

ÉNONCÉS DU COURS

Soient E un espace vectoriel sur K de dimension finie n et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme.

DÉFINITION. Le polynôme caractéristique de u est le polynôme $P_u(X)$ défini par

$$P_u(X) = \det(XI_n - M)$$

où M est la matrice de u dans n'importe quelle base.

DÉFINITION. u est dit **diagonalisable** s'il existe une base de vecteurs propres pour u , c'est-à-dire s'il existe une base (e_1, \dots, e_n) et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Une matrice M est dite **diagonalisable** si elle est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable, ou de manière équivalente s'il existe P inversible telle que PMP^{-1} est diagonale.

PROPOSITION. Si u est diagonalisable alors ses valeurs propres sont les racines de P_u , et de plus $\dim_K \ker(u - \lambda \text{id}_E)$ est la multiplicité de λ en tant que racine de P_u .

COROLLAIRE. Si u est diagonalisable alors la trace de u est la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités et son déterminant est le produit de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités.

LEMME. Soient $f, g : E \rightarrow E$ deux endomorphismes d'un K -espace vectoriel E tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\text{im } f, \text{im } g, \ker f, \ker g$ sont stables par f et g .

Preuve. Il suffit de montrer que $\text{im } f$ et $\ker f$ sont stables par g puisque par ailleurs f commute avec lui-même. Soit $y \in \text{im } f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \in \text{im } f$$

Soit $x \in \ker f$. Alors

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$$

c'est-à-dire $g(x) \in \ker f$. □

THÉORÈME. (HAMILTON-CAYLEY) $P_u(u) = 0$.

EXERCICES

EXERCICE 1.

- (1) $P_A(X) = (X + 1)(X - 1)(X - 2)$.
- (2) Oui car $P_A(X)$ est scindé à racines simples.
- (3) On note $V_\lambda := \ker(A - \lambda I_3)$.

$$V_1 = \langle (3, -3, 2) \rangle \quad V_2 = \langle (3, -2, 1) \rangle \quad V_{-1} = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

EXERCICE 2.

(1) $P_B(X) = X^4 - X^3 - 10X^2 + 29X - 2 = (X - 1)^2(X + 1)(X - 2)$.

(2) B est diagonalisable si et seulement si l'espace $\ker(B - I_4)$ est de dimension 2. Soient (x, y, z, w) un vecteur de $\ker(B - I_4)$. Alors premièrement $x + y + z + w = 0$ et $x + y = 0$, c'est-à-dire $x = -y$ et $z = -w$. Finalement $2x + 2z = 0$. Donc $\ker(B - I_4)$ ne peut pas être de dimension 2.

EXERCICE 3.

(1) E est de dimension 3 puisque une suite u de E est entièrement déterminée par récurrence par les 3 premiers termes u_0, u_1, u_2 , et réciproquement on peut définir par récurrence une suite de E en spécifiant les valeurs souhaitées pour les trois premiers termes, c'est-à-dire que $u \mapsto (u_0, u_1, u_2)$ est un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels $E \rightarrow \mathbb{C}^3$.

(2) Le polynôme en question est

$$X^3 - aX^2 - bX - c$$

(3) [Réponse « à la ChatGPT » (ou « à la DeepSeek », « à la Mistral », etc.)]
Soit $u \in E$. Alors la suite $D(u)$ vérifie la relation de récurrence

$$D(u)_{n+3} = aD(u)_{n+2} + bD(u)_{n+1} + cD(u)_n$$

puisque cette relation n'est rien d'autre que

$$u_{n+4} = au_{n+3} + bu_{n+2} + cu_{n+1}$$

qui est vraie puisque c'est la relation de récurrence de $u \in E$ évaluée en $n + 1$.

[Réponse humaine] E est le noyau de $D^3 - aD^2 - bD - cid_S$. Il en suit que E est stable par D puisque D et $D^3 - aD^2 - bD - cid_S$ commutent !

(4) Les trois suites sont linéairement indépendantes puisqu'elles sont des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes d'un même endomorphisme (D en l'occurrence).

(5) $u_{99} = 1 - (-1)^{99} + 2^{99} = 2(1 + 2^{98})$ et $u_{100} = 1 - (-1)^{100} + 2^{100} = 2^{100}$.

EXERCICE 5.

Dans la suite, si M est diagonalisable sur K alors je noterai U_M la matrice telle que

$$M = U_M \Delta_M U_M^{-1}$$

où Δ_M est diagonale avec les valeurs propres prises dans un certain ordre, autrement dit U_M est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de M . De plus, si M est diagonalisable sur \mathbb{R} alors elle l'est en particulier sur \mathbb{C} et la diagonalisation reste valide.

• $A^2 = 2A$ donc $P_A(X) = X(X - 2)$. A est diagonalisable puisque P_A est scindé à racines simples. J'obtiens

$$U_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• $P_{B_t}(X) = (X-t)^2$. Par conséquent B_t a au plus une unique valeur propre t . Si elle est diagonalisable alors $B_t = tI_2$ ce qui n'est manifestement pas le cas.

• $P_C(X) = X^2 - 2X + 2 = (X - (1+i))(X - (1-i))$. C n'est donc pas diagonalisable sur \mathbb{R} , mais l'est sur \mathbb{C} . Dans ce deuxième cas

$$U_C = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_C = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Notez que pour trouver les vecteurs propres, il suffit d'en connaître un puisque le second est obtenu en conjuguant les coordonnées.

• $P_D(X) = X^2 - 2$ qui est scindé à racines simples sur \mathbb{R} . D est donc diagonalisable sur \mathbb{R} . J'obtiens

$$U_D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & -\sqrt{2} + 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

• (Comme pour $A...$) $E^2 - 3E = 0$ et $\text{tr } E = 3$ donc si E est diagonalisable alors E a pour valeurs propres 0 de multiplicité 2 et 3 de multiplicité 1. En effet, je trouve assez de vecteurs de propres et j'obtiens

$$U_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Pour trouver le polynôme minimal de F je calcule d'abord F^2 et j'obtiens que (F^2, F, I_3) est libre. Puis je calcule F^3 et j'obtiens $F^3 = 2F$. Par conséquent $P_F(X) = X^2(X - 3)$ et donc si F est diagonalisable alors F doit avoir un espace propre de dimension 2 pour la valeur propre 0. Or cet espace, qui n'est rien d'autre que $\ker F$, est de dimension 1 engendré par $(1, 0, -1)$. F n'est donc pas diagonalisable.

• $P_{G_t}(X) = X^2 - 2X - (3+t)$ de discriminant $-4(2+t)$. Si $t = -2$ alors (comme pour les matrices B_t) G_{-2} a au plus une valeur propre mais n'est pas une matrice scalaire donc n'est pas diagonalisable. Supposons désormais que $t \neq -2$. Alors G_t est diagonalisable sur \mathbb{C} car P_{G_t} est scindé à racines simples sur \mathbb{C} . C'est uniquement pour $t < -2$ que G_t est diagonalisable sur \mathbb{R} . En tous cas pour $t \neq -2$ j'obtiens

$$U_{G_t} = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{-(2+t)} & -2 - \sqrt{-(2+t)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{G_t} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{-(2+t)} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{-(2+t)} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 6.

$P_M(X) = (X-1)(X-2)(X+4)$. La matrice M est diagonalisable de valeurs propres 1, 2, -4, une matrice de vecteurs propres est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 7.

(1) Déjà fait.

(2)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma^n = \text{id}$ donc $\varphi_\sigma^n = \varphi_{\sigma^n} = \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$, et donc $J^n = I_n$.

(3) Je note $e_{n+1} := e_1$ et obtiens

$$\varphi_\sigma(v_k) = \sum_{i=1}^n \zeta_k^{i-1} \varphi_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^n \zeta_k^{i-1} e_{i+1} = \sum_{i=1}^n \zeta_k^{i-2} e_i = \zeta_k^{-1} v_k$$

v_k est donc un vecteur propre pour la valeur propre ζ_k^{-1} .

(4) [Réponse intelligente.] La famille $(v_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre puisqu'elle est formée de vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes.

[Réponse suivant l'indication...] Le déterminant de $(v_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ dans la base canonique est $V(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})$ qui est non nul puisque les ζ_i sont distincts, la famille est donc libre.

(5)

$$C(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_0 & x_3 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}$$

(6) Si $u(v) = \lambda v$ alors $u^i(v) = \lambda^i v$ et donc si P est un polynôme alors $P(u)(v) = P(\lambda)v$. Par conséquent v_k est vecteur propre de $C(x_0, \dots, x_{n-1})$ pour la valeur propre

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \zeta_k^{-i} \right) v_k$$

(7) Ce faisant, j'ai diagonalisé $C(x_0, \dots, x_{n-1})$ dans la base $(v_k)_{0 \leq k \leq n-1}$, son déterminant est donc le produit de ses valeurs propres

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \zeta_k^{-i} \right)$$