15 novembre 25

# Correction du partiel.

## Exercice 1.

(1). La dérivation des polynômes est une application linéaire, et il en va de même pour les évaluations en $0$ et en $1$. $\varphi$ est une forme linéaire car elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et linéaire en tant que compositions et combinaisons linéaires d'applications linéaires. Enfin $\varphi(X-1) = 1 \neq 0$ donc $\varphi$ est non nulle.

(2). $F$ est le noyau de $\varphi$ donc d'après le théorème du rang

$$\dim F = \dim E - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n + 1 - 1 = n$$

## Exercice 2.

(1).

$$\begin{aligned}(||x|| + ||y||)^2 - ||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 - (||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2) \\ &= 2(||x||||y|| - \langle x, y\rangle)\end{aligned}$$

(2). On sait que dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $x, y$ le cas d'égalité est atteint si et seulement si $x, y$ sont liés. Or les normes étant positives $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ si et seulement si $(||x|| + ||y||)^2 = ||x+y||^2$, c'est-à-dire d'après (1) si et seulement si $||x||||y|| = \langle x, y\rangle$, c'est-à-dire si et seulement si $||x||||y|| = |\langle x, y\rangle|$ et $\langle x, y\rangle \geqslant 0$. D'où le résultat.

(3).

$$\left(\sum_{i=1}^n ||x_i||\right)^2 - \left|\left|\sum_{i=1}^n x_i\right|\right|^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2(||x_i||||x_j|| - \langle x_i, x_j\rangle)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour chaque paire de vecteurs, on déduit que l'expression ci-dessus est une somme de termes positifs. Par conséquent, elle est nulle si et seulement si chaque terme est nul, c'est-à-dire d'après (2) que quels que soient $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $x_i, x_j$ sont liés et $\langle x_i, x_j\rangle \geqslant 0$. Finalement l'expression est nulle si et seulement si $\left(\sum_{i=1}^n ||x_i||\right)^2 = ||\sum_{i=1}^n x_i||^2$, c'est-à-dire si et seulement si $\sum_{i=1}^n ||x_i|| = ||\sum_{i=1}^n x_i||$. D'où le résultat.

## Exercice 3.

(1). $v_1 \in F$ car $-1 - 2\cdot 0 + 1 = 0$ et $v_2 \in F$ car $2 - 2\cdot 1 + 0 = 0$. De plus $F$ est l'orthogonal du vecteur $(1, -2, 1)$ donc de dimension $3 - 1 = 2$, et $v_1, v_2$ sont linéairement indépendants, donc $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

(2) Je pose $e_1 := \frac{v_1}{||v_1||} = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. Ensuite je pose

$$e_2 := \frac{v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1}{||v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1||} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$$

$(e_1, e_2)$ est la base orthonormée obtenue par le processus de Gram-Schmidt pour la base $(v_1, v_2)$ de $F$.

(3) Il en suit que pour tout $v \in \mathbb{R}^3$,

$$P_F(v) = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2$$

et la matrice de $P_F$ dans la base canonique est

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(4) Je note $v := (1, 0, 1)$. La distance de $v$ à $F$ est réalisé par la projection orthogonale de $v$ sur $F$, autrement dit la distance de $v$ à $F$ est égale à

$$||v - P_F(v)|| = ||(1/3, -2/3, 1/3)|| = \sqrt{2/3}$$