28 janvier 25

Énoncés du cours

Définition. Soit E un espace vectoriel réel. Une application $f : E^p \to E$ est dite p–**linéaire** si elle est $\mathbb{R}$–linéaire selon chacune de ses variables, autrement dit si pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, quels que soient les vecteurs $x_1, \ldots, x_{i-1}$, $x_{i+1}, \ldots, x_p \in E$, l'application $E \to E$ définie par

$$x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

est $\mathbb{R}$–linéaire.

Dans ce cas on dit qu'elle est :

- **symétrique** si l'ordre des variables ne compte pas, autrement dit si pour toute permutation $\sigma \in S_p$, quels que soient les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \ldots, x_p)$$

- **antisymétrique** si échanger deux variables change la direction du vecteur image, autrement dit si quels que soient les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ et les entiers $i \neq j$,

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p)$$

- **alternée** si elle vaut 0 dès lors que deux de ses variables sont égales.

Exercices

Exercice 1.

(1) $f(\lambda x, \ldots, \lambda x) = \lambda^n f(x, \ldots, x)$.

(2)

$$f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y)$$

$$\begin{aligned} f(x+y, x+y, x+y) &= f(x,x,x) + f(x,x,y) + f(x,y,x) + f(x,y,y) \\ &\quad + f(y,x,x) + f(y,x,y) + f(y,y,x) + f(y,y,y) \end{aligned}$$

(3) Supposons f symétrique. Alors

$$f(x+y, x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y)$$

$$f(x+y, x+y, x+y) = f(x,x,x) + 3f(x,x,y) + 3f(y,y,x) + f(y,y,y)$$

(4) f étant symétrique je note pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $p+q=n$:

$$f(x^{(p)}; y^{(q)}) := f(\underbrace{x, \ldots, x}_{p \text{ fois}}, \underbrace{y, \ldots, y}_{q \text{ fois}})$$

En ces termes

$$f(x+y, \ldots, x+y) = \sum_{p+q=n} \binom{p}{n} f(x^{(p)}; y^{(q)})$$

Cela se démontre exactement comme la formule du binôme de Newton : remarquez que si A est une $\mathbb{R}$–algèbre alors $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \prod a_i$ est une application n–linéaire $A^n \to A$.

Exercice 2.

(1) ω est une application bilinéaire comme combinaisons linéaires d'applications bilinéaires. Vérifiez qu'elle est bien antisymétrique en calculant $\omega(x, y)+ \omega(y, x)$.

(2) Supposons quitte à échanger les rôles que $x = \lambda y$. L'antisymétrie implique $\omega(y, y) = -\omega(y, y)$ et donc $2\omega(y, y) = 0$, par conséquent

$$\omega(x, y) = \lambda\omega(y, y) = 0$$

(3) La réciproque n'est pas vraie puisque $x = (1, 1, -1, 1)$ et $y = (0, 1, 0, 1)$ forment une famille libre et pourtant $\omega(x, y) = 0$.

Exercice 3.

(1) Pour $i \in \{2, 3, 4\}$, je note par $p_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la fonction $p_i(x) = (x_1, x_i)$, et $\det$ correspond au déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$f(x, y) = (\det(p_2(x), p_2(y)), \det(p_3(x), p_3(y)), \det(p_4(x), p_4(y)))$$

il en suit que f est bilinéaire antisymétrique.

(2) Si x, y sont liés alors les couples $(p_i(x), p_i(y))$ sont liés, car les p_i sont linéaires, et donc $f(x, y) = 0$.

(3) Supposons que $x_1 \neq 0$ et $f(x, y) = 0$. Alors $\det(p_2(x), p_2(y)) = 0$, c'est-à-dire que (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont liés. Par conséquent en notant $\lambda := y_1/x_1$ on a $y_i = \lambda x_i$ pour $i \leqslant 2$. De même pour $i = 3, 4$. Et donc $y = \lambda x$.

(4) $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, 1)$ ne sont pas liés mais $f(x, y) = 0$.

(5) .

Exercice 4.

Il s'agit d'écrire à chaque fois la permutation correspondante et d'en calculer la signature, plus précisément trouver σ tel que le terme est $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{8,\sigma(8)}$.

(1) $\varepsilon(\sigma) = -1$ car $\sigma = (1853)(27)(46)$.

(2) $\varepsilon(\sigma) = 1$ car $\sigma = (182)(467)$.

(3) $\varepsilon(\sigma) = -1$ car $\sigma = (1345)(268)$.

(4) $\varepsilon(\sigma) = 1$ car $\sigma = (1634)(25)$.

Exercice 5.

Premièrement $\sigma = (164)(27853)$ et $\varepsilon(\sigma) = 1$. Or (comme suggéré) si $\tau \neq \sigma$ alors elles ne peuvent différer en moins de deux valeurs car ce sont des bijections. Donc

$$\begin{aligned} \det A &= 1 + \sum_{\tau \neq \sigma} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} \cdots a_{8,\tau(8)} \\ &= 1 \mod 5^2 \end{aligned}$$

Exercice 6.

(1) $V(a_0, \ldots, a_n)$ est le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la famille $(A_i)_{i \leqslant n}$ où

$$A_i = (1, a_i, \ldots, a_i^n)$$

par conséquent si $a_i = a_j$ pour deux entiers i, j distincts alors $V(a_0, \ldots, a_n)$ est le déterminant d'une famille liée et est donc nul.

(3) Vérifiez qu'on peut se ramener au cas où les a_i sont distincts. On considère le polynôme $V(X, a_1, \ldots, a_n) \in K[X]$. D'après le développement des déterminants c'est un polynôme de degré au plus n et de coefficient dominant la mineure d'indice $(1, n+1)$ qui n'est rien d'autre que $(-1)^n V(a_1, \ldots, a_n)$. Or d'après la question (1) on en connaît n racines et par conséquent

$$V(X, a_1, \ldots, a_n) = (-1)^n V(a_1, \ldots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$$

Le résultat est obtenu en évaluant en $X = a_0$.

(4) Par récurrence on obtient que

$$V(a_0, \ldots, a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} (a_i - a_0) \right) \left(\prod_{j=2}^{n} (a_j - a_1) \right) \cdots (a_{n-1} - a_{n-2})(a_n - a_{n-2})(a_n - a_{n-1}) = \prod_{j<i} (a_i - a_j)$$

(5) Il suffit de montrer que l'application linéaire envoie une base de $K[X]_{\leqslant n}$ sur une base de K^{n+1}. La base $(1, X, \ldots, X^n)$ a pour image une famille de vecteurs dont le déterminant dans la base canonique est précisément $V(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$. D'où le résultat.

(6) Dans ce cas, c'est exactement ce que veut dire « être bijectif » !

Exercice 8.

(1) $D_1 = -1$ et $D_2 = 3$.

(2) Pour tout entier n, $D_{n+2} = -D_{n+1} + 2D_n$, c'est-à-dire que $b = -1$ et $c = 2$.

(3) Je pose $f : V \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(u) = (u_0, u_1)$. C'est un isomorphisme de $\mathbb{R}$–espaces vectoriels. En effet, d'une part elle est injective puisque si $u \in V$ et $u_0 = u_1 = 0$ alors la relation de récurrence implique que pour tout n, $u_{n+2} = 0$ et donc $u = 0$. D'autre part elle est surjective puisque si $x, y \in \mathbb{R}$ alors la suite u définie par $u_0 = x$, $u_1 = y$ et par la relation de récurrence $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 2u_n$, vérifie $f(u) = (x, y)$.

(4) Soit $\lambda \in \mathbb{Q}$ tel que $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $\lambda^2 = -\lambda + 2$, c'est-à-dire $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$ et donc $\lambda = 1$ ou -2. Réciproquement, ces deux valeurs de λ définissent des suites géométriques de V.

(5) Deux suites géométriques de raisons différentes forment une famille libre. Par conséquent, la suite $((-2)^n)_{n \geqslant 0}$ et la suite constante $(1)_{n \geqslant 0}$ forment une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 2, c'en est donc une base.

(6) La suite $(D_{n+1})_{n \geqslant 0}$ est un élément de V et de plus

$$D_1 = -1 = \frac{1}{3} + \frac{-4}{3}$$

$$D_2 = 3 = \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{-4}{3}$$

Par conséquent

$$D_n = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}$$

Exercice 9. $\det(M_a) = (-a)^n(1-n)$. En effet, soit B la matrice dont les coefficients sont tous des 1. Alors $M_a = -a(I_n - B)$ et en notant P le polynôme caractéristique de B on a que

$$\det(M_a) = (-a)^n P(1)$$

Or $B^2 = nB$ et la trace de B vaut n. Par conséquent ses valeurs propres sont n de multiplicité 1 et 0 de multiplicité $n-1$, et donc $P = X^{n-1}(X-n)$. D'où le résultat.

Exercice 10.

(1) Le calcul est le suivant

$$\begin{aligned}
\det A_t &= (t-2)\begin{vmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & t+6 \\ 4 & 6-t & 8 \end{vmatrix} \\
&= (t-2)\left((t-2)\begin{vmatrix} 5 & t+6 \\ 6-t & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & t+6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}\right) \\
&= (t-2)((t-2)(4+t^2)+8-4t) \\
&= t^2(t-2)^2
\end{aligned}$$

(2) A_t n'est pas inversible si et seulement si $\det A_t \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $t = 0$ ou 2.

(3) Si $t \neq 0, 2$ alors A_t est inversible et donc $\ker A_t = \{0\}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $A_t x = 0$.

- Dans le cas où $t = 0$, on a $-2x_2 = 0$ et donc l'égalité $x_3 = -2x_1$, et donc $-6x_1 + 6x_4 = -8x_1 + 8x_4 = 0$. Donc $x_4 = -x_1$. Il en suit que le noyau de A_0 est de dimension 1 engendré par le vecteur $(-1, 0, -2, 1)$.
- Dans le cas où $t = 2$, on obtient $x_2 = -x_3$ et $x_1 = -2x_4$. Il en suit que le noyau de A_2 est de dimension deux engendré par les vecteurs $(0, 1, -1, 0)$ et $(1, 0, 0, -2)$.