

ÉNONCÉS DU COURS

Soient E un espace vectoriel sur K de dimension finie n et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme.

DÉFINITION. u est dit trigonalisable s'il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $u(e_i) - \lambda_i e_i \in \text{Vect}(e_{i+1}, \dots, e_n)$.

DÉFINITION.

PROPOSITION. u est trigonalisable si et seulement si sa matrice est trigonale supérieure dans une base si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

COROLLAIRE. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie est trigonalisable.

Preuve. Le théorème fondamental de l'algèbre affirme que les polynômes à coefficients complexes sont tous scindés. □

THÉORÈME. (HAMILTON-CAYLEY) Le polynôme caractéristique de u s'écrit

$$P_u(X) = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u$$

et $P_u(u) = 0$.

EXERCICES

EXERCICE 1.

Il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Par conséquent le polynôme minimal de A divise X^p , et donc 0 est l'unique valeur propre de A . Finalement $P_A(X) = (X - 0)^n = X^n$.

EXERCICE 2.

(1) Soit $k \geq 1$. A est nilpotente donc A^k est nilpotente donc $P_{A^k}(X) = X^n$. En particulier le terme en X^{n-1} est nul donc $\text{Tr}(A^k) = 0$.

(2) A est à coefficients complexes donc trigonalisable. Il en suit en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les d valeurs propres distinctes de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ que pour tout $k \geq 1$,

$$\text{Tr}(A^k) = \alpha_1 \lambda_1^k + \dots + \alpha_d \lambda_d^k$$

On obtient donc le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_d \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^d & \cdots & \lambda_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice est $V(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \prod_i \lambda_i$, et donc si les λ_i sont distincts et non nuls alors α_i sont nuls : absurde. Donc il n'y a que 0 comme valeur propre. D'où le fait que A est nilpotente.

(3) Il suffit d'avoir la condition pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

EXERCICE 3.

(1) Soit Q le polynôme minimal de A . Alors Q est à coefficients réels et divise $X^2 + 1$ donc $P = X^2 + 1$.

(2). Les valeurs propres de A sont i et $-i$. Donc $P_A(X) = (X - i)^a(X + i)^b$, où a, b sont des entiers tels que $a + b = n$. Or P_A est à coefficients réels donc $a = b$ et donc $n = 2a$ est pair.

EXERCICE 4.

Supposons qu'une telle matrice B existe. Alors $\det B \in \mathbb{Q}$ et

$$(\det B)^2 = \det(B^2) = 2$$

ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

EXERCICE 5.

(1) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \left(\sum_{j=1}^n jx_j\right)i$$

et donc l'image de A est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$. Le théorème du rang

implique que $\dim(\ker A) = n - 1$.

(2) $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n i^2 > 0$. Donc A admet au moins une autre valeur propre que 0 qui est donc forcément de multiplicité 1. Cette valeur propre est précisément $\text{Tr}(A)$.

EXERCICE 6.

(1) A est diagonalisable car A admet quatre vecteurs propres. 0 n'est pas parmi celles-ci donc $\det A \neq 0$.

(2) L'égalité $A^4 = I_4$ implique que $A^{-1} = A^3$.

EXERCICE 7.

(1) Je note $e_s = 0$ si $s < 0$. En ces termes

$$J^k e_i = e_{i-k}$$

$$(2) \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^4 = 0.$$

(3) $A^2 = J$. Donc A est nilpotente et 0 est donc l'unique valeur propre de A . D'où $P_A(X) = X^4$.

(4) Le théorème de Cayley-Hamilton implique que $P_A(A) = A^4 = 0$, c'est-à-dire $J^2 = 0$. Absurde.

EXERCICE 8.

Premièrement, par linéarité $\varphi^i(x) \neq 0$ pour tout $i \leq d - 1$. Soient a_1, \dots, a_d tels que

$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i \varphi^i(x) = 0$$

Alors en appliquant φ^{d-1} on obtient $a_0 \varphi^{d-1}(x) = 0$ et donc $a_0 = 0$. Il en suit qu'en appliquant successivement φ^{d-k} (pour $k \in \{1, \dots, d\}$). On obtient que les a_i sont tous nuls.

EXERCICE 9. Les sous-espaces $\ker \varphi^k$ ($k \geq 0$) forment une suite croissante dans un espace vectoriel de dimension finie. Donc à partir d'un certain rang on a à la fois $\ker \varphi^k \subset \ker \varphi^{k+1}$ et $\dim \ker \varphi^k = \dim \ker \varphi^{k+1}$, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang N , $\ker \varphi^k = \ker \varphi^{k+1}$.