

# ÉNONCÉS DU COURS

**DÉFINITION.** Un cycle de  $S_n$  est une permutation  $c$  telle qu'il existe des entiers  $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $c(a_i) = a_{i+1}$  ( $i < k$ ),  $c(a_k) = a_1$ , et si  $a \notin \{a_1, \dots, a_k\}$  alors  $c(a) = a$ . Dans ce cas, on écrit

$$c = (a_1 a_2 \dots a_k)$$

(ou alors  $c = (a_2 a_3 \dots a_k a_1)$ , ou alors  $c = (a_k a_1 \dots a_{k-1})$ , etc. ), le support de  $c$  est l'ensemble  $\{a_1, \dots, a_k\}$  et sa longueur est  $k$ . Une transposition est un cycle de longueur 2.<sup>1</sup>

**THÉORÈME.** Toute permutation d'un nombre fini d'éléments se décompose en un produit de cycles à supports disjoints deux à deux, et cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. Autrement dit, soit  $\sigma \in S_n$ . Alors il existe des cycles à supports disjoints  $c_1, \dots, c_r$  tels que  $\sigma = c_1 \cdots c_r$ , ces cycles sont uniques à l'ordre des facteurs près.

**THÉORÈME.** Les transpositions engendrent  $S_n$ .

**DÉFINITION.** La signature  $\varepsilon$  d'une transposition vaut  $-1$ .

**THÉORÈME.** On peut étendre la signature en un morphisme de groupes

$$\varepsilon : S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$$

en particulier si  $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ , où les  $\tau_i$  sont des transpositions, alors

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$$

**COROLLAIRE.** Étant donnée une permutation, la parité du nombre de transpositions qu'il faut pour écrire cette permutation comme leur produit est toujours la même.

**ALGORITHME.** Pour trouver la décomposition d'une permutation de  $S_n$  en cycles à supports disjoints on procède de la façon suivante. On considère un premier entier, disons 1, et on considère les itérées de  $\sigma$ , autrement dit on considère les entiers  $\sigma(1), \sigma(\sigma(1)), \dots$  jusqu'à retomber sur 1. Le premier cycle est donc  $(1 a_1 \dots a_k)$  avec  $\sigma^i(1) = a_i$  et  $\sigma(a_k) = 1$ . S'il reste encore des entiers qui ne sont pas dans ce cycle, on recommence la procédure. On obtient ainsi une liste de cycles à supports disjoints dont le produit est  $\sigma$ .

---

1. Un cycle de longueur 1 est un point fixe !

# EXERCICES

**EXERCICE 2.** Déterminons premièrement les éléments de  $S_3$  qui sont au nombre de  $3! = 2 \cdot 3 = 6$ . La table de multiplication de  $S_3$  sert à composer ses permutations entre elles, mais en fait il est plus judicieux de déterminer des **générateurs** puis des **relations** entre ces générateurs. Je pose  $\tau = (1, 2)$  et  $\sigma = (23)$ . Vérifiez que  $\tau\sigma = (123)$ ,  $\sigma\tau = (132)$  et  $\sigma\tau\sigma = (13)$ . Les permutations de  $S_3$  forment donc l'ensemble

$$\{\text{id}, \tau, \sigma, \tau\sigma, \sigma\tau, \sigma\tau\sigma\}$$

$\sigma$  et  $\tau$  sont des transpositions, par conséquent

$$\sigma^2 = \tau^2 = \text{id}$$

Il y a une troisième relation :

$$\sigma\tau\sigma = \tau\sigma\tau$$

à partir de cette dernière vous pouvez obtenir le tableau suivant où à la case située à l'intersection de la ligne  $a$  et de la colonne  $b$  se trouve l'élément  $ab$  :

	id	$\tau$	$\sigma$	$\tau\sigma$	$\sigma\tau$	$\tau\sigma\tau$
id	id	$\tau$	$\sigma$	$\tau\sigma$	$\sigma\tau$	$\tau\sigma\tau$
$\tau$	$\tau$	id	$\tau\sigma$	$\sigma$	$\tau\sigma\tau$	$\sigma\tau$
$\sigma$	$\sigma$	$\sigma\tau$	id	$\tau\sigma\tau$	$\tau$	$\tau\sigma$
$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	$\tau\sigma\tau$	$\tau$	$\sigma\tau$	id	$\sigma$
$\sigma\tau$	$\sigma\tau$	$\sigma$	$\tau\sigma\tau$	id	$\tau\sigma$	$\tau$
$\tau\sigma\tau$	$\tau\sigma\tau$	$\tau\sigma$	$\sigma\tau$	$\tau$	$\sigma$	id

## EXERCICE 3.

(3) Soient  $\sigma, \tau \in S_n$ . Alors  $\varphi_\sigma \circ \varphi_\tau = \varphi_{\sigma\tau}$ . En effet, soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Alors d'une part

$$(\varphi_\sigma \circ \varphi_\tau)(e_i) = \varphi_\sigma(\varphi_\tau(e_i)) = \varphi_\sigma(e_{\tau(i)}) = e_{\sigma(\tau(i))} = e_{\sigma\tau(i)}$$

et d'autre part

$$\varphi_{\sigma\tau}(e_i) = e_{\sigma\tau(i)}$$

Or deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales, d'où le résultat.

(1) L'application  $\varphi_\sigma$  est bijective. En effet, d'après la question (3) et le fait que  $\varphi_{\text{id}} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  son inverse n'est rien d'autre que  $\varphi_{\sigma^{-1}}$ .

## EXERCICE 5.

(1)  $\sigma\tau = (145732)$ .

(2)  $\sigma = (1357)(246)$  et  $\varepsilon(\sigma) = -1$ .  $\tau = (127)(364)$  et  $\varepsilon(\tau) = 1$ .

(3) Deux cycles à supports disjoints commutent donc  $\sigma^N = \text{id}$  si et seulement si  $(1357)^N (246)^N = \text{id}$ . Il en suit que  $\sigma^N = \text{id}$  si et seulement si  $(1357)^N = \text{id}$  et  $(246)^N = \text{id}$ . Les ordres de ces cycles sont respectivement 4 et 3, donc  $\sigma^N = \text{id}$  si et seulement si 3 et 4 divise  $N$ . Il en suit que le plus petit entier recherché est 12.

(4)  $2024 = 168 \cdot 12 + 8$ , par conséquent

$$\sigma^{2024} = (\sigma^{12})^{168} \sigma^8 = \text{id}^{168} \sigma^8 = \sigma^8$$

Donc  $\sigma^{2024} = (1357)^8 (246)^8 = \text{id} (246)^{9-1} = (246)^{-1} = (264)$ .

### EXERCICE 6.

(1) (Dans la suite je note  $i_{r+1} = i_1$  !) Soit  $\sigma \in S_n$ . Alors  $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r))$ . En effet, soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Alors ou bien il existe  $j$  tel que  $k = \sigma(i_j)$  et dans ce cas

$$(\sigma\tau\sigma^{-1})(k) = (\sigma\tau)(\sigma^{-1}(\sigma(i_j))) = (\sigma\tau)(i_j) = \sigma(\tau(i_j)) = \sigma(i_{j+1})$$

ou bien  $k \notin \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_r)\}$  et dans ce cas  $\sigma^{-1}(k) \notin \{i_1, \dots, i_r\}$  et donc

$$(\sigma\tau\sigma^{-1})(k) = \sigma(\tau(\sigma^{-1}(k))) = \sigma(\sigma^{-1}(k)) = k$$

$\sigma\tau\sigma^{-1}$  et  $(\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r))$  sont deux permutations ayant la même image pour chaque entier  $k \in \{1, \dots, n\}$  : elle sont donc égales. D'où le résultat annoncé.

(2) Soit  $\sigma \in S_n$ . Supposons que  $\sigma\tau = \tau\sigma$ . Alors en multipliant à droite par  $\sigma^{-1}$  on a que

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau$$

Or d'après (1),  $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r))$ .  $(\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)) = (i_1 \dots i_r)$ . Alors il existe un entier  $k$  tel que  $\sigma(i_1) = i_k = \tau^k(i_1)$ . Calculons l'image des autres éléments du support de  $\tau$ . Soit  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Alors comme  $\tau$  et  $\sigma$  commutent on peut écrire

$$\sigma(i_j) = \sigma(\tau^j(i_1)) = (\sigma\tau^j)(i_1) = (\tau\sigma\tau^{j-1})(i_1) = (\tau^j\sigma)(i_1) = \tau^j(\sigma(i_1)) = \tau^j(\tau^k(i_1)) = \tau^k(\tau^j(i_1)) = \tau^k(i_j)$$

D'où le résultat escompté  $\sigma(x) = \tau^k(x)$  sur le support de  $\tau$ .

Réciproquement, supposons que  $\sigma(x) = \tau^k(x)$  sur le support de  $\tau$ . Alors  $\sigma$  s'écrit  $\sigma = \tau^k\gamma$ , où  $\gamma$  est une permutation telle que  $\gamma$  et  $\tau$  soient à supports disjoints. Comme  $\gamma$  et  $\tau$  commutent il en suit que

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\tau^k\gamma)\tau(\tau^k\gamma)^{-1} = \tau^k\gamma\tau\gamma^{-1}\tau^{-k} = \tau^k\gamma\gamma^{-1}\tau\tau^{-k} = \tau^{k+1-k} = \tau$$

(3)  $\alpha = (149)(2578)(36)$ , et on note  $\alpha_1 = (149)$ ,  $\alpha_2 = (2578)$ ,  $\alpha_3 = (36)$ .

(4) Soit  $\sigma \in S_9$ .  $\sigma\alpha = \alpha\sigma$  si et seulement si  $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \alpha$ , c'est-à-dire si et seulement si  $(\sigma\alpha_1\sigma^{-1})(\sigma\alpha_2\sigma^{-1})(\sigma\alpha_3\sigma^{-1}) = \alpha$  car

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} = \sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\sigma^{-1} = \sigma\alpha_1(\sigma^{-1}\sigma)\alpha_2\alpha_3 = \sigma\alpha_1\sigma^{-1}\sigma\alpha_2(\sigma\sigma^{-1})\alpha_3$$

on conclut avec la question 1 puisqu'on a deux décompositions de  $\alpha$  en produit de cycles à supports disjoints qui doivent donc coïncider par unicité à l'ordre des facteurs près, c'est-à-dire  $\sigma\alpha_i\sigma^{-1} = \alpha_i$  puisque il y a de chaque côté un cycle de longueur 3, un de longueur 4, et un de longueur 2.

(5) En combinant tous les résultats précédents, il vient que  $\sigma\alpha = \alpha\sigma$  si et seulement si  $\sigma = \alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\alpha_3^{k_3}$ , d'après les longueurs de ces cycles, c'est-à-dire d'après les ordres de ces permutations, il y a exactement  $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$  telles permutations  $\sigma$ .

# CONSEILS MATHÉMATIQUES

1. Avant de vous encombrer vos rédactions de symboles ignobles, faites des mathématiques en français (ou toute autre langue familière bien sûr). Remplacer  $\forall$  par « pour tout » (ou « pour toute », « quels que soient » etc.) et  $\exists$  par « il existe ». Cela évitera d'écrire des choses fausses.

2. Pensez les définitions comme des poupées russes. Par exemple, un cycle est une permutation telle que... ; une permutation est une fonction telle que... etc. Par ailleurs elle doivent être le socle doux et confortable sur lequel vous pourriez exprimer vos intuitions mathématiques. Avant de penser à résoudre un problème il faut déjà s'assurer que les énoncés soient limpides pour vous.