26 novembre 26

Cours.

Soit E un espace vectoriel réel. On dit que E est la **somme directe** des sous-espaces vectoriels V et W, et on note cela $E = V \oplus W$, si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = v + w$, où $v \in V$ et $w \in W$. Cela permet de définir deux fonctions p, q, qui sont en fait des applications linéaires $E \to E$, telles que si comme avant $x = v + w$ alors $p(x) = v$ et $q(x) = w$. L'application p est appelée **projection sur** V **parallèlement** à W, et q la projection sur W parallèlement à V. Ces applications vérifient les propriétés suivantes qui les caractérisent

- pour tout $x \in E$, $p(p(x)) = p(x)$, $q(q(x)) = q(x)$ et

$$x = p(x) + q(x)$$

- pour tout $v \in V$, $p(v) = v$ et $q(v) = 0$.
- pour tout $w \in W$, $p(w) = 0$ et $q(w) = w$.
- $\mathrm{Im}(p) = V$, $\mathrm{Ker}(p) = W$, $\mathrm{Im}(q) = W$, $\mathrm{Ker}(q) = V$.

Supposons maintenant que E est muni d'un produit scalaire.

On dit que E est la **somme directe orthogonale** des sous-espaces vectoriels V et W, et on note cela $E = V \overset{\perp}{\oplus} W$, si d'une part $E = V \oplus W$ et d'autre part quels que soient $v \in V, w \in W$, $\langle v, w \rangle = 0$. Les dimensions vérifient

$$\dim E = \dim V + \dim W$$

À V fixé il existe un unique sous-espace vectoriel W de E qui vérifie $E = V \overset{\perp}{\oplus} W$, on l'appelle **l'orthogonal** de V dans E et on le note $V^\perp$ (ATTENTION, le « dans E » n'est pas dans la notation mais il est très important !). On a les propriétés suivantes

- $V^\perp = \{x \in E \mid \forall v \in V,\ \langle v, x \rangle = 0\}$.
- $(V^\perp)^\perp = V$.
- $E = V \overset{\perp}{\oplus} V^\perp$, en particulier

$$\dim E = \dim V + \dim V^\perp$$

On appelle **projection orthogonale sur** V la projection sur V parallèlement à $V^\perp$, je la note p_V. D'après ce qui est écrit plus haut, pour tout $x \in E$,

$$x = p_V(x) + p_{V^\perp}(x)$$

Cela permet de calculer l'une à partir de l'autre. Enfin la distance d'un vecteur x à E est atteinte en la projection orthogonale de x sur V, autrement dit (refaites le dessin :))

$$\mathrm{dist}(x, V) = ||x - p_V(x)|| = ||p_{V^\perp}(x)||$$

Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormée de V, qui est donc de dimension $r \leqslant \dim E$. Alors on peut exprimer p_V de la façon suivante : pour tout $x \in E$,

$$p_V(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \ldots + \langle x, e_r \rangle e_r$$

Supposons que je ne dispose que d'une base $(b_1, \ldots, b_r)$ de V qui n'est pas **a priori** orthonormée. Alors le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_r)$ qui est la seule vérifiant les deux propriétés

- en notant $V_i := \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_i)$ et $V_0 = \{0\}$ on a $V_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$
- pour tout i, $\langle b_i, e_i \rangle > 0$.

On peut la calculer par récurrence de la façon suivante. On pose $e_1 := b_1/||b_1||$ puis *c'est important* en considérant V_i comme un sous-espace de V_{i+1} :

$$e_{i+1} := \frac{p_{V_i^\perp}(b_{i+1})}{||p_{V_i^\perp}(b_{i+1})||}$$

c'est-à-dire

$$e_{i+1} := \frac{b_{i+1} - \langle b_{i+1}, e_1 \rangle e_1 - \langle b_{i+1}, e_2 \rangle e_2 - \ldots - \langle b_{i+1}, e_i \rangle e_i}{||b_{i+1} - \langle b_{i+1}, e_1 \rangle e_1 - \langle b_{i+1}, e_2 \rangle e_2 - \ldots - \langle b_{i+1}, e_i \rangle e_i||}$$

Autrement dit pour les trois premiers vecteurs $e_1 := b_1/||b_1||$ puis

$$e_2 := \frac{b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1}{||b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1||} \qquad e_3 := \frac{b_3 - \langle b_3, e_1 \rangle e_1 - \langle b_3, e_2 \rangle e_2}{||b_3 - \langle b_3, e_1 \rangle e_1 - \langle b_3, e_2 \rangle e_2||} \qquad \text{etc.}$$

Exercices.

Exercice 7. TD 1.

(3) Je généralise en dimension n. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme tel que $f^n = f \circ f \circ \cdots f = 0$. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Alors il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, je montre que la famille $(f^{n-1}(x), \ldots, f(x), x)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et qu'elle convient. Comme elle est de taille n il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ des nombre réels tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \ldots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$$

En appliquant f^{n-1} j'obtiens que

$$\lambda_0 f^{n-1}(x) + \lambda_1 f^n(x) + \ldots + \lambda_{n-1} f^{2n-1}(x) = 0$$

c'est-à-dire $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$, et donc que $\lambda_0 = 0$. De même j'applique f^{n-2} et obtiens que $\lambda_1 f^{n-1}(x) = 0$, donc que $\lambda_1 = 0$. Ainsi de suite je démontre que tous les λ_i sont nuls. La matrice associée est bien celle que l'on veut puisque l'image de x par f est $f(x)$, celle de $f(x)$ est $f^2(x)$ et ainsi de suite.

Exercice 4. TD 2.

(1) F est le noyau de la forme linéaire non-nulle

$$\Phi : (x, y, z) \longmapsto x + y + z$$

donc F est de dimension $3 - 1 = 2$. Pour disposer d'une base orthonormée de F, il suffit d'appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à n'importe quelle base de F. Partons par exemple de la base $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$. L'algorithme donne comme premier vecteur

$$b_1 := \frac{(1, -1, 0)}{||(1, -1, 0)||} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$$

Calculons ensuite

$$(1, 0, -1) - \langle (1, 0, -1), b_1 \rangle b_1 = (1, 0, -1) - (1/2, -1/2, 0) = (1/2, 1/2, -1)$$

et donc le deuxième vecteur est

$$b_2 := \frac{(1/2, 1/2, -1)}{||(1/2, 1/2, -1)||} = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$$

(b_1, b_2) est donc une base orthonormée de F.

Maintenant calculons p_F. Comme (b_1, b_2) est une base orthonormée de F on peut exprimer p_F par la formule suivante

$$p_F(x) = \langle x, b_1\rangle b_1 + \langle x, b_2\rangle b_2$$

On veut la matrice de p_F dans la base canonique, on calcule donc l'image des trois vecteurs e_1, e_2, e_3 de la base canonique, c'est-à-dire

$$p_F((1,0,0)) = (1/2, -1/2, 0) + (1/6, 1/6, -2/6) = (2/3, -1/3, -1/3)$$

$$p_F((0,1,0)) = (-1/3, 2/3, -1/3)$$
$$p_F((0,0,1)) = (-1/3, -1/3, 2/3)$$

La matrice de p_F dans la base canonique est donc

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) La distance d d'un vecteur v à F est égal à la distance entre v et la projection orthogonale de v sur F, c'est-à-dire $d = ||v - p_F(v)||$. Ici $v = (1,1,1)$ et $p_F(v) = (0,0,0)$, donc

$$d = \sqrt{3}$$

Exercice 5. TD 2.

(1). On peut réécrire H sous la forme suivante

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x, a\rangle = 0\}$$

Par conséquent a est normal à H (c'est-à-dire orthogonal à tous les vecteurs de H), et donc le vecteur $u := a/||a||$ est normal unitaire à H.

(2). D'après ce qui précède $H^\perp = \mathrm{Vect}(u)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$p(x) = \frac{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n}{||a||}u$$

En effet, p vérifie les deux propriétés suivantes $p_{|H} = 0$ et $p(u) = u$, faisant de p la projection orthogonale sur $H^\perp$.

(3). Si $x \in \mathbb{R}^n$ alors la distance de x à H est réalisée par la norme de $p(x)$, c'est-à-dire

$$\frac{|a_1x_1 + \ldots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$$

Exercice 6. TD 2.

On peut calculer l'infimum comme la distance de $Q(X) = 1 + X + X^2$ à $\mathbb{R}_1[X]$ (qui est le sous-espace des polynômes de degré $\leqslant 1$). D'après l'exercice 2, la famille $(1, \sqrt{3}(2X-1))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$. Par conséquent la distance à calculer est la distance de $Q(X)$ à sa projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$. Calculons d'abord les deux produits scalaires

$$\int_0^1 (1 + t + t^2)\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$\int_0^1 (1+t+t^2)\sqrt{3}(2t-1)\mathrm{d}t = 2\sqrt{3}\frac{13}{12} - \sqrt{3}\frac{11}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Donc finalement la distance vaut la racine carrée de

$$\int_0^1 (1+t+t^2-11/6-(2t-1))^2\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^2-t+1/6)^2\mathrm{d}t$$

qu'on déjà calculée (exercice 2). La distance vaut donc $\frac{1}{\sqrt{180}}$.

Exercice 7. TD 2.

(1). Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

$$M = \frac{M+{}^tM}{2} + \frac{M-{}^tM}{2}$$

et de plus si M est à la fois antisymétrique et symétrique alors $M = {}^tM = -M$ et donc $M = 0$. D'où la décomposition en somme directe. Soient A antisymétrique et S symétrique. Alors

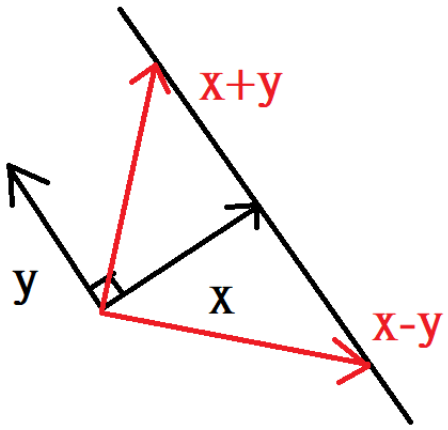
$$\mathrm{Tr}({}^tAS) = -\mathrm{Tr}(AS) = -\mathrm{Tr}(SA) = -\mathrm{Tr}({}^tSA) = -\mathrm{Tr}({}^t({}^tSA)) = -\mathrm{Tr}({}^tAS)$$

donc $\mathrm{Tr}({}^tAS) = 0$. La somme est donc orthogonale. Le projeté orthogonal de M sur $S_n(\mathbb{R})$ est donc $\frac{M+{}^tM}{2}$.

(2). La distance est donnée par la norme de $\frac{M-{}^tM}{2}$, c'est-à-dire $\sqrt{(n-1)/2}$.

Exercice 8. TD 2.

(1) Sur un dessin on voit que $||x+\lambda y||$ est $\geqslant ||x||$ (par exemple $\lambda = \pm 1$) :



Soient $x, y \in E$. Supposons que $\langle x, y\rangle = 0$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$||x+\lambda y||^2 = ||x||^2 + \underbrace{2\lambda\langle x,y\rangle}_{=0} + \underbrace{\lambda^2||y||^2}_{\geqslant 0} \geqslant ||x||^2$$

Réciproquement, si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $||x+\lambda y||^2 \geqslant ||x||^2$, alors $\lambda \mapsto \lambda^2||y||^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle$ est une fonction positive, mais ce n'est possible que si $\langle x,y\rangle = 0$.

(2) Soit p une projection. Supposons qu'elle est orthogonale. Soit $x \in E$. Alors $p(x)$ et $x-p(x)$ sont orthogonaux (car l'un appartient à l'image et l'autre au noyau de p, qui sont par hypothèse en somme directe orthogonale). Donc d'après la première question en prenant $\lambda = 1$ on obtient que

$$\underbrace{||p(x) + x - p(x)||}_{=||x||} \geqslant ||p(x)||$$

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in E$, $||p(x)|| \leqslant ||x||$. Montrons que $\mathrm{im}(p)$ et $\ker(p)$ sont en somme directe orthogonale (rappel : les éléments du second s'écrivent tous $y - p(y)$). Soient $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Je pose

$$u := p(x) + \lambda(y - p(y))$$

Alors par hypothèse $||p(u)|| \leqslant ||u||$ et on aussi que

$$p(u) = p(p(x)) + \lambda(p(y) - p(p(y))) = p(x) + 0$$

d'où finalement

$$||p(x)|| \leqslant ||p(x) + \lambda(y - p(y))||$$

Cette inégalité est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc on a montré que $p(x)$ et $y - p(y)$ sont orthogonaux, quels que soient $x, y \in E$, c'est-à-dire que p est une projection orthogonale.

(3) Soit p une projection orthogonale. On veut montrer qu'elle est auto-adjointe, c'est-à-dire que quels que soient $x, y \in E$, $\boxed{\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), y\rangle}$. Comme le produit scalaire est bilinéaire, que p est linéaire et que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p)$, il suffit de montrer que cette égalité est vraie dans les quatres situations où x, y sont dans $\ker(p)$ ou $\mathrm{im}(p)$. Si les deux sont dans le noyau de p c'est immédiat car on a 0 des deux côtés de l'égalité. Si les deux sont dans l'image de p, alors on peut écrire $x = p(\xi)$ et $y = p(\eta)$ et donc

$$\langle x, p(y)\rangle = \langle p(\xi), p(p(\eta))\rangle = \langle p(\xi), p(\eta)\rangle = \langle p(p(\xi)), y\rangle = \langle p(x), y\rangle$$

Finalement par symétrie il reste un seul cas, disons $x \in \ker(p)$ et $y \in \mathrm{im}(p)$. Eh bien dans ce cas, $p(x) = 0$ donc il faut montrer que $\langle x, p(y)\rangle = 0$, mais cette égalité est vraie car p est orthogonale c'est-à-dire que les vecteurs du noyau (ici x) sont orthogonaux aux vecteurs image de p (ici $p(y)$).

(4) Supposons que p soit une projection auto-adjointe. Montrons que pour tout $x \in E$, $||p(x)|| \leqslant ||x||$. Soit $x \in E$. Alors

$$||p(x)||^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \underbrace{\langle p(x) - x, p(x)\rangle}_{=\langle p(p(x)-x), x\rangle = 0} + \langle x, p(x)\rangle$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique donc que

$$||p(x)||^2 \leqslant ||x|| \cdot ||p(x)||$$

Si $p(x) \neq 0$ alors on peut simplifier par $||p(x)||$ et obtenir $||p(x)|| \leqslant ||x||$, sinon c'est immédiat.

Exercice 9. TD 2.

(1) La matrice P est symétrique et on vérifie que $P^2 = P$. p est donc une projection et auto-adjointe, donc d'après l'exercice 8 c'est une projection orthogonale.

(2). (À savoir : le rang d'une projection est égal à sa trace !) p est une projection sur un espace de dimension $= \mathrm{Tr}(P) = 12/6 = 2$. Or si e_1, e_2, e_3 désignent les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors on vérifie que

$$p(e_1) + 2p(e_2) = p(e_3)$$

Donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}((5,-2,1),(-2,2,2))$. Finalement $\mathrm{Ker}(p)$ est de dimension 1, et n'importe quel vecteur non-nul le génère d'où $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}((1,2,-1))$. (Comment ai-je fait ? je prends le vecteur $6e_1$ qui a priori n'est pas dans l'image de p et je regarde $6e_1 - p(6e_1)$ qui est dans le noyau ; j'ai multiplié par 6 pour ne travailler qu'avec des entiers.)

Exercice 10. TD 2.

Je montre d'abord que $(\mathrm{Im}f)^\perp = \mathrm{Ker}f^*$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}f^*$. Alors pour tout $y \in E$, $\langle f(y), x\rangle = \langle y, f^*(x)\rangle = \langle y, 0\rangle = 0$, c'est-à-dire que $x \in (\mathrm{Im}f)^\perp$. Réciproquement, soit $x \in (\mathrm{Im}f)^\perp$. Alors pour tout $y \in E$, $\langle y, f^*(x)\rangle = \langle f(y), x\rangle = 0$, donc $f^*(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}f^*$.

Quels que soient $x, y \in E$,

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle f^*(f(x)), y\rangle = \langle f(f^*(x)), y\rangle = \langle f^*(x), f^*(y)\rangle$$

En particulier, pour tout $x \in E$, $||f(x)||^2 = ||f^*(x)||^2$ et donc $f(x) = 0$ si et seulement si $f^*(x) = 0$, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}f^* = \mathrm{Ker}f$.

Il en suit que $(\mathrm{Im}f)^\perp = \mathrm{Ker}f$. (Et on en déduit que $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^*$).

Exercice 1. TD 3.

(1) Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Alors

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \cos(\theta_2)\sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

(2) Comme $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$ on en déduit que

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1)$$

Par conséquent $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif. En revanche $O_2(\mathbb{R})$ ne l'est pas, par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne commute pas avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. TD 3.

(Une matrice A de taille n est dite **orthogonale** si ${}^tAA = I_n$. Elle est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes (resp. lignes) forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique.)

(1) Premièrement ${}^tAA = I_2$ car les vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, et ensuite

$$\det A = \frac{1}{4}\Big((2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2})\Big) = 1$$

Donc $A \in SO_2(\mathbb{R})$ qui est l'intersection de $O_2(\mathbb{R})$ et $SL_2(\mathbb{R})$.

(2) Comme $A \in SO_2(\mathbb{R})$ il existe θ tel que $A = R(\theta)$. Calculons A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que $A^2 = R(\pi/4)$. Donc $R(2\theta) = R(\theta)^2 = R(\pi/4)$, et finalement $\theta = \pi/8 \bmod 2\pi$. A est donc la matrice d'une rotation d'angle $\pi/8$.

Exercice 3. TD 3.

(1) A est orthogonale et $\det A = -1$. A est donc la matrice d'une réflexion. Calculons la droite stable par A, c'est-à-dire résolvons l'équation $AX = X$. On trouve avec $X = (x, y)$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{3}{2}x$$

c'est-à-dire la droite d'équation $y = \sqrt{3}x$, ou de façon équivalente la droite engendrée par le vecteur $(1, \sqrt{3})$. A est donc la matrice de la réflexion orthogonale par rapport à cette droite.

(2) De même pour la matrice B, cette fois-ci pour la droite d'équation $x = y$, ou de façon équivalente la droite engendrée par le vecteur $(1, 1)$.

(3) Il y a une erreur, il s'agit de la matrice $C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. En effet elle vérifie $C^2 = C$, c'est donc la matrice d'une projection. Comme la matrice est symétrique c'est que la projection est orthogonale. Calculons la droite fixée par C. L'équation $CX = X$ se reformule en l'équation $x = y$. C est donc la matrice de la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur $(1, 1)$.

(4) Comme pour A et B, la matrice D est orthogonale de déterminant -1. C'est donc une réflexion. Cette fois-ci la droite est engendrée par le vecteur $(\sqrt{2}-1, 1)$.

(5) E est une matrice orthogonale et de déterminant 1, elle correspond donc à une rotation du plan. On remarque en effet que $E = R(-\pi/6)$, c'est donc la matrice d'une rotation d'angle $-\pi/6$.

Exercice 4. TD 3.

(1) Soit $(x, y, z) \in \ker(f_A)$. Alors $5y = 10x$ et $20x = 10z$, c'est-à-dire $y = z = 2x$. Le noyau de f_A est donc de dimension 1 engendré par $(1, 2, 2)$. Quant à son image elle est de dimension 2 (d'après le théorème du rang) engendrée par les deux vecteurs $(6, 5, -8)$ et $(-10, 0, 5)$ (parmi les trois vecteurs colonnes de la matrice A j'en prends deux qui ne sont pas colinéaires ; en fait j'ai multiplié par 15 pour avoir des vecteurs à coefficients entiers). On vérifie

enfin que $(1,2,2)$ est orthogonal à $(6,5,-8)$ et à $(-10,0,5)$. D'où le fait que $\ker(f_A) \perp \mathrm{im}(f_A)$.

(2) Une base orthonormée de $\ker(f_A)$ est donnée par le vecteur normalisé

$$e_0 = (1/3, 2/3, 2/3)$$

J'amerais partir d'une base de $\mathrm{im}(f_A)$ avec des coefficients plus simples, par exemple les vecteurs $(-2,0,1) = \frac{1}{5}(-10,0,5)$ et

$$(-2,1,0) = \frac{1}{5}[(6,5,-8) + 8(-2,0,1)]$$

Puis j'applique l'algorithme de Gram-Schmidt. D'abord je pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1)$$

puis je calcule le vecteur

$$\begin{aligned} e_2 &= (-2,1,0) - \langle (-2,1,0), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1)\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1) \\ &= (-2/5, 1, -4/5) \end{aligned}$$

que je normalise en

$$e_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}(-2/5, 1, -4/5)$$

(e_1, e_2) est une base orthonormée de $\mathrm{im}(f_A)$ et e_0 est un vecteur unitaire directeur de la droite $\ker(f_A)$. Comme les deux sous-espaces sont en somme directe orthogonale il en suit que (e_0, e_1, e_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Enfin pour calculer la matrice de f_A dans cette base il suffit de calculer la matrice de $f_A : \mathrm{im}(f_A) \longrightarrow \mathrm{im}(f_A)$ restreinte à $\mathrm{im}(f_A)$, puisqu'on sait déjà que f_A est nulle sur $\ker(f_A)$. Come (e_1, e_2) est orthonormée, calculer la matrice de $f_A : \mathrm{im}(f_A) \longrightarrow \mathrm{im}(f_A)$ revient à calculer la matrice formée de quatre produits scalaires

$$\begin{pmatrix} \langle f_A(e_1), e_1\rangle & \langle f_A(e_2), e_1\rangle \\ \langle f_A(e_1), e_2\rangle & \langle f_A(e_2), e_2\rangle \end{pmatrix}$$

Je trouve

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

La matrice de f_A dans la base (e_0, e_1, e_2) est donc en notant $\theta := \arccos(3/5)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

f_A correspond donc à la composée de la projection sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et d'une rotation d'angle θ.

Exercice 5. TD 3.

La matrice A est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormée, c'est-à-dire si et seulement si

$$a^2 + 2b^2 = 1 \quad \text{et} \quad b^2 + 2ab = 0$$

A est donc orthogonale si et seulement si $(a,b) = (\pm 1, 0)$ ou $(a,b) = \pm(-1/3, 2/3)$. Dans le premier cas il s'agit de la matrice $\pm I_3$. Traitons donc le deuxième cas, par exemple lorsque $(a,b) = (-1/3, 2/3)$. Calculons les valeurs propres de A à partir de son polynôme caractérsitique P. On a

$$P(X) = \begin{vmatrix} X+1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & X+1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & X+1/3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X+1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & X+1/3 & -2/3 \\ 0 & -X-1 & X+1 \end{vmatrix}$$

$$= (X+1/3)\begin{vmatrix} X+1/3 & -2/3 \\ -X-1 & X+1 \end{vmatrix} + 2/3\begin{vmatrix} -2/3 & -2/3 \\ -X-1 & X+1 \end{vmatrix}$$

$$= (X+1/3)\begin{vmatrix} X-1/3 & -2/3 \\ 0 & X+1 \end{vmatrix} - 8/9(X+1)$$

$$= (X^2 - 1/9 - 8/9)(X+1) = (X+1)(X^2-1) = (X+1)^2(X-1)$$

Par conséquent l'espace propre pour 1 est donc de dimension 1. Ainsi dans une base orthonormée A est sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En résolvant l'équation $AX = X$ on détermine que la droite fixée par A est engendrée par $(1,1,1)$ et donc A est la matrice d'un retournement d'axe $(1,1,1)$.

Exercice 6. TD 3.

Soient $x, x' \in \mathbb{R}^3$. Rappelons que si $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire alors

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, x'_1e_1 + x'_2e_2 + x'_3e_3) = \sum_{i,j} x_i x'_j f(e_i, e_j)$$

Or ici on peut considérer f défini par

$$f(x, x') = \langle x \wedge e_1, x' \wedge e_1 \rangle + \langle x \wedge e_2, x' \wedge e_2 \rangle + \langle x \wedge e_3, x' \wedge e_3 \rangle$$

et en dans le cas $x = x'$ on obtient l'expression qu'initialement on voulait calculer. La matrice $(f(e_i, e_j))_{i,j}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc finalement si $||x|| = 1$ alors

$$||x \wedge e_1||^2 + ||x \wedge e_2||^2 + ||x \wedge e_3||^2 = f(x,x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2$$

On peut en déduire que pour au moins un indice $i \in \{1,2,3\}$ on a l'inégalité $||x \wedge e_i|| \geqslant \sqrt{2/3}$.

Exercice 7. TD 3.

(1) On a $e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3 = -e_2$ et $(e_1 \wedge e_1) \wedge e_2 = 0$, donc le produit vectoriel n'est pas associatif.

(2) On a affaire à deux applications trilinéaires $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi : (u, v, w) \longmapsto u \wedge (v \wedge w) \qquad \psi : (u, v, w) \longmapsto \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$$

Pour montrer qu'elles sont égales il suffit de montrer qu'elles coïncident sur les triplets (e_i, e_j, e_k), où $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. En fait il suffit de le vérifier pour $j \neq k$ puisque si $j = k$ on vérifie directement que φ et ψ prennent la même valeur, et d'enlever les cas où les trois indices sont distincts puisqu'on vérifie dans ces cas que φ et ψ sont nuls. Reste que pour φ et ψ on a bien

$$(e_1, e_1, e_2) \longmapsto -e_2 \qquad (e_1, e_1, e_3) \longmapsto -e_3 \qquad (e_1, e_2, e_1) \longmapsto e_2$$

$$(e_1, e_3, e_1) \longmapsto e_3 \qquad (e_2, e_1, e_2) \longmapsto e_1 \qquad (e_2, e_2, e_1) \longmapsto -e_1$$

$$(e_2, e_3, e_2) \longmapsto e_3 \qquad (e_3, e_1, e_3) \longmapsto e_1 \qquad (e_3, e_2, e_3) \longmapsto e_2$$

$$(e_3, e_3, e_1) \longmapsto -e_1 \qquad (e_3, e_3, e_2) \longmapsto -e_2 \qquad (e_2, e_2, e_3) \longmapsto -e_3$$

(3) À partir de la formule du 2 on a que

$$u\wedge(v\wedge w)+w\wedge(u\wedge v)+v\wedge(w\wedge u) = \langle u, w\rangle v-\langle u, v\rangle w+\langle w, v\rangle u-\langle w, u\rangle v+\langle v, u\rangle w-\langle v, w\rangle u$$

Le produit scalaire étant symétrique on peut simplifier et obtenir

$$u \wedge (v \wedge w) + w \wedge (u \wedge v) + v \wedge (w \wedge u) = 0$$