 est qu'il permet de jouer sur l'alternative suivante : soit $\Lambda_k(M,[g])$ est atteint pour un grand nombre d'entiers k et on peut travailler avec des métriques extrémales et leurs équations d'Euler-Lagrange associées (systèmes d'équations de type Yamabe généralisé en plusieurs sens : on autorise un système d'équations, ou une équation nodale, et on a l'analogue pour les problèmes de Q-courbure associés à P_g^s), soit $\Lambda_k(M,[g])$ n'est pas atteint et on obtient l'égalité $\Lambda_k(M,[g]) = X_k(M,[g])$ qui permet de calculer cet invariant en fonction des précédents qui sont atteints. Ce principe a été identifié dans ma thèse [Pet18, Pet19] pour les valeurs propres du Laplacien en dimension 2 (et plus généralement leurs combinaisons, voir le Chapitre II) pour être ensuite utilisé pour des résultats d'existence ou des calculs précis d'invariants spectraux. Nous utilisons largement ce principe dans les applications du Théorème IV.2.3.

Néanmoins, les questions d'existence et d'inexistence de métriques critiques sont encore mystérieuses. En effet, même pour les invariants de la classe conforme de la sphère ronde $\Lambda_k(\mathbb{S}^n)$, à part l'existence pour $k=1$, l'inexistence pour $k=2$ (Théorème IV.3.3) et l'existence pour un certain entier $3 \leqslant k \leqslant n+1$ en dimensions grandes[8] (Théorème IV.3.4), tout reste ouvert. Par exemple, peut-on calculer précisément k_n, le premier entier

8. Comme on l'a dit, on a même borne sur k qui ne dépend pas de n

plus grand que 3 pour lequel $\Lambda_k(\mathbb{S}^n)$ est atteint ? A n fixé, l'ensemble des indices k pour lesquels $\Lambda_k(\mathbb{S}^n)$ est atteint est-il fini ? Existe-t-il des indices $k \geqslant n+2$ pour lesquels la sphère ronde est de nouveau le minimiseur de $\Lambda_k(\mathbb{S}^n)$? Il est important de rappeler que la situation est bien différente du cas du Laplacien en dimension 2 où on peut calculer $\Lambda_k(\mathbb{S}^2) = k\Lambda_1(\mathbb{S}^2) = 8\pi k$ car il n'est jamais atteint pour $k \geqslant 2$.

On observe maintenant l'asymptotique de $(\Lambda_k(M,[g]))_{k\in\mathbb{N}}$, en particulier sur la sphère ronde. Pour le moment, on sait seulement que cette suite est strictement croissante (Théorème IV.3.7). On constate aussi qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout k, $\Lambda_k(M,[g]) \leqslant ck^{\frac{2}{n}}$. Ce terme est exactement le terme dominant dans l'asymptotique de Weyl des valeurs propres pour une métrique fixé lorsque $k \to +\infty$. Il serait intéressant de pouvoir identifier une loi de Weyl uniforme dans la classe conforme. Cette question est reliée aux précédentes : par exemple si $\Lambda_k(\mathbb{S}^n)$ n'est atteint qu'un nombre fini de fois, une loi de Weyl uniforme $\Lambda_k(\mathbb{S}^n) \sim a([g])k^{\frac{2}{n}}$ se déduit mécaniquement du Théorème IV.2.3. Autrement dit on obtiendrait une minoration de Weyl uniforme dans la classe conforme. Plus généralement, calculer la densité dans $\mathbb{N}^\star$ des indices k pour lesquels $\Lambda_k(\mathbb{S}^n)$ est atteint peut donner accès à une telle loi. Une telle loi de Weyl uniforme rappelle les majorations uniformes dans la classe conforme pour le Laplacien (en toutes dimensions) de [Kor93, Has11]. Néanmoins, il faut rappeler qu'il est conceptuellement plus facile d'obtenir des majorations sur les valeurs propres que des minorations : la méthode la plus naturelle de choisir de bonnes fonctions test pour la caractérisation min-max des valeurs propres n'est adapté qu'à la recherche de majorations. C'est fondamentalement ce qui est fait dans [Kor93, Has11].

Des questions similaires se posent aussi pour d'autres opérateurs (non nécessairement différentiels) covariants conformes : l'opérateur de Dirac, les opérateurs conformément covariants sur les variétés à bords, les opérateurs covariants conformes fractionnaires et leurs combinaisons. Optimiser des combinaisons de valeurs propres peut également s'avérer utile pour ces problèmes.

Bibliographie

[AH06] Bernd Ammann and Emmanuel Humbert. The second Yamabe invariant. *J. Funct. Anal.*, 235(2) :377–412, 2006.

[AJ12] Bernd Ammann and Pierre Jammes. The supremum of first eigenvalues of conformally covariant operators in a conformal class. In *Variational problems in differential geometry*, volume 394 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–23. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

[Alm66] Frederick J. Almgren, Jr. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. *Ann. of Math. (2)*, 84 :277–292, 1966.

[Amm09] Bernd Ammann. The smallest Dirac eigenvalue in a spin-conformal class and cmc immersions. *Communications in Analysis and Geometry*, 17(3) :429–479, 2009.

[AN09] Giovanni Alessandrini and Vincenzo Nesi. Invertible harmonic mappings, beyond Kneser. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 8(3) :451–468, 2009.

[AN21] Giovanni Alessandrini and Vincenzo Nesi. Globally diffeomorphic σ-harmonic mappings. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 200(4) :1625–1635, 2021.

[Ann87] Colette Anné. Spectre du laplacien et écrasement d'anses. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 20(2) :271–280, 1987.

[Aub76] Thierry Aubin. équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 55(3) :269–296, 1976.

[BB10] Mohammed Benalili and Hichem Boughazi. On the second paneitz-branson invariant. *Houston J. Math.*, 30(2), 2010.

[BBH17] Fabrice Bethuel, Haïm Brezis, and Frédéric Hélein. *Ginzburg-Landau vortices*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2017. Reprint of the 1994 edition [MR1269538].

[Ber73] Marcel Berger. Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes. *Compositio Math.*, 26 :129–149, 1973.

[BH19] Dorin Bucur and Antoine Henrot. Maximization of the second non-trivial Neumann eigenvalue. *Acta Mathematica*, 222(2) :337 – 361, 2019.

[Bir17] George D. Birkhoff. Dynamical systems with two degrees of freedom. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18(2) :199–300, 1917.

[Bis20] Christopher J. Bishop. Weil-petersson curves, beta-numbers, and minimal surfaces. *To appear in Annals of Mathematics*, 2020. URL : `https://www.math.stonybrook.edu/~bishop/papers/wpce.pdf`.

[BP22] Renato Bettiol and Piccione Paolo. Nonplanar minimal spheres in ellipsoids of revolution. *A paraître dans Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 2022.

[Bra87] Thomas P. Branson. Group representations arising from Lorentz conformal geometry. *J. Funct. Anal.*, 74(2) :199–291, 1987.

[Bro01] F Brock. An isoperimetric inequality for eigenvalues of the stekloff problem. *ZAAM Z. Angew. Math. Mech.*, 81 :69–71, 2001.

[Cal67] Eugenio Calabi. Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres. *J. Differential Geometry*, 1 :111–125, 1967.

[CdV86] Yves Colin de Verdière. Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien. *Comment. Math. Helv.*, 61(2) :254–270, 1986.

[CES03] Bruno Colbois and Ahmad El Soufi. Extremal eigenvalues of the Laplacian in a conformal class of metrics : the 'conformal spectrum'. *Ann. Global Anal. Geom.*, 24(4) :337–349, 2003.

[CGJP14] Yaiza Canzani, Rod Gover, Dmitry Jakobson, and Raphaël Ponge. Conformal invariants from nodal sets. I. Negative eigenvalues and curvature prescription. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (9) :2356–2400, 2014. With an appendix by Gover and Andrea Malchiodi.

[Che75] Shiu Yuen Cheng. Eigenfunctions and eigenvalues of Laplacian. In *Differential geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVII, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973), Part 2*, pages 185–193. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.

[Che14] Qing-Ming Cheng. Estimates for eigenvalues of the paneitz operator. *Journal of Differential Equations*, 257(10) :3868–3886, 2014.

[CL22] Gilles Carron and Maël Lansade. Boundedness of schrödinger operator in energy space. *arXiv preprint arXiv :2212.06664*, 2022.

[Cla75] Frank H Clarke. Generalized gradients and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, 205 :247–262, 1975.

[CM08] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. Width and finite extinction time of Ricci flow. *Geom. Topol.*, 12(5) :2537–2586, 2008.

[CM24] Jeffrey S. Case and Andrea Malchiodi. A factorization of the GJMS operators of special Einstein products and applications. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 110(5) :Paper No. e70023, 2024.

[DHKW92] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, Albrecht Küster, and Ortwin Wohlrab. *Minimal surfaces. I*, volume 295 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Boundary value problems.

[DHL00] Zindine Djadli, Emmanuel Hebey, and Michel Ledoux. Paneitz-type operators and applications. *Duke Math. J.*, 104(1) :129–169, 2000.

[DLR11] Francesca Da Lio and Tristan Rivière. Sub-criticality of non-local Schrödinger systems with antisymmetric potentials and applications to half-harmonic maps. *Adv. Math.*, 227(3) :1300–1348, 2011.

[Dod94] Jozef Dodziuk. Nonexistence of universal upper bounds for the first positive eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator. In *Geometry of the spectrum (Seattle, WA, 1993)*, volume 173 of *Contemp. Math.*, pages 109–114. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Dou31] J Douglas. Solution of the problem of plateau. *Trans. Am. Math. Soc.*, 33 :263–321, 1931.

[Eji98] Norio Ejiri. The boundary of the space of full harmonic maps of S^2 into $S^{2m}(1)$ and extra eigenfunctions. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 24(1) :83–121, 1998.

[Eke74] Ivar Ekeland. On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47(2) :324–353, 1974.

[ER02] Pierpaolo Esposito and Frédéric Robert. Mountain pass critical points for Paneitz-Branson operators. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 15(4) :493–517, 2002.

[ES14] S. El Sayed. Second eigenvalue of the Yamabe operator and applications. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 50(3-4) :665–692, 2014.

[ESGJ06] Ahmad El Soufi, Hector Giacomini, and Mustapha Jazar. A unique extremal metric for the least eigenvalue of the Laplacian on the Klein bottle. *Duke Math. J.*, 135(1) :181–202, 2006.

[ESI02] Ahmad El Soufi and Saïd Ilias. Critical metrics of the trace of the heat kernel on a compact manifold. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 81(10) :1053–1070, 2002.

[ESI03] Ahmad El Soufi and Saïd Ilias. Extremal metrics for the first eigenvalue of the laplacian in a conformal class. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131(5) :1611–1618, 2003.

[ESI08] Ahmad El Soufi and Saïd Ilias. Laplacian eigenvalue functionals and metric deformations on compact manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 58(1) :89–104, 2008.

[Fab23] Georg Faber. Beweis, dass unter allen homogenen membranen von gleicher flüche und gleicher spannung die kreisfürmige den tiefsten grundton gibt. *Sitz. ber. bayer. Akad. Wiss.*, pages 169–172, 1923.

[FG12] Charles Fefferman and C. Robin Graham. *The ambient metric*, volume 178 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[FL22] Pedro Freitas and Richard Snyder Laugesen. Two balls maximize the third neumann eigenvalue in hyperbolic space. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 23(3) :1325–1355, 2022.

[FP82] C. Fefferman and D. H. Phong. Lower bounds for Schrödinger equations. In *Conference on Partial Differential Equations (Saint Jean de Monts, 1982)*, pages Conf. No. 7, 7. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[FS13] Ailana Fraser and Richard Schoen. Minimal surfaces and eigenvalue problems. In *Geometric analysis, mathematical relativity, and nonlinear partial differential equations*, volume 599 of *Contemp. Math.*, pages 105–121. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[FS15] Ailana Fraser and Richard Schoen. Uniqueness theorems for free boundary minimal disks in space forms. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (17) :8268–8274, 2015.

[FS16] Ailana Fraser and Richard Schoen. Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball. *Invent. Math.*, 203(3) :823–890, 2016.

[GHL16] Matthew J. Gursky, Fengbo Hang, and Yueh-Ju Lin. Riemannian manifolds with positive Yamabe invariant and Paneitz operator. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (5) :1348–1367, 2016.

[GJMS92] C. Robin Graham, Ralph Jenne, Lionel J. Mason, and George A. J. Sparling. Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence. *J. London Math. Soc. (2)*, 46(3) :557–565, 1992.

[GKL21] Alexandre Girouard, Mikhail Karpukhin, and Jean Lagacé. Continuity of eigenvalues and shape optimisation for laplace and steklov problems. *Geometric and Functional Analysis*, 31 :1–49, 06 2021.

[GL21a] Alexandre Girouard and Jean Lagacé. Large Steklov eigenvalues via homogenisation on manifolds. *Invent. Math.*, 226(3) :1011–1056, 2021.

[GL21b] Alexandre Girouard and Richard S. Laugesen. Robin spectrum : Two disks maximize the third eigenvalue. *Indiana University Mathematics Journal*, 70(6) :2711–2742, 2021.

[GM15] Matthew J. Gursky and Andrea Malchiodi. A strong maximum principle for the Paneitz operator and a non-local flow for the Q-curvature. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(9) :2137–2173, 2015.

[GNP09] Alexandre Girouard, Nikolai Nadirashvili, and Iosif Polterovich. Maximization of the second positive Neumann eigenvalue for planar domains. *Journal of Differential Geometry*, 83(3) :637 – 662, 2009.

[GP10] A. Girouard and I. Polterovich. On the Hersch-Payne-Schiffer estimates for the eigenvalues of the Steklov problem. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 44(2) :33–47, 2010.

[GPA22] Matthew J. Gursky and Samuel Pérez-Ayala. Variational properties of the second eigenvalue of the conformal Laplacian. *J. Funct. Anal.*, 282(8) :Paper No. 109371, 60, 2022.

[Gra89] Matthew A. Grayson. Shortening embedded curves. *Ann. of Math. (2)*, 129(1) :71–111, 1989.

[GZ03] C. Robin Graham and Maciej Zworski. Scattering matrix in conformal geometry. *Invent. Math.*, 152(1) :89–118, 2003.

[Has11] Asma Hassannezhad. Conformal upper bounds for the eigenvalues of the laplacian and steklov problem. *Journal of Functional Analysis*, 261(12) :3419–3436, 2011.

[Hél90] Frédéric Hélein. Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphère. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 311(9) :519–524, 1990.

[Hél91] Frédéric Hélein. Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312(8) :591–596, 1991.

[Hél02] F. Hélein. *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, volume 150 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2002. Translated from the 1996 French original, With a foreword by James Eells.

[Her70] Joseph Hersch. Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 270 :A1645–A1648, 1970.

[HK19] Robert Haslhofer and Daniel Ketover. Minimal 2-spheres in 3-spheres. *Duke Math. J.*, 168(10) :1929–1975, 2019.

[HK23] Robert Haslhofer and Daniel Ketover. Free boundary minimal disks in convex balls. 2023. URL : `https://arxiv.org/abs/2307.01828`, `arXiv:2307.01828`.

[HOHON99] Maria Hoffmann-Ostenhof, Thomas Hoffmann-Ostenhof, and Nikolaï Nadirashvili. On the multiplicity of eigenvalues of the Laplacian on surfaces. *Ann. Global Anal. Geom.*, 17(1) :43–48, 1999.

[HP68] Joseph Hersch and Lawrence E. Payne. Extremal principles and isoperimetric inequalities for some mixed problems of Stekloff's type. *Z. Angew. Math. Phys.*, 19 :802–817, 1968.

[HPP25] Emmanuel Humbert, Romain Petrides, and Bruno Premoselli. Extremising eigenvalues of the gjms operators in a fixed conformal class. *arXiv preprint arXiv :2505.08280*, 2025.

[HPS75] J. Hersch, L. E. Payne, and M. M. Schiffer. Some inequalities for Stekloff eigenvalues. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 57 :99–114, 1975.

[HR09] Emmanuel Humbert and Simon Raulot. Positive mass theorem for the Paneitz-Branson operator. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 36(4) :525–531, 2009.

[HY16] Fengbo Hang and Paul C. Yang. Q-curvature on a class of manifolds with dimension at least 5. *Comm. Pure Appl. Math.*, 69(8) :1452–1491, 2016.

[Jam16] Pierre Jammes. Multiplicité du spectre de Steklov sur les surfaces et nombre chromatique. *Pacific J. Math.*, 282(1) :145–171, 2016.

[JLN$^+$05] Dmitry Jakobson, Michael Levitin, Nikolai Nadirashvili, Nilima Nigam, and Iosif Polterovich. How large can the first eigenvalue be on a surface of genus two ? *Int. Math. Res. Not.*, (63) :3967–3985, 2005.

[JNP06] Dmitry Jakobson, Nikolai Nadirashvili, and Iosif Polterovich. Extremal metric for the first eigenvalue on a Klein bottle. *Canad. J. Math.*, 58(2) :381–400, 2006.

[Juh13] Andreas Juhl. Explicit formulas for GJMS-operators and Q-curvatures. *Geom. Funct. Anal.*, 23(4) :1278–1370, 2013.

[Kar16] Mikhail A. Karpukhin. Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on non-orientable surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (20) :6200–6209, 2016.

[Kar21] Mikhail Karpukhin. Index of minimal spheres and isoperimetric eigenvalue inequalities. *Inventiones mathematicae*, 223, 01 2021.

[Kim22] Anna Kim. Maximization of the second laplacian eigenvalue on the sphere. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 150 :3501–3512, 2022.

[KKMS24] M Karpukhin, R Kusner, P McGrath, and D Stern. Embedded minimal surfaces in s3 and b3 via equivariant eigenvalue optimization. *arXiv preprint arXiv :2402.13121*, 2024.

[Klu25] Martijn Kluitenberg. Thèse de martijn kluitenberg, codirecteurs : Romain petrides, mario prandi, marcello seri. *Thèse*, 2025.

[KM21] Mikhail Karpukhin and Vladimir Medvedev. On the Friedlander-Nadirashvili invariants of surfaces. *Math. Ann.*, 379(3-4) :1767–1805, 2021.

[KMP23] Mikhail Karpukhin, Antoine Métras, and Iosif Polterovich. Dirac eigenvalue optimisation and harmonic maps to complex projective spaces. ArXiv Preprint : 2308.07875, 2023.

[Kne26] Hellmut Kneser. Lösung der aufgabe 41. *Jber. Deutsch. Math.-Verein*, 35 :123–124, 1926.

[KNPP21] Mikhail Karpukhin, Nikolai Nadirashvili, Alexei V. Penskoi, and Iosif Polterovich. An isoperimetric inequality for Laplace eigenvalues on the sphere. *J. Differential Geom.*, 118(2) :313–333, 2021.

[KNPP22] Mikhail Karpukhin, Nikolai Nadirashvili, Alexei V. Penskoi, and Iosif Polterovich. Conformally maximal metrics for Laplace eigenvalues on surfaces. In *Surveys in differential geometry 2019. Differential geometry, Calabi-Yau theory, and general relativity. Part 2*, volume 24 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 205–256. Int. Press, Boston, MA, [2022] ©2022.

[KNPS21] Mikhail Karpukhin, Mickaël Nahon, Iosif Polterovich, and Daniel Stern. Stability of isoperimetric inequalities for laplace eigenvalues on surfaces. *To appear in J. of Diff. Geom. preprint arXiv :2106.15043*, 2021.

[Kok14] Gerasim Kokarev. Variational aspects of Laplace eigenvalues on Riemannian surfaces. *Adv. Math.*, 258 :191–239, 2014.

[Kor93] Nicholas Korevaar. Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics. *Journal of Differential Geometry*, 37(1) :73–93, 1993.

[KPS25] Mikhail Karpukhin, Romain Petrides, and Daniel Stern. Existence of metrics maximizing the first laplace eigenvalue on closed surfaces. *arXiv preprint arXiv :2505.05293*, 2025.

[Kra25] E. Krahn. Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises. *Math. Ann.*, 94(1) :97–100, 1925. URL : `http://dx.doi.org/10.1007/BF01208645`, `doi:10.1007/BF01208645`.

[KS22] Mikhail Karpukhin and Daniel Stern. Existence of harmonic maps and eigenvalue optimization in higher dimensions. *To appear in Inventiones Mathematicae, preprint arXiv :2207.13635*, 2022.

[KS23] Mikhail Karpukhin and Daniel Stern. Min-max harmonic maps and a new characterization of conformal eigenvalues. *J. Eur. Math. Soc.*, pages 1–59, 2023.

[KS24] Mikhail Karpukhin and Daniel Stern. From Steklov to Laplace : free boundary minimal surfaces with many boundary components. *Duke Math. J.*, 173(8) :1557–1629, 2024.

[Lin07] Ching-Lung Lin. Strong unique continuation for m-th powers of a Laplacian operator with singular coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135(2) :569–578, 2007.

[LM23] Vanderson Lima and Ana Menezes. Eigenvalue problems and free boundary minimal surfaces in spherical caps. *arXiv preprint arXiv :2307.13556*, 2023.

[LP87] John M. Lee and Thomas H. Parker. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 17(1) :37–91, 1987.

[LP19] Paul Laurain and Romain Petrides. Existence of min-max free boundary disks realizing the width of a manifold. *Adv. Math.*, 352 :326–371, 2019.

[LP24] Paul Laurain and Romain Petrides. Asymptotics for minimizers of the Ginzburg-Landau energy with optimal regularity of the boundary data and applications. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 33(5) :1251–1295, 2024.

[LS47] Lazar Lusternik and Lev Schnirelmann. Topological methods in variational problems and their application to the differential geometry of surfaces. *spekhi Mat. Nauk*, 22(1) :166–217, 1947.

[LSZ20] Longzhi Lin, Ao Sun, and Xin Zhou. Min-max minimal disks with free boundary in Riemannian manifolds. *Geom. Topol.*, 24(1) :471–532, 2020.

[LY82] Peter Li and Shing Tung Yau. A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces. *Invent. Math.*, 69(2) :269–291, 1982.

[Med23] Vladimir Medvedev. On free boundary minimal submanifolds in geodesic balls in $\mathbb{H}^n$ and $\mathbb{S}^n_+$. ArXiv Preprint : 2311.02409, 2023.

[Mic11] Benoît Michel. Masse des opérateurs GJMS. 2011. arXiv :1012.4414.

[MN14] Fernando C. Marques and André Neves. Min-max theory and the Willmore conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 179(2) :683–782, 2014.

[MNS19] Fernando C. Marques, André Neves, and Antoine Song. Equidistribution of minimal hypersurfaces for generic metrics. *Invent. Math.*, 216(2) :421–443, 2019.

[Mor31] Marston Morse. Closed extremals. *Ann. of Math. (2)*, 32(3) :549–566, 1931.

[Mor48] Charles B. Morrey, Jr. The problem of Plateau on a Riemannian manifold. *Ann. of Math. (2)*, 49 :807–851, 1948.

[MP20] Henrik Matthiesen and Romain Petrides. Free boundary minimal surfaces of any topological type in euclidean balls via shape optimization, 2020. URL : `https://arxiv.org/abs/2004.06051`.

[MS19] Henrik Matthiesen and Anna Siffert. Handle attachment and the normalized first eigenvalue, 2019. URL : `https://arxiv.org/abs/1909.03105`.

[MS21] Henrik Matthiesen and Anna Siffert. Existence of metrics maximizing the first eigenvalue on non-orientable surfaces. *J. Spectr. Theory*, 11(3) :1279–1296, 2021.

[MV02] Vladimir G. Maz'ya and Igor E. Verbitsky. The Schrödinger operator on the energy space : boundedness and compactness criteria. *Acta Math.*, 188(2) :263–302, 2002.

[MV20] Saikat Mazumdar and Jérôme Vétois. Existence result for the higher-order q-curvature equation. 2020. arXiv :2007.10180.

[MW24] Alexis Michelat and Yilin Wang. The Loewner energy via the renormalised energy of moving frames. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 248(2) :Paper No. 15, 60, 2024.

[Nad96] Nikolaï Nadirashvili. Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 6(5) :877–897, 1996.

[Nit85] Johannes C. C. Nitsche. Stationary partitioning of convex bodies. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 89(1) :1–19, 1985.

[NS15] Nikolai Nadirashvili and Yannick Sire. Conformal spectrum and harmonic maps. *Mosc. Math. J.*, 15(1) :123–140, 182, 2015.

[NS19] Shin Nayatani and Toshihiro Shoda. Metrics on a closed surface of genus two which maximize the first eigenvalue of the Laplacian. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 357(1) :84–98, 2019.

[PA22] Samuel Pérez-Ayala. Extremal metrics for the paneitz operator on closed four-manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 182 :104666, 2022.

[Pan08] Stephen M. Paneitz. A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds (summary). *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 4 :Paper 036, 3, 2008.

[Par96] Thomas H. Parker. Bubble tree convergence for harmonic maps. *J. Differential Geom.*, 44(3) :595–633, 1996.

[Pet14a] Romain Petrides. Existence and regularity of maximal metrics for the first Laplace eigenvalue on surfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 24(4) :1336–1376, 2014.

[Pet14b] Romain Petrides. Maximization of the second conformal eigenvalue of spheres. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142(7) :2385–2394, 2014.

[Pet15] Romain Petrides. On a rigidity result for the first conformal eigenvalue of the Laplacian. *J. Spectr. Theory*, 5(1) :227–234, 2015.

[Pet18] Romain Petrides. On the existence of metrics which maximize Laplace eigenvalues on surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (14) :4261–4355, 2018.

[Pet19] Romain Petrides. Maximizing Steklov eigenvalues on surfaces. *J. Differential Geom.*, 113(1) :95–188, 2019.

[Pet23a] Romain Petrides. Extremal metrics for combinations of laplace eigenvalues and minimal surfaces into ellipsoids. *Journal of Functional Analysis*, 285(10) :110087, 2023.

[Pet23b] Romain Petrides. Non planar free boundary minimal disks into ellipsoids. ArXiv Preprint : 2304.12111, 2023.

[Pet24a] Romain Petrides. Geometric spectral optimization on surfaces. 2024. URL : `https://arxiv.org/abs/2410.13347`, `arXiv:2410.13347`.

[Pet24b] Romain Petrides. Shape optimization for combinations of Steklov eigenvalues on Riemannian surfaces. *Math. Z.*, 307(1) :Paper No. 13, 44, 2024.

[Pet25a] Romain Petrides. Isoperimetric inequalities involving steklov eigenvalues on surfaces, 2025. URL : `https://arxiv.org/abs/2508.10721`, `arXiv:2508.10721`.

[Pet25b] Romain Petrides. Laplace eigenvalues and non-planar minimal spheres into 3-dimensional ellipsoids. *J. Geom. Anal.*, 35(375), 2025.

[Pet25c] Romain Petrides. Regularity estimates on harmonic eigenmaps with arbitrary number of coordinates, 2025. URL : `https://arxiv.org/abs/2508.10448`, `arXiv:2508.10448`.

[Pet25d] Romain Petrides. A variational method for functionals depending on eigenvalues. *J. London. Math. Soc.*, 112(4), 2025.

[Pro60] M. H. Protter. Unique continuation for elliptic equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95 :81–91, 1960.

[PT24] Romain Petrides and David Tewodrose. Critical metrics of eigenvalue functionals via clarke subdifferential. 2024. URL : `https://arxiv.org/abs/2403.07841`, `arXiv:2403.07841`.

[PV24] Bruno Premoselli and Jérôme Vétois. Nonexistence of minimisers for the second conformal eigenvalue near the round sphere in low dimensions. 2024. arXiv :2408.07823.

[Rad30] T Radó. On plateau's problem. *Ann. Math.*, 31 :457–469, 1930.

[Riv07] Tristan Rivière. Conservation laws for conformally invariant variational problems. *Invent. Math.*, 168(1) :1–22, 2007.

[Sch84] Richard Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 20(2) :479–495, 1984.

[Son23] Antoine Song. Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in closed manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 197(3) :859–895, 2023.

[SX20] Yannick Sire and Hang Xu. On a new functional for extremal metrics of the conformal laplacian in high dimension, 2020. `arXiv:1809.06874`.

[SY79] Richard Schoen and Shing Tung Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65(1) :45–76, 1979.

[Sze54] G. Szegö. Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area. *J. Rational Mech. Anal.*, 3 :343–356, 1954.

[Vie71] Helmut Viesel. über einfach geschlossene geodätische Linien auf dem Ellipsoid. *Arch. Math. (Basel)*, 22 :106–112, 1971.

[Vin25a] Denis Vinokurov. Conformal optimization of eigenvalues on surfaces with symmetries. *arXiv preprint arXiv :2502.03756*, 2025.

[Vin25b] Denis Vinokurov. Maximizing higher eigenvalues in dimensions three and above. *arXiv preprint arXiv :2506.09328*, 2025.

[Wan19] Yilin Wang. Equivalent descriptions of the Loewner energy. *Invent. Math.*, 218(2) :573–621, 2019.

[Wei54] Robert Weinstock. Inequalities for a classical eigenvalue problem. *J. Rational Mech. Anal.*, 3 :745–753, 1954.

[Wei56] Hans Weinberger. An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem. *J. Rational Mech. Anal.*, 5 :633–636, 1956.

[YY19] Paul C. Yang and Shing-Tung Yau. Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds. In *Selected works of Shing-Tung Yau. Part 1. 1971–1991. Vol. 3. Eigenvalues and general relativity*, pages 45–53. Int. Press, Boston, MA, [2019] ©2019. Reprint of [0577325].