Exercices de mathématiques

Salim ALLOUN [1]

2016-2019

1. Principaux fournisseurs des exercices : Frédéric CUVELLIER, professeur de mathématiques et d'informatique de la classe de MPSI 1 du lycée Kléber, né en 1967, ainsi que de Philippe PISTER, professeur de mathématiques de la classe de MPSI 3 du lycée Kléber, de Patrick GENAUX, professeur de mathématiques de la classe de MP* du lycée Kléber et de Frédéric SUFFRIN, professeur de mathématiques de la classe de MP 2 du lycée Kléber.

Notations

- L'application de X dans E qui transforme tout élément de X en a est appelée constante-a, où a est un élément d'un ensemble E non vide.
- h_λ désigne l'homothétie de rapport λ.
- $\delta_{hk} = 1$ si $h = k$ et $\delta_{hk} = 0$ si $h \neq k$.
- $|\mathrm{E}|$ et Card E désignent le cardinal de E.
- $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ désigne l'ensemble des parties de E.
- $\mathfrak{P}_k(\mathrm{E})$ désigne l'ensemble des parties de E de cardinal k.
- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.
- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.
- $\mathbf{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.
- $\mathbf{U}_n$ l'ensemble des nombres complexes solutions de $z^n = 1$, où n est un entier naturel non nul.
- $\mathbf{K}$ désigne exclusivement $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- $\mathbf{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbf{Z}$ désigne l'ensemble des nombres entiers relatifs.
- $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ désigne $\mathbf{Z}$ quotienté par la relation binaire $x\ R\ y =$ "Le reste de la division euclidienne par l'entier naturel non nul n de x et de y sont égaux.".
- e_{G}, 0_{A} et 1_{A} désignent respectivement l'élément neutre de G, l'élément neutre pour l'addition de A et celui pour la multiplication de A (G et A sont donc respectivement un groupe et un anneau).
- Si f est un morphisme de groupes, d'anneaux, d'espaces vectoriels et bien d'autres encore alors on note Ker f l'ensemble des éléments où f prend la valeur de l'élément neutre pour l'addition.
- Id_{X} désigne l'application de X dans X qui transforme x en x.
- $f(a-)$ (resp. $f(a+)$) désigne la limite à gauche (resp. à droite) de f en a.
- p_n désigne la fonction $x \longmapsto x^n$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, où n est un entier *naturel.*
- Π_α désigne la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, où α est un nombre réel.
- $\mathcal{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ désigne l'ensemble des fonctions de X dans Y et $\mathfrak{S}_{\mathrm{X}}$ l'ensemble des permutations de X.
- $\mathcal{I}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathcal{S}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ désignent respectivement l'ensemble des fonctions injectives et l'ensemble des fonctions surjectives de X dans Y.
- $\mathcal{C}^r(\mathrm{I})$ désigne l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^r$.
- χ_{A} désigne la fonction de E dans $\{0, 1\}$ caractéristique de la partie A de E.
- $\mathcal{L}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ ou $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ désignent l'ensemble des applications linéaires de E dans F, où E et F sont des espaces vectoriels sur K.
- $\mathrm{B}(\mathrm{X}, \mathbf{K})$ ou $\mathrm{B}_{\mathbf{K}}(\mathrm{X})$ désignent l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbf{K}$.
- $\mathrm{T}_n f_a(x)$ désigne le développement de Taylor de f en a évalué en x, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$.
- $\mathrm{r}_n(f, a; x)$ désigne le reste du développement de Taylor de f en a évalué en x, c'est-à-dire $f(x) - \mathrm{T}_n f_a(x)$.
- $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des premiers et $\mathcal{P}^\infty$ l'ensemble des p^α, où $p \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbf{N}^*$.

Sommaire

1

Algèbre

1.1 Structures algébriques fondamentales

Exercice 1.1.1

Soit (G, $\cdot$) un groupe. Montrer que G est abélien si et seulement si l'application $x \longmapsto x^2$ est un endomorphisme du groupe G.

Exercice 1.1.2

Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'entier naturel non nul n pour que l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ soit intègre.

Exercice 1.1.3

Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement. Pour toute partie A et tout élément x de G, on note Ax (resp. xA) l'ensemble des éléments ax (resp. xa) de G obtenus pour $a \in$A.

1) Soit H un sous-groupe de G.
   a) Calculer $\bigcup_{x\in \mathrm{G}} x\mathrm{H}$.
   b) Vérifier que, pour tout élément x de G, l'application $h \longmapsto xh$ de H dans xH est bijective.
   c) En déduire que le cardinal de G, dans le cas où il est fini, est multiple de celui de H.

Pour tout élément g de G, on note ϕ_g l'application $x \longmapsto gxg^{-1}$ de G dans G. Il est immédiat que c'est une permutation de G.

2) a) Vérifier que l'application $\Phi : g \longmapsto \phi_g$ de G dans $\mathfrak{S}_{\mathrm{G}}$ est un homomorphisme de groupe.
   b) Démontrer que, pour tout élément $x$de G, l'ensemble C(x) des éléments de G permutables à x est un sous-groupe de G et $\bigcap_{x\in \mathrm{G}} \mathrm{C}(x)$ est le noyau Z de Φ.
3) Soit x un élément de G. On note Ω_x la partie de G formée des éléments $\phi_g(x)$ obtenus pour $g \in$G.
   a) Démontrer que, pour tout couple (g, h) d'éléments de G, on a $\phi_g(x) = \phi_g(h)$ si et seulement si h appartient à gC(x).
   c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Ω_x possède un seul élément.
4) On suppose désormais que G est un groupe fini dont le cardinal est une puissance d'un certain nombre premier p. Le nombre d'éléments de tout sous-groupe de G est donc une puissance de p.
   a) Démontrer que, pour tout élément x de G, le cardinal de Ω_x est une puissance de p.
   b) En déduire que Z possède au moins p éléments. *(Remarquer que G est la réunion des ensembles Ω_x et dénombrer ceux qui possèdent un seul élément.)*
5) Démontrer que si le groupe G a p^2 éléments alors il est commutatif.

Exercice 1.1.4

Soit A un anneau. Montrer que si tous les éléments de A sont idempotents alors A est commutatif.

Exercice 1.1.5

On appelle radical d'un entier naturel différent de 0, le produit de ses diviseurs premiers. Montrer que dans l'anneau $\mathbf{Z}$ le radical de l'idéal engendré par un entier strictement positif n est l'idéal engendré par le radical de n.

Exercice 1.1.6

Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est e.

1) Démontrer que, pour tout élément g de G, l'application $\varphi_g : x \mapsto gxg^{-1}$ de G dans G est un automorphisme.

On suppose désormais d'une part que G possède, outre e, des éléments a et b tels que

$$ab = b^{-1}a = ba^{-1},$$

d'autre part que $G =< a, b >$.

2) a) Exprimer b^2 et b^{-2} en fonction de a.
   b) Calculer a^4 et b^4.
3) On suppose $ab = ba$.
   a) Calculer a^2 et b^2.
   b) Démontrer que G possède exactement quatre éléments et donner la table de sa loi.
4) On suppose $ab \neq ba$.
   a) Vérifier que les éléments de G sont $e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b$.
   b) Démontrer que G possède exactement huit éléments et donner la table de sa loi.

Exercice 1.1.7 **#Corrigé !**

Soit G un groupe n'admettant aucun sous-groupe non trivial. Montrer que G est monogène et fini de cardinal un nombre premier.

Exercice 1.1.8 **#Corrigé !**

Soient p, q deux nombres premiers tels que $p < q$. Montrer qu'un groupe de cardinal pq ne peut admettre plus d'un sous-groupe de cardinal q.

Exercice 1.1.9 **#Corrigé !**

Soient p un nombre premier. Montrer que tout sous-groupe de cardinal $2p$ admet un élément d'ordre p.

Exercice 1.1.10 **#Corrigé !**

Soit G un groupe abélien de cardinal pq, où p et q sont deux nombres premiers distincts. Montrer que G est cyclique.

Exercice 1.1.11 **#Corrigé !**

Soit G un groupe fini tel que pour tout x de G, $x^2 = e$. Montrer que $|G| = 2^n$, où n est un entier naturel.

Exercice 1.1.12

Montrer qu'un groupe est fini si et seulement s'il admet un nombre fini de sous-groupes.

Exercice 1.1.13

Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 1.1.14 **#Corrigé !**

Déterminer les idéaux maximaux de l'anneau des fonctions numériques réelles, continues sur un segment S ($\mathcal{C}^0(\mathrm{S})$).

Exercice 1.1.15

Soit G un groupe commutatif.

a) Soient H, K des sous-groupes de G. Montrer que HK est un sous-groupe de G.
b) Pour tout entier naturel non nul n, notons T_n le noyau de $x \mapsto x^n$. Démontrer que la réunion T de la famille $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est un sous-groupe de G. On le nomme *sous-groupe de torsion* de G.
c) Vérifier que si G est fini alors T = G.
d) Soient m, n des nombres entiers naturels non nuls. Démontrer que $\mathrm{T}_m \cap \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_{m\wedge n}$.
e) Soient m, n des entier naturels tels que $m \wedge n = 1$. Déterminer les morphismes de groupes de T_m dans T_n et démontrer que $\mathrm{T}_m\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_{mn}$.
f) En déduire que $\mathrm{T} = \prod_{p\in\mathfrak{P}} \mathrm{T}_{p^\infty}$, où $\mathrm{T}_{p^\infty} = \cup_{k\geqslant 1}\mathrm{T}_{p^k}$.
g) Soient p un nombre premier et m, n des nombres entiers naturels. Vérifier que $x \mapsto x^{p^m}$ est un morphisme de $\mathrm{T}_{p^{m+n}}$ dans T_{p^n}. Quel est son noyau ?

Exercice 1.1.16 **#Corrigé !**(enfin presque...)

Soit G un groupe commutatif. Soit A l'ensemble des applications de G dans $\mathbf{Z}$ à support fini.

1) Soient f, g des éléments de A. Vérifier que les applications
$$u : x \longmapsto f(x) + g(x) \text{et} v : x \longmapsto \sum_{yz=x} f(y)g(z)$$
de G dans $\mathbf{Z}$ sont à support fini. Sont donc définies une loi additive et une loi multiplicative.
2) Démontrer que A est un anneau selon les lois précédentes.
3) Décrire les inversibles de A.
4) Déterminer un monomorphisme de G dans A^*.

Exercice 1.1.17 **#Corrigé !**

Soit A un sous-anneau de $\mathbf{Q}$.

1) Soient p, q deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que si $p/q \in \mathrm{A}$ alors $1/q \in \mathrm{A}$.
2) Soit I un idéal de A différent de $\{0\}$. Alors il existe un entier strictement positif n tel que $\mathrm{I}\cap\mathbf{Z} = n\,\mathbf{Z}$, et donc $\mathrm{I} = n\mathrm{A}$.
3) Soit p un nombre premier. Je note $\mathbf{Z}_{(p)} := \{a/b, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}^* \text{et} p \wedge b = 1\}$. Montrer que si $x \in \mathbf{Q}^*$ alors $x \in \mathbf{Z}_{(p)}$ ou $1/x \in \mathbf{Z}_{(p)}$.
4) Soit A un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{Q}^*, x \in \mathrm{A}$ ou $1/x \in \mathrm{A}$. Soit $\mathrm{I} := \mathrm{A} - \mathrm{A}^*$. Alors I est un idéal maximal de A. En déduire que $\mathrm{A} = \mathbf{Z}_{(p)}$, pour un certain nombre premier p.

Exercice 1.1.18

Un anneau A est dit régulier si pour tout a de A, il existe u tel que $aua = a$.

1) Montrer que si A est un anneau régulier intègre alors c'est un corps.
2) Montrer que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est régulier si et seulement si n est *quadratfrei*.

3) Montrer que si E est un $\mathbf{K}$ −espace vectoriel de dimension finie alors $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est régulier.

Exercice 1.1.19

Soit G un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer que tous les éléments de G ne sont pas nécessairement inversibles dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, et qu'ils ont tous le même rang. Que représente E ?. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ si et seulement s'il possède une matrice inversible.

Exercice 1.1.20

Soit L un sous-corps de $\mathbf{C}$ et G un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathrm{L})$ de cardinal $p > 0$. Soit $\mathrm{P} := \frac{1}{p}\sum_{\mathrm{M}\in\mathrm{G}} \mathrm{M}$. Montrer que P est un projecteur. Que dire de P si la trace de $\sum_{\mathrm{M}\in\mathrm{G}} \mathrm{M}$ est nulle ?

Exercice 1.1.21 **#Corrigé !**

Soit G un groupe abélien d'ordre n. Notons r le plus grand ordre d'élément de G : l'*exposant* de G.
1) Montrer que si $m \wedge n = 1$, a d'ordre m, b d'ordre n alors ab est d'ordre mn.
2) Montrer que r divise n et que pour tout x dans G, l'ordre de x divise r.
3) Montrer que r et n ont les mêmes facteurs premiers.
4) En déduire que pour tout nombre premier p divisant n, il existe un élément d'ordre p. *(Théorème de Cauchy).*

Exercice 1.1.22

Soit G un groupe de cardinal $2n$. Démontrer qu'il existe un élément d'ordre 2. *(On pourra utiliser la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y = (x = y)$ ou $(x = y^{-1})$.)*

Exercice 1.1.23

Soit A un anneau tel que pour tout $x \in \mathrm{A}, x^3 = x$.
1) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{A}, 6x = 0$.
2) On note $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{A}, 2x = 0\}$ et $\mathrm{C} = \{x \in \mathrm{A}, 3x = 0\}$. Montrer que B est un anneau et que $\mathrm{A} = \mathrm{B} + \mathrm{C}$.

Exercice 1.1.24

Soit G un sous-groupe de l'ensemble des fonctions affines de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui ont point fixe. Montrer que tous les éléments de G ont un point fixe en commun.

Exercice 1.1.25

Montrer que la fonction racine carrée est bien définie sur un groupe d'ordre impair et qu'elle est bijective.

Exercice 1.1.26 (Représentation d'un groupe fini)

Soit G un groupe fini. On appelle une représentation de G un couple (ρ, V) où V est un espace vectoriel de dimension finie et ρ un morphisme de G dans $\mathbf{GL}(\mathrm{V})$. On dit qu'elle est irréductible si pour tout $g \in \mathrm{G}$, $\rho(s)$ ne stabilise que des sous-espaces vectoriels triviaux. Deux représentations (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) sont isomorphes s'il existe un isomorphisme ϕ de V_1 dans V_2 telle que pour tout $s \in \mathrm{G}$,

$$\phi \circ \rho_1(s) = \rho_2(s) \circ \phi \quad (1).$$

De plus, on note $\xi(s) = \mathrm{tr}(\rho(s))$.

1) Montrer que quels que soient $s, t \in \mathrm{G}$,

$$\xi(s^{-1}) = \overline{\xi(s)},$$

$$\xi(st) = \xi(ts).$$

2) Supposons pour la suite que (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) sont des représentations irréductibles de G. Montrer que si f est non nulle et vérifiant (1) alors f est bijective, et que si $\rho_1 = \rho_2$ et $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2$ alors f est une homothétie.
3) Soit h un morphisme de V_1 dans V_2. Notons $h_0 := \dfrac{1}{|\mathrm{G}|}\displaystyle\sum_{s\in\mathrm{G}} \rho_2(s^{-1}) \circ h \circ \rho_1(s)$. Montrer que si h_0 est non nulle alors (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont isomorphes, et que si $\rho_1 = \rho_2$ et $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2$ alors $h_0 = \dfrac{\mathrm{tr}(h)}{\dim \mathrm{V}_1}\mathrm{Id}_{\mathrm{V}_1}$.

Exercice 1.1.27 (Théorème du complément de Frobenius)

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe strict de G. Supposons que pour tout $g \in \mathrm{G} - \mathrm{H}$, $\mathrm{H} \cap g\mathrm{H}g^{-1} = \{e_\mathrm{G}\}$. Notons

$$\mathrm{K} = \left(\mathrm{G} - \bigcup_{g\in\mathrm{G}} g\mathrm{H}g^{-1}\right) \cup \{e_\mathrm{G}\}.$$

1) Calculer le cardinal de K.
2) Supposons que H possède une involution i. Montrer que pour tout $g \notin \mathrm{H}$, $e_\mathrm{G} \neq igi^{-1} \in \mathrm{K}$.
3) En déduire que K est un sous-groupe de G.

Exercice 1.1.28 (Caractérisation des lois de groupe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$)

Soit $*$ une loi de groupe sur $\mathbf{R}$ telle que f définie par $f(x, y) = x * y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$. On note e l'élément neutre.

1) Montrer que quels que soient $x, y \in \mathbf{R}$, $\partial_2 f(x * y, e) = \partial_2 f(x, y)\partial_2 f(y, e)$.
2) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\partial_2 f(t, e) > 0$.
3) Soit ϕ un morphisme de groupes $\mathcal{C}^1$ de $(\mathbf{R}, *)$ dans $(\mathbf{R}, +)$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\phi(x) = \int_e^x \frac{a}{\partial_2 f(t, e)}\mathrm{d}t.$$

4) Réciproquement montrer que ϕ, définie par $\phi(x) = \int_e^x \frac{a}{\partial_2 f(t,e)}\mathrm{d}t$, est un morphisme de groupes $\mathcal{C}^1$ de $(\mathbf{R}, *)$ dans $(\mathbf{R}, +)$.

Exercice 1.1.29

Soit G le groupe des bijections continues d'un segment S de $\mathbf{R}$. Montrer que tout sous-groupe fini de G a au plus deux éléments.

Exercice 1.1.30

Soit G un groupe. Si H, K sont deux de ses sous-ensembles alors on note $[\mathrm{H}, \mathrm{K}]$ le sous-groupe engendré par l'ensemble formé des $(hk)(kh)^{-1}$, où $(h, k) \in \mathrm{H} \times \mathrm{K}$. On note également $\mathrm{D}(\mathrm{G}) = [\mathrm{G}, \mathrm{G}]$ et par récurrence $\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{G}) = \mathrm{D}(\mathrm{D}^n(\mathrm{G}))$.

1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
   a) Il existe n tel que $\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{G}) = \{e\}$.
   b) Il existe des sous-groupes $\{e\} = \mathrm{H}_0 \subset \mathrm{H}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{H}_r = \mathrm{G}$ tels que H_{k-1} est distingué dans H_k et $\mathrm{H}_k/\mathrm{H}_{k-1}$ est commutatif.
   c) Il existe des sous-groupes distingués $\{e\} = \mathrm{H}_0 \subset \mathrm{H}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{H}_r = \mathrm{G}$ tels que $\mathrm{H}_k/\mathrm{H}_{k-1}$ est commutatif.

2) Un groupe vérifiant les conditions précédentes est dit *résoluble*. Montrer que le sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble.
3) Soit H un sous-groupe distingué de G tel que H et G/H sont résolubles. Montrer que G est résoluble.
4) Montrer qu'un $p-$groupe [1] est résoluble.

Exercice 1.1.31

Soit G un groupe de cardinal p^n, où p est premier et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le centre de G n'est pas trivial.

Exercice 1.1.32

Soit G un sous-groupe strict de $(\mathbf{R}, +)$. Montrer que $\mathbf{R} - G$ est non dénombrable.

1.2 Espaces vectoriels

Dans les exercices suivants K est un *corps commutatif.*

Exercice 1.2.1 (Centre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$)

1) Soient E un espace vectoriel sur K et u un endomorphisme de E tel que, pour tout $\vec{x}$ de E, $(u(\vec{x}), \vec{x})$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2) En déduire que le centre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est constitué des homothéties $\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, où $\lambda \in \mathrm{K}$.
3) Quel est donc le centre de $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$?

Exercice 1.2.2

Soient E un espace vectoriel sur K et u un endomorphisme de E.
1) Montrer que Im $u \cap$ Ker $u = 0_{\mathrm{E}}$ si et seulement si Ker $u^2 =$ Ker u.
2) Montrer que Im $u +$ Ker $u = \mathrm{E}$ si et seulement si Im $u^2 =$ Im u.

Exercice 1.2.3

Soient E un espace vectoriel sur K, u un endomorphisme de E et f, g des polynômes de K[X] premiers entre eux. Montrer que Ker $fg(u) =$ Ker $f(u) \oplus$ Ker $g(u)$.

1. c'est-à-dire un groupe dont le cardinal est une puissance d'un nombre premier

1.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Dans les exercices suivants K est un *corps commutatif*, E un *espace vectoriel* sur K de *dimension finie* n et B $= (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une *base* de E.

EXERCICE 1.3.1

Montrer que pour tout endomorphisme u de E, u^n est une combinaison linéaire des applications $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, u, \ldots, u^{n-1}$.

EXERCICE 1.3.2

Soient F un espace vectoriel sur K et u, v des éléments de $\mathcal{L}_K(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Établir l'inégalité

$$|\mathrm{rg}\ u - \mathrm{rg}\ v| \leqslant \mathrm{rg}\ (u+v) \leqslant \mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v\ .$$

EXERCICE 1.3.3

Soient F un espace vectoriel sur K de dimension finie, G un espace vectoriel sur K, $u \in \mathcal{L}_K(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $v \in \mathcal{L}_K(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Montrer que

$$\mathrm{rg}\ (v \circ u) - \mathrm{rg}\ v - \mathrm{rg}\ u + \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{F} \geqslant 0.$$

EXERCICE 1.3.4 (Théorème d'essouflement) **#Corrigé !**

Soit $u \in \mathcal{L}_K(\mathrm{E})$. Montrer que $(d_k = \dim\ \mathrm{Ker}\ u^{k+1} - \dim\ \mathrm{Ker}\ u^k)_{k \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

EXERCICE 1.3.5

Soient E un **R**-espace vectoriel et $p_1, \ldots, p_k$ des projecteurs de E.

Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j$ est un projecteur si et seulement si pour tout i, j tel que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

EXERCICE 1.3.6

Soient E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

EXERCICE 1.3.7

Soit E un **C**-espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les endomorphismes u tels que tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

EXERCICE 1.3.8

Soit K un compact de E. Supposons que K est un voisinage de 0.
1) Montrer que l'ensemble S des endomorphismes stabilisant K est un compact de $\mathcal{L}(E)$.
2) Montrer que si $f \in S$ alors $|\det\ f| \leqslant 1$.
3) Le résultat de 1) est-il toujours valable si K n'est pas un voisinage de 0 ?

EXERCICE 1.3.9

Soient $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille de E*. Alors les relations suivantes sont équivalentes :

1. $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre.

2. L'application $x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$ de E dans $\mathbf{R}^p$ est surjective.
3. $\dim \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \ f_i = n - p$.

EXERCICE 1.3.10 (Polynôme local)

Le polynôme local de f en x est le générateur unitaire de l'idéal formé des polynômes P de K[X] tels que $\mathrm{P}(f)(x) = 0$.

1) Soit P un polynôme irréductible. Montrer que pour tout k, pour tout x de Ker $\mathrm{P}^k(f)$ n'appartenant pas à Ker $\mathrm{P}^{k-1}(f)$ est P^k.
2) En déduire qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que le polynôme minimal local de f en x est π_f.

EXERCICE 1.3.11 (Espace cyclique)

On dit que f est cyclique s'il existe x dont l'espace cyclique (le plus petit espace vectoriel possédant x et étant stable par f) est E.

1) Montrer que si f admet n valeurs propres distinctes alors il est cyclique.
2) Montrer que si f est cyclique alors le degré de son polynôme minimal est n.
3) Montrer que si le degré du polynôme minimal de f est n alors f est cyclique.
4) Montrer que si f est cyclique alors son commutant est réduit à $\mathrm{K}[f]$.

EXERCICE 1.3.12

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer que H rencontre $\mathbf{GL}(n, K)$.

1.4 Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1.4.1

Soit P un polynôme de $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$ tel que

$$(\dagger)\quad \mathrm{P}(\mathrm{X}^2-1)=\mathrm{P}(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)\ .$$

1) Montrer que, si a est une racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont des racines de P.
2) Soient $a_0\in\mathbf{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $a_{n+1}={a_n}^2+2a_n$.
   a) Montrer que si a_0 est une racine de P alors pour tout entier naturel n, a_n est une racine de P.
   b) En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.
   c) Montrer que -1 n'est pas racine de P.
   d) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n+1=(a_0+1)^{(2^n)}$.
3) Déduire des questions précédentes que, si a est une racine complexe de P alors $|a+1|=1$.
4) En reprenant le raisonnement ci-dessus, montrer que l'on a également dans ce cas, $|a-1|=1$.
5) Déterminer ainsi tous les polynômes P de $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$ tel que $(\dagger)$.

Exercice 1.4.2

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$ tels que $P(\mathbf{Q})\subset\mathbf{Q}$.

Exercice 1.4.3

1) Déterminer tous les polynômes P de $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$ tels que $P(\mathrm{X}^2)=P^2(\mathrm{X})$.
2) De même dans $\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$.
3) En déduire, pour tout entier naturel n, que le nombre de coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ impairs est une puissance de 2.

Exercice 1.4.4 (Critère d'Eisenstein, classique des ENS)

1) Soient P,Q de $\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$ et p un nombre premier. Démontrer que si p divise tous les coefficients de PQ alors p divise tous les coefficients de P ou tous les coefficients de Q.
2) Soient P,Q de $\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$. Démontrer que $ab=c$, où a (resp. b ; resp. c) est le pgcd des coefficients de P (resp. Q ; resp. PQ).
3) Démontrer que si P est irréductible dans $\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$ alors P est irréductible dans $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$.
4) Soit $P:=a_n\,\mathrm{X}^n+\ldots+a_1\,\mathrm{X}+a_0$ un polynôme de $\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$ et p un nombre premier. Supposons que p divise $a_0,\ldots,a_{n-1}$, p ne divise pas a_n et p^2 ne divise pas a_n. Démontrer que P est irréductible dans $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$.
5) En déduire que si p est un nombre premier alors $\mathrm{X}^{p-1}+\ldots+\mathrm{X}+1$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$.

Exercice 1.4.5 (Classiques)

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Démontrer.
1) Si $\mathbb{K}$ est fini alors $\mathbb{K}$ n'est pas algébriquement clos.
2) Quels sont les polynômes de $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$ stables par $\mathbf{U}$, ceux par $\mathbf{Q}$, ceux périodiques ?

Exercice 1.4.6

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique polynôme P_n de $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$P_n\left(\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{X}^n+\frac{1}{\mathrm{X}^n}\ .$$

Décomposer ensuite $\frac{1}{P_n}$ dans $\mathbf{R}(\mathrm{X})$ en éléments simples, pour tout entier naturel non nul n.

Exercice 1.4.7

Démontrer que l'application définie quels que soient les polynômes P et Q, par

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$, et que la famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des polynômes de Chebyshev est une base orthogonale pour ce produit scalaire.

Exercice 1.4.8

Soient a, b et c des nombres réels et notons

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est orthogonale si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme $\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + \varpi$, où ϖ est un réel compris entre 0 et 4/27.

Exercice 1.4.9

Déterminer les polynômes réels scindés sur $\mathbf{R}$ et à coefficients valant $0, 1$ ou -1.

Exercice 1.4.10

Démontrer qu'il n'existe qu'un seul polynôme à coefficients entiers positifs qui vaut 2018 en 1 et 1234567891011 en 2019.

Exercice 1.4.11

1) Soit P un polynôme complexe à valeurs entières sur $\mathbf{N}$.
   a) Montrer que P est à coefficients rationnels.
   b) Montrer que si d est le degré de P alors $d!$P est à coefficients entiers.
2) Soit F une fraction rationnelle complexe à valeurs rationnelles sur $\mathbf{N}$ privé des pôles. Alors F est une fraction rationnelle à coefficients rationnels.
3) Soit F une fraction rationnelle complexe à valeurs entières sur $\mathbf{N}$ privé des pôles. Alors F est une fraction rationnelle à coefficients entiers.

Exercice 1.4.12

Pour tout entier naturel n, notons

$$\Lambda_{\mathrm{n}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}.$$

1) Montrer que pour tout entier naturel n, Λ_n n'a que des racines simples.
2) On s'intéresse désormais aux racines réelles $\lambda_1^{(n)} < \ldots < \lambda_{q_n}^{(n)}$ de Λ_n.
   a) Calculer q_n en fonction de la parité de n.
   b) Montrer que $\lambda_1^{(n)} \longrightarrow -\infty$. Est-ce intuitif ?

1.5 Calcul matriciel et déterminants

Exercice 1.5.1 (Déterminant de Vandermonde) **#Corrigé !**

Soient a_1, a_2, …, a_n des nombres complexes.

$$\text{Montrer que } \begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{h<k} (a_k - a_h).$$

Exercice 1.5.2

Montrer que l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, est isomorphe au corps $\mathbf{C}$.

Exercice 1.5.3

Soit K un corps commutatif et n un entier naturel. Déterminer le centre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathrm{K})$.

Exercice 1.5.4 (Critère d'Hadamard) **#Corrigé !**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que pour tout $i \leqslant n$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 1.5.5

$$\text{Montrer que } \begin{vmatrix} 9 & 5 & 1 & 6 \\ 6 & 9 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} \text{ est divisible par 12.}$$

Exercice 1.5.6

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Démontrer que si $(A^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge alors sa limite est une matrice de projection (c'est-à-dire une matrice P telle que $P^2 = P$).

Exercice 1.5.7

Démontrer que l'exponentielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. En déduire que toute matrice inversible à coefficients complexes admet une racine carrée.

Exercice 1.5.8

Soit F une matrice symétrique réelle. Notons f la matrice extraite obtenue en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Que dire des valeurs propres de F par rapport à celles de f ?

Exercice 1.5.9

Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ engendré par l'ensemble des matrices diagonalisables.

Exercice 1.5.10

Soit K un corps fini de cardinal q. Alors une matrice $M \in \mathcal{M}(K)$ est diagonalisable si et seulement si $M^q = M$.

Exercice 1.5.11

Démontrer que si G est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{K})$ formé de matrices de symétries alors il est fini et de cardinal $\leqslant 2^n$. En déduire que $\mathbf{GL}_n(\mathbf{K}) \simeq \mathbf{GL}_m(\mathbf{K})$ si et seulement si $m = n$.

Exercice 1.5.12

Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\det(A + M) = \det A + \det M$.

Exercice 1.5.13

Soient $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Supposons que pour $i \neq j$, ${}^tA_iA_j = 0$ et que $\sum_{k=1}^p A_k := B \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \mathrm{rg}\ A_k = n$. *(Indication : traiter le cas où* $\mathrm{B} = I_n$*.)*

Exercice 1.5.14

Soit K un corps. Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathrm{K})$ de trace nulle commutent. *(Indication : Montrer que* $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = (\mathrm{tr}\, B)A + (\mathrm{tr}\, A)B + (\mathrm{tr}\, AB - \mathrm{tr}\, A\, \mathrm{tr}\, B)I_2$*.)*

Exercice 1.5.15

Soit M carré d'ordre $2n$ telle que $m_{ii} = 0$ et pour $i \neq j$, $m_{ij} \in \{-1, 1\}$. Alors M est inversible.

Exercice 1.5.16

Les monômes sont les seuls polynômes P tels que pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$(\mathrm{P}(\mathrm{M}) = 0 \text{ implique } \mathrm{tr}\,\mathrm{M} = 0).$$

Exercice 1.5.17

Soit n un entier naturel et H un sous-groupe de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$ dont la seule matrice scalaire est l'identité et tel que pour tout M dans $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$, il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{M} = a\mathrm{H}$.

1) Montrer qu'il existe un morphisme f surjectif de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{U}_n$.
2) Montrer que pour toute matrice M dont le sous-espace caractéristique pour 1 est un hyperplan, $f(\mathrm{M}) = 1$.
3) Nommons T (pour transvection) l'ensemble de ces matrices. Montrer que T engendre $\mathbf{SL}_n(\mathbf{C})$. En déduire que $n = 1$.

Exercice 1.5.18

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe n^2 nombres réels tels que toute matrice de taille $n \times n$ formée à partir de ces nombres est inversible. Est-ce toujours le cas si les nombres sont supposés appartenir à l'intervalle $[1, 2]$?

1.6 Espaces euclidiens

Exercice 1.6.1 (Famille obtuangle)

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que $(x_j \mid x_i) < 0$.

1) Montrer que toute famille extraite de $p-1$ vecteurs est libre. En déduire que $p \leqslant n+1$.
2) Montrer que l'on peut trouver une telle famille si $p = n+1$.

Exercice 1.6.2 (Polynôme invariants sous l'action de $\mathrm{O}_2(\mathbf{R})$)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]$, noté génériquement $\mathrm{P}(x, y)$ si $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. On fait agir $\mathrm{O}_2(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ par la relation $u.\mathrm{P} = \mathrm{P}(u(x), u(y))$.

1) Montrer que $\mathrm{P}(a, 0, b, c)$ est un polynôme en a^2, b^2, c^2 et ab.
2) Montrer qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbf{R}[u, v, w]$ et un entier naturel α tel que
$$\mathrm{P}(x, y) = \frac{\mathrm{N}((x \mid x), (y \mid y), (x \mid y))}{(x \mid x)^\alpha}.$$
3) Soit $\mathrm{R} \in \mathbf{R}[u, v, w]$ tel que quels que soient les vecteurs x, y de $\mathbf{R}^2$, $\mathrm{R}((x \mid x), (y \mid y), (x \mid y)) = 0$. Montrer que $\mathrm{R} = 0$.
4) En déduire que P s'écrit $\mathrm{H}((x \mid x), (y \mid y), (x \mid y))$, où $\mathrm{H} \in \mathrm{R} \in \mathbf{R}[u, v, w]$.

Exercice 1.6.3

Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ $2n$ nombres réels strictement positifs. Notons $\mathrm{A} = \left(\dfrac{1}{a_j b_i + a_i b_j}\right)_{(i,j) \in [1,n] \times [1,n]}$. À quelle condition $\mathrm{A} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Exercice 1.6.4

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Montrer qu'il existe une base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ telle que pour tout $x \in \mathrm{E}$,
$$x = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)\, e'_k.$$

Exercice 1.6.5

Soient $(\mathrm{E}, ||.||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $a, b \in \mathrm{E}$ tels que $a \neq 0$. Notons F l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $f(a) = b$ et $|||.|||$ la norme subordonnée. Montrer que
$$\inf_{f \in \mathrm{F}} |||f|||\,.$$

Traiter le cas où F est l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$, où (a_1, a_2) est une famille libre.

Exercice 1.6.6

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Définissons l'endomorphisme f défini par
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, e_k.$$

1) Montrer que f est symétrique défini positif. En déduire qu'il existe un endomorphisme g symétrique tel que $g^2 = f^{-1}$.
2) Montrer que $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ est une base orthonormale de E.

Exercice 1.6.7

Soit S la sphère unité de E. Pour $p \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{V}_p$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p. Soit f un endomorphisme symétrique de E et $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de f comptées avec leur multiplicité. Montrer que
$$\lambda_p = \min_{\mathrm{V} \in \mathcal{V}_p} \max_{x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{S}} (f(x) \mid x)\,.$$

1.7 Arithmétique

Exercice 1.7.1

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 1.7.2 **#Corrigé !**

Soient P et Q dans $\mathbf{Z}[X]$ premiers entre eux en tant qu'éléments de $\mathbf{Q}[X]$. Démontrer que la suite $(P(n) \wedge Q(n))_{n\in\mathbf{N}}$ $(:= (u(n))_{n\in\mathbf{N}})$ est périodique.

Exercice 1.7.3

Déterminer les entiers n tels que le nombre de solutions ordonnées de l'équation diophantienne

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

est exactement k. Que peut-on dire si k est premier ?

2

Topologie générale

2.1 Nombres entiers naturels

Exercice 2.1.1

Déterminer les fonctions f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telles que pour tout entier naturel n,

$$f(n) + f \circ f(n) + f \circ f \circ f(n) = 3n\ .$$

Exercice 2.1.2

Démontrer que tout nombre entier naturel est la somme de quatre carrés. *(On pourra considérer l'ensemble des quaternions.)*

Exercice 2.1.3

Montrer qu'un nombre rationnel m/n (où $m \wedge n = 1$) est un carré dans $\mathbf{Q}$ si et seulement si m et n sont des carrés parfaits. En déduire qu'un entier est un carré dans $\mathbf{Q}$ si et seulement s'il est un carré parfait.

Exercice 2.1.4

Soit $\mathrm{B} \subset \mathbf{N}^2$. On dit que (a, b) est un point sud-ouest de B si $\mathrm{B} \cap]-\infty, a] \times]-\infty, b] = \{(a, b)\}$. Montrer que si B est non vide alors l'ensemble SW(B) des points sud-ouest est un ensemble fini non vide.

Exercice 2.1.5

Soient $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ le terme général de la suite des sommes partielles de la série harmonique et A_3 l'ensemble des fractions irréductibles p/q, où 3 ne divise pas q.

1) Déterminer les entiers n tels que H_n est entier.
2) Montrer que A_3 est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$.
3) Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et $s : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/3^k\mathbf{Z}$ la surjection canonique. Montrer qu'il existe un unique prolongement morphique de groupes de s à A_3.
4) Soit $m \in \{1, 2\}$. Montrer que si $\mathrm{H}_{3n+m} \in \mathrm{A}_3$ alors $\mathrm{H}_n \in 3\mathrm{A}_3$.

2.2 Nombres réels

Exercice 2.2.1

1) Soient a, b des nombres réels.

a) On les suppose plus petits que 1. Établir l'inégalité $(1+a)(1+b) \leqslant 2(1+ab)$.
b) Soient λ, λ' des nombres réels positifs tels que $\lambda + \lambda' = 1$. Factoriser la fonction polynomiale $x \longmapsto (\lambda' x^2 + \lambda ab) - (\lambda' x + \lambda a)(\lambda' x + \lambda b)$ définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
c) En déduire que si a et b sont plus petits que 1 alors on a $(\lambda' + \lambda a)(\lambda' + \lambda b) \leqslant \lambda' + \lambda ab$. Préciser les cas d'égalité.

2) Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels positifs, tels que $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Démontrer l'inégalité $(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \leqslant n(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)$.

Exercice 2.2.2

Soit a un nombre réel. Montrer que $\lim \left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbf{N}} = 0$.

Exercice 2.2.3

Montrer que $\mathbf{Z} + \sqrt{2}\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Exercice 2.2.4

Montrer qu'il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b est un nombre rationnel.

Exercice 2.2.5 (Irrationalité de τ)

Soient p, q deux entiers naturels non nuls. L'on pose $\mathrm{P}_n = \frac{1}{n!}\mathrm{X}^n(p - q\mathrm{X})^n$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, P_n et ses dérivées successives prennent des valeurs entières aux points p/q et 0.
b) Montrer que la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{p/2q} \mathrm{P}_n(t)\sin(t)\mathrm{d}t$ converge vers 0.
c) En déduire, par l'absurde, que τ est irrationnel (*sinon en posant $\tau = p/q$, on montre au moyen de $2n$ intégrations par parties que I_n est un entier*).

Exercice 2.2.6 (Irrationalité de $\ln 2$)

Quels que soient le nombre complexe $z \neq 0$ et l'entier naturel n, posons

$$I_n(z) := \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{n!} e^{tz} \mathrm{d}t \ .$$

1) a) Calculer $I_0(z)$ et $I_1(z)$.
b) Pour tout entier naturel n, montrer que

$$I_{n+2}(z) = \frac{4}{z^2} I_n(z) - \frac{4n+6}{z^2} I_{n+1}(z) \ .$$

c) En déduire que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme A_n de $\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$ de degré n tel que pour tout nombre complexe $z \neq 0$,

$$I_n(z) = \frac{e^z A_n(z) - e^{-z} A_n(-z)}{z^{2n+1}} \ .$$

2) Soit z un rationnel non nul tel que e^z est rationnel.
Montrer l'existence d'un entier non nul D tel que pour tout entier naturel non nul n,

$$D^n I_n(z) \text{ est un entier.}$$

Démontrer également que $\lim\limits_{n \to \infty} D^n I_n(z) = 0$. Conclure.

En déduire que si r est rationnel non nul alors e^r est irrationnel, et si de plus r est différent de 1 alors $\ln r$ est irrationnel.

Exercice 2.2.7

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels strictements positifs. Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} \frac{a_i}{a_j} \geqslant n^2$.

Exercice 2.2.8

Discuter les maxima et minima de la fonction $x \longmapsto (x-a)^m(x-b)^n$ (définie dans $\mathbf{R}$), où m et n sont des entiers naturels, en considérant différents cas selon leur parité. Esquisser le graphe de la fonction.

Exercice 2.2.9

Pour tout nombre réel $x > 1$, on note E_x l'ensemble formé des nombres entiers naturels $[x], [2x], [3x], \dots$ Soient a et b des nombres réels > 1. Monter que $\mathbf{N} - \{0\}$ est la réunion disjointe de E_a et de E_b si et seulement si a et b sont irrationnels tels que $1/a + 1/b = 1$.

Exercice 2.2.10 **#Corrigé !**

Considérons une suite r de nombres rationnels convergente vers un nombre irrationnel x. Démontrer que la suite du numérateur et celle du dénominateur de r tendent vers ∞.

Exercice 2.2.11

Montrer que $(\ln p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où p_n désigne le n-ième nombre premier, est une famille libre du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

Exercice 2.2.12 (*Math. Trip.* 1909.) **#Corrigé !**

If a_1, a_2, ..., a_n are all positive, and $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, then

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leqslant 1 + s_n + \frac{s_n^2}{2!} + \cdots + \frac{s_n^n}{n!}.$$

Exercice 2.2.13 **#Corrigé !**

Soit c un nombre réel tel que pour tout entier naturel $n > 0$, n^c est entier. Que dire de c ?

Exercice 2.2.14

Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de réels > 0 tel que $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e_n < +\infty$. Notons $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} e_k$. On s'intéresse à

$$J = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} d_n e_n, (d_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \{1, -1\}^{\mathbf{N}} \right\} .$$

1) Supposons que J est un intervalle, on dit dans ce cas que $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base discrète. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $e_n \leqslant r_n$.
2) Supposons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $e_n \leqslant r_n$. Soient $t \in [-s, s]$ et $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $t_0 = 0$ et

$$t_{n+1} = t_n + e_n \text{ (resp. } t_n - e_n) \text{ si } t_n \leqslant t \text{ (resp. sinon)} .$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|t_n - t| \leqslant e_n + r_n$. Conclure.

2.3 Nombres complexes

Exercice 2.3.1

1) Montrer que $\tan^2 \frac{\tau}{18} + \tan^2 \frac{\tau}{9} + \tan^2 \frac{3\tau}{18} + \tan^2 \frac{2\tau}{9} = 36$.
2) a) Montrer que $\sin^2 \frac{\tau}{14}, \sin^2 \frac{\tau}{7}$ et $\sin^2 \frac{2\tau}{7}$ sont les racines de $64x^3 - 112x^2 + 56x - 7 = 0$.
   b) En déduire que $\sin^2 \frac{\tau}{7} + \sin^2 \frac{2\tau}{7} - \sin^2 \frac{\tau}{14} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Exercice 2.3.2

Démontrer que tout endomorphisme du **R**-espace vectoriel **C** est, pour deux uniques nombres complexes a, b, la fonction numérique complexe

$$z \longmapsto az + b\bar{z}.$$

Exercice 2.3.3

Démontrer que le produit des distances de 1 aux racines $n-$ièmes de l'unité vaut n.

2.4 Suites

Exercice 2.4.1

1) Démontrer qu'il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $x_0 = 3$ et, pour tout nombre entier naturel n, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2-x_n}$. Déterminer son terme d'indice n en fonction du nombre entier naturel n.
2) Démontrer qu'il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $x_0 = 2, x_1 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $x_{n+1} = \dfrac{6x_n x_{n-1}}{x_n + x_{n-1}}$. Déterminer son terme d'indice n en fonction du nombre entier naturel n.

Exercice 2.4.2

Soient a, b des nombres réels. Calculer

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

(déterminant d'ordre n).

Exercice 2.4.3

Dans les questions suivantes est demandé de calculer la limite, si elle existe, de la suite énoncée.

1) $(s_n)_{n\in\mathbf{N}} := (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ et $(s_n - \ln n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2) $(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!})_{n\geqslant 1}$.
3) $(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)(n-1)!})_{n\geqslant 2}$.

Exercice 2.4.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un segment de $\mathbf{R}$.

Exercice 2.4.5 **#Corrigé !**

Fournir la limite et un équivalent de $u_n - l$ pour

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Exercice 2.4.6 **#Corrigé !**

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et donner sa limite, où $u_0 \in \mathbf{C}^*$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2}.$$

Exercice 2.4.7

Soit f continue, à valeurs strictement positives, définie sur un segment.

1) Calculer la limite quand n croît indéfiniment de $\left(\displaystyle\int f^n\right)^{1/n}$.

2) Calculer la limite quand n croît indéfiniment de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, où $u_n = \displaystyle\int f^n$.

3) Calculer la limite quand n croît indéfiniment de $\left(\displaystyle\int f^{1/n}\right)^n$.

Exercice 2.4.8

Étudier la $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_1 > 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2.4.9

Soient a_0, b_0, c_0 trois nombres entiers et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}}, (c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par

$$a_{n+1} = |a_n - b_n|,$$
$$b_{n+1} = |b_n - c_n|,$$
$$c_{n+1} = |c_n - a_n|.$$

Démontrer que la suite $(\,(a_n, b_n, c_n)\,)_{n\in\mathbf{N}}$ est $3-$périodique à partir d'un certain rang N, à partir duquel — à une permutation près — $(a_n, b_n, c_n) = (0, p\wedge q, p\wedge q)$, où $(a_{n_0}, b_{n_0}, c_{n_0}) = (0, p, q)$ (à une permutation près).

Exercice 2.4.10

Soient a_0, b_0, c_0, d_0 quatres nombres réels et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}, (b_n)_{n\in\mathbf{N}}, (c_n)_{n\in\mathbf{N}}, (d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par

$$a_{n+1} = |a_n - b_n|,$$
$$b_{n+1} = |b_n - c_n|,$$
$$c_{n+1} = |c_n - d_n|,$$
$$d_{n+1} = |d_n - a_n|.$$

Démontrer que les suites stationnent à 0 sauf si — à une permutation près — $(a_0, b_0, c_0, d_0) = (1, \xi, \xi^2, \xi^3)$, où $\xi - 1$ est l'unique racine réelle de $\mathrm{X}^3 + 2\,\mathrm{X}^2 - 2$.

Exercice 2.4.11

Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombre dans $]0,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = x_n(1 - x_{n+1})$. Montrer que la plus petite des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est inférieur à $1/4$ et qu'en cas d'égalité $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $1/2$.

Exercice 2.4.12

1) Soient a, b, c des nombres réels > 0 et $3/u_0 := 1/a + 1/b + 1/c$, $v_0 := \sqrt[3]{abc}$, $w_0 := (a+b+c)/3$. Comparer u_0, v_0 et w_0.
2) Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par

$$3/u_{n+1} := 1/u_n + 1/v_n + 1/w_n\ ,\ v_{n+1} := \sqrt[3]{u_n v_n w_n}\ ,\ w_{n+1} := (u_n + v_n + w_n)/3.$$

Montrer que les trois suites convergent vers la même limite.

Exercice 2.4.13

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle définie par

$$a_{n+1} = a_n + \alpha\frac{a_{n-1}}{n+1}.$$

Montrer que $a_n = \lambda x_n + \mu\xi_n$, où $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ et

$$x_n \sim n^\alpha,\ \xi_n \sim \frac{(-1)^n\alpha^n}{n!\,n^{\alpha+1}}.$$

2.5 Séries

Exercice 2.5.1

Étudier les séries suivantes.

1) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où α, β sont des nombres réels.
2) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{(1+a_1)\dots(1+a_n)}$, où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ différents de -1.
3) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 2.5.2

Soit $\sum_{n\,\geqslant\,0} u_n$ une série réelle semi-convergente. Montrer que pour tout nombre réel a, il existe une permutation σ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = a$, et qu'il existe une permutation γ telle que $\sum_{n\,\geqslant\,0} u_{\gamma(n)}$ diverge.

Exercice 2.5.3

1) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que pour tout réel t tel que $0 < t < \pi/2$,
$$P_n(\text{cotan}^2 t) = \frac{\sin\,(2n+1)t}{\sin^{2n+1} t}.$$
2) Pour tout entier naturel n, expliciter les racines de P_n et leur somme.
3) À partir de l'inégalité $\text{cotan}^2 t \leqslant 1/t^2 \leqslant \text{cotan}^2 t + 1$, déterminer la valeur de $\zeta(2)$.

Exercice 2.5.4

Notons par $d(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier naturel non nul n.
Montrer que pour $\alpha > 1$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta^2(\alpha).$$
Montrer que pour $\alpha > 2$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}.$$

Exercice 2.5.5 (Étude des séries alternées) **#Corrigé !**

On dit que la série $\sum u_n$ enveloppe le réel A si pour tout entier naturel n,
$$u_n \neq 0 \text{ et } |A - (u_0 + \ldots + u_n)| \leqslant |u_{n+1}|.$$
On dit qu'elle enveloppe strictement le réel A s'il existe une suite $(\theta_n)_{n\,\geqslant\,1}$ d'éléments de $]0,1[$ telle que pour tout entier naturel n,
$$A - (u_0 + \ldots + u_n) = \theta_{n+1} u_{n+1}.$$

1) Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A > 0$. Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel. Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.
2) Démontrer que si $\sum u_n$ enveloppe strictement A alors elle est alternée. Démontrer que A est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.

3) Démontrer que si $\sum u_n$ est alternée et que pour tout entier naturel $n > 0$, $A - (u_0 + \ldots + u_n)$ est du signe de u_{n+1}, alors la série est alternée et enveloppe strictement A.
4) Démontrer que si $\sum u_n$ enveloppe A et si $(|u_n|)_{n \geqslant 0}$ est strictement décroissante alors la série est alternée et enveloppe strictement A.

Exercice 2.5.6 **#Corrigé !**

Montrer que la série des inverses des nombres premiers est divergente.

Exercice 2.5.7

Démontrer qu'une série est absolument convergente si et seulement si elle est commutativement convergente.

Exercice 2.5.8

Étudier la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{s(n)}{n(n+1)}$, où $s(n)$ désigne le nombre de chiffres de n dans sa décomposition en base 2.

Exercice 2.5.9

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)n!}.$$

.

Exercice 2.5.10

Soient α un nombre réel > 1 et $\mathrm{S}_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\alpha-1}x^n}{1-x^n}$. Montrer que pour $x \to 1$, $x < 1$,

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)}{(1-x)^\alpha}.$$

Exercice 2.5.11

Soient a, b des nombres réels positifs et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

À quelle condition $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge ? Si elle converge calculer sa somme.

Exercice 2.5.12

Notons $\mathbf{U}_\infty := \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \mathbf{U}_n$. Soit $\mathrm{e}^{i\theta} \notin \mathbf{U}_\infty$. Montrer que $\{\mathrm{e}^{in\theta}, n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{U}$.

Soit z un nombre complexe. Montrer qu'il est faiblement algébrique, c'est-à-dire qu'il est zéro d'une fonction entière en 0 à coefficients dans $\mathbf{Q}$, *i.e.* il existe $(a_n) \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$.

2.6 Espaces normés

Exercice 2.6.1

Soient E, F des espaces vectoriels normés de dimension finie et f une application continue de E dans F telle qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que quels que soient les vecteurs x, y de E,

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leqslant M \ .$$

On pose pour tout n de $\mathbf{N}$, u_n la fonction définie par $u_n(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x)$.

1) Montrer que si $M = 0$ alors f est linéaire.
2) Montrer que pour tout x de E, $(u_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
3) Montrer que g, définie par $g(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x)$, est linéaire.

Exercice 2.6.2

Soit A une $\mathbf{R}$-algèbre complète et unitaire.

1) Montrer que si $||x|| < 1$ alors $1 - x$ est inversible.
2) Montrer que l'ensemble des inversibles est un ouvert.

Exercice 2.6.3

Exhiber une norme d'algèbre sur $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$ et démontrer qu'il n'en existe pas sur $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Exercice 2.6.4

Démontrer que sur un espace vectoriel normé, une boule fermée est définie par un unique rayon et un unique centre.

Exercice 2.6.5

Exhiber, pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$, une norme telle que $(\mathrm{X}^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers P.

Exercice 2.6.6 **#Corrigé !**

Démontrer que les seuls parties ouvertes et fermées d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E sont l'ensemble vide et E.

Exercice 2.6.7 **#Corrigé !**

Soient K une fonction de $\mathcal{C}([0,1]^2, \mathbf{R})$ symétrique, $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0,1])$ et Φ l'endomorphisme défini par $\phi(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) \mathrm{d}y$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\dim \mathrm{Ker}\ (\Phi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \iint_{[0,1]^2} K(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Exercice 2.6.8 **#Corrigé !**

Montrer que l'ensemble Ω_n des polynômes scindés à racines simples de degré n est un ouvert de $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 2.6.9

Soit K un fermé de $[0,1]^2$ tel que pour tout x de $[0,1]$, K_x est un intervalle non vide où

$$\mathrm{K}_x = \{y, (x,y) \in \mathrm{K}\}.$$

Montrer que K est connexe.

Exercice 2.6.10

Soit ρ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Notons $\rho^*(M) = \sup\{\mathrm{tr}(\mathrm{MB}), \rho(\mathrm{B}) = 1\}$.

1) Montrer que ρ^* est également une norme.
2) Montrer que le déterminant atteint son maximum sur la $\rho-$sphère unité.
3) Soit A_0 une matrice où det atteint son maximum sur la $\rho-$sphère unité. Montrer que A_0 est inversible et que $\rho^*({\mathrm{A}_0}^{-1}) = n$.

Exercice 2.6.11 (Extension de normes)

Soient E un espace vectoriel et V (resp. W) un sous-espace vectoriel de E normé selon la norme N_1 (resp. N_2). Supposons que pour toute suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathrm{V}\cap\mathrm{W}$, si $z_n \longrightarrow v$ selon la norme N_1 et $z_n \longrightarrow w$ selon la norme N_2 alors $v = w$. Montrer que N fait de $\mathrm{V}+\mathrm{W}$ un espace normé, où

$$\mathrm{N}(u) = \inf_{u=v+w} \mathrm{N}_1(v) + \mathrm{N}_2(w).$$

Exercice 2.6.12 (Caractérisation des boules unités en dim $< +\infty$)

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'une boule unité pour une norme est exactement un compact convexe stable par la symétrie $x \mapsto -x$ et voisinage de 0.

2.7 Topologie

Exercice 2.7.1 **#Corrigé !**

Soit $(E, (.\,|\,.))$ un espace euclidien de dimension n, N désigne la norme subordonnée à la norme euclidienne et pour tout sous-espace vectoriel V, p_{V} désigne la projection orthogonale sur V. On appelle grassmannien d'indice d, noté $\mathcal{G}_k(\mathrm{E})$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k. On munit $\mathcal{G}_k(\mathrm{E}) \times \mathcal{G}_k(\mathrm{E})$ de l'application d définie par

$$d(\mathrm{V}, \mathrm{W}) = \mathrm{N}(p_{\mathrm{V}} - p_{\mathrm{W}}).$$

Montrer que pour tout entier naturel $k \leqslant n$, $(\mathcal{G}_k(\mathrm{E}), d)$ est un espace métrique compact et connexe par arcs.

Exercice 2.7.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si X est un convexe non borné de E alors il contient une demi-droite.

Exercice 2.7.3

Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$ muni de sa norme euclidienne. Notons $\mathrm{B} := \{r > 0,$ il existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\mathrm{K} \subset B(x, r)\}$. Notons r_{K} la borne inférieure de B et d_{K} le diamètre de K.

1) Montrer que r_{K} existe bien et appartient à B.
2) Montrer qu'il existe un unique x_{K} tel que $\mathrm{K} \subset B(x_{\mathrm{K}}, r_{\mathrm{K}})$
3) Montrer que x_{K} est dans l'enveloppe convexe de $\mathrm{K} \cap \partial B(x_{\mathrm{K}}, r_{\mathrm{K}})$.
4) Pour $n = 2$, montrer que
$$r_{\mathrm{K}} \leqslant \frac{d_{\mathrm{K}}}{\sqrt{3}}\,.$$

3

Fonction d'une variable réelle

3.1 Fonctions basiques

Exercice 3.1.1

Montrer que si x est un nombre réel strictement plus grand que -1 alors $x^2 > (1+x)\ln^2(1+x)$.

Exercice 3.1.2

Soit a un nombre réel strictement positif. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\mathrm{Arctan}(a+x) - \mathrm{Arctan}(x))$.

Exercice 3.1.3

Démontrer que la famille $(\exp, \cos, \sin)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Exercice 3.1.4

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique nombre réel x_n tel que $\mathrm{e}^{nx_n} + x_n = n$.
2) Donner un équivalent simple de x_n quand x croît indéfiniment.

Exercice 3.1.5

1) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbf{R}$.
2) Montrer que quels que soient les nombres réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$,

$$1 + \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \sqrt[n]{(1+x_1)\ldots(1+x_n)}.$$

3) En déduire que quels que soient les nombres réels strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$;

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n)}.$$

Exercice 3.1.6

Démontrer qu'il existe une unique fonction continue f de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) = 2 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2+(f(t))^2}\mathrm{d}t.$$

Généraliser le résultat.

Exercice 3.1.7

Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour $x \in \mathbf{R}^*$, et prolongée par continuité en 0. Notons pour $a \in \mathbf{R}$, $\varphi_a(x) = \varphi(x-a)$.

1) Montrer que le prolongement est valide et que φ est $\mathcal{C}^\infty$.
2) Montrer que $(\varphi_a)_{a\in\mathbf{R}}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

3.2 Dérivabilité

Exercice 3.2.1

Soit x un nombre réel. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

Exercice 3.2.2

Fournir un exemple de fonction dérivable en tout point de $\mathbf{R}$, qui n'est pas élément de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$.

Exercice 3.2.3

Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que pour tout x de $[a,b]$, il existe $c \in \,]a,b[$ tel que

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f''(c)\frac{(x-a)(x-b)}{2}\ .$$

Exercice 3.2.4 (Théorème de Darboux) **#Corrigé !**

Soit f une fonction numérique réelle et dérivable dans un intervalle I. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 3.2.5 **#Corrigé !**

Soit f définie sur un intervalle I dont l'intérieur possède 0. Supposons que f est dérivable et nulle en 0. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, posons

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(1/(n+k)\right).$$

1) Déterminer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

   Pour tout nombre complexe a, pour tout entier naturel $n > 0$, posons

$$v_n(a) = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{a}{n+k}\right).$$

2) Soit $x \in \mathbf{R}$. Déterminer que $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.
3) En déduire la limite de $(v_n(z))_{n\geqslant 1}$, où $z \in \mathbf{C}$.

   Soient p un entier naturel non nul et A une matrice nilpotente de $M_p(\mathbf{C})$. Pour tout entier naturel $n > 0$, posons

$$B_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{A}{n+k}\right).$$

4) Démontrer que si P est un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de coefficients $(a_0, \ldots, a_N)$ alors pour tout $k \leqslant N$,

$$a_k = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} P(\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{-ki\theta}\mathrm{d}\theta.$$

5) Calculer la limite de $(B_n)_{n\geqslant 1}$.
6) En déduire le résultat avec A non nilpotente.

Exercice 3.2.6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et positive sur $\mathbf{R}$. On note Z l'ensemble des zéros de f.

1) Donner un exemple de f telle que $\sqrt{f}$ est non dérivable.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Z}$, $f''(x) = 0$ si et seulement si $\sqrt{f}$ est dérivable en x. Soit $x \in \mathrm{Z}$ tel que $f''(x) = 0$. Soient $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{J}_a := [x - a, x + a]$ et $\mathrm{M}_x(a) = ||f''||_{\infty, \mathrm{J}_a}$.
3) Montrer que quels que soient t, h tels que t et $t + h$ appartiennent à J_a,

$$f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2}\mathrm{M}_x(a) \geqslant 0.$$

4) Montrer que pour tout $t \in \mathrm{J}_{a/2}$,

$$(f'(t))^2 \leqslant 2\mathrm{M}_x(a)f(t).$$

5) En déduire que si pour tout $x \in \mathrm{Z}$, $f''(x) = 0$ alors $\sqrt{f}$ est $\mathcal{C}^1$.

3.3 Calcul intégral

Exercice 3.3.1

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 3.3.2

Soit f une fonction continue de [0, 1] dans $\mathbf{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\tau/2} xf(\sin x)dx = \frac{\tau}{4}\int_0^{\tau/2} f(\sin x)dx$.

Exercice 3.3.3

Soient f de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}^+$ continue et $(I_n)_{n\in\mathbf{N}} = (\int_a^b (f(x))^n dx)_{n\in\mathbf{N}}$.
1) Supposons que pour tout x de $[a,b]$, $f(x) < 1$. Montrer que lim $(I_n)_{n\in\mathbf{N}} = 0$.
2) Supposons que $f(a) = 1$ et pour tout x de $]a,b]$, $f(x) < 1$. Montrer que lim $(I_n)_{n\in\mathbf{N}} = 0$.
3) Répondre à la question 1) en supposant seulement que f est continue par morceaux.

Exercice 3.3.4

Soit f de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continue. Montrer que lim $(\int_0^1 nx^n f(x)dx)_{n\in\mathbf{N}} = f(1)$

Exercice 3.3.5

Soient f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue et a un nombre réel.
1) Supposons que f est impaire. Montrer que $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
2) Supposons que f est paire. Montrer que $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
3) Soit $T > 0$. Supposons que f est T-périodique. Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Exercice 3.3.6

Soient n un entier naturel non nul et u, v des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^n. Montrer que

$$\int_a^b u(x)v^{(n)}(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^{(k)}(x)v^{(n-1-k)}(x)\Bigg|_a^b + (-1)^n\int_a^b u^{(n)}(x)v(x)dx.$$

Exercice 3.3.7

Soit a un nombre réel strictement positif. Calculer $\displaystyle\int_{1/a}^a \frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

Exercice 3.3.8

Calculer.
1) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
2) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}dt$

Exercice 3.3.9

Résoudre l'équation $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$ d'inconnue la fonction continue f.

Exercice 3.3.10

Calculer les limites des sommes de Riemann suivantes.

1) $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k}$.
2) $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$, où α est un nombre réel.

Exercice 3.3.11

Calculer.
1) $\displaystyle \int_1^x t^n \ln t \, dt$, où x est un nombre réel et n un entier naturel.
2) $\displaystyle \int_0^{\tau/2} x^2 \cos 2x dx$.
3) $\displaystyle \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}\ t}$.
4) $\displaystyle \int_0^x \tan t \, dt$, où $-\frac{\tau}{4} < x < \frac{\tau}{4}$.
5) $\displaystyle \int_0^x \frac{dt}{2+\cos t}$.
6) $\displaystyle \int_0^x \frac{\sin t}{1+\cos t} dt$.
7) $\displaystyle \int_0^x \frac{dt}{\cos t}$.
8) $\displaystyle \int_0^x \frac{dt}{1+\cos t}$.
9) $\displaystyle \int_0^{\tau/4} \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} dx$
10) $\displaystyle \int_0^{\tau/4} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x} dx$ et $\displaystyle \int_0^{\tau/4} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x} dx$.
11) $\displaystyle \int_0^{\tau/4} \frac{\alpha\cos x+\beta\sin x}{\gamma\cos x+\delta\sin x} dx$, $\gamma > 0$ et $\delta > 0$.
12) $\displaystyle \int_0^{\tau/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.
13) $\displaystyle \int_0^x \sqrt{1+t+t^2} dt$.
14) $\displaystyle \int_0^x \frac{dt}{t^2+a^2}$, où a est un nombre réel $\neq 0$.
15) $\displaystyle \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}}$, où a est un nombre réel $\neq 0$.
16) $\displaystyle \int_x^a \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}$, où a est un nombre réel positif et $-a \leqslant x \leqslant a$.
17) $\displaystyle \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, $n \in \mathbf{N}$.
18) $\displaystyle \int_0^1 (x\ln x)^n \mathrm{d}x$, où n est un entier naturel.
19) $\displaystyle \int$

Exercice 3.3.12

Calculer.

1) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^4)^2}$.

2) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^n}$ $(= \frac{\tau/2n}{\sin \tau/2n})$, où n est un entier naturel.

3) $\lim_{x\to} \int_0^x$.

EXERCICE 3.3.13

Soit f une fonction définie dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs complexes. Montrer que l'ensemble des valeurs de f est inclus dans une demi-droite de $\mathbf{C}$ si et seulement si

$$\left|\int_I f\right| = \int_I |f|\ .$$

EXERCICE 3.3.14 (Calcul de l'intégrale de Gauß)

Pour tout $x \geqslant 0$, posons

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est bien définie, et en utilisant une équation différentielle élémentaire dont f est solution montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\tau}{2}}.$$

EXERCICE 3.3.15

Soit P un polynôme réel de degré $\geqslant 2$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(P(t))\mathrm{d}t$ converge.

EXERCICE 3.3.16

Soit f une fonction à valeurs strictement positives définie sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe $a_0, \ldots, a_n$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\int_{a_i^n}^{a_{i+1}^n} f = \frac{1}{n}\int_0^1 f$. Étudier la limite, quand $n \longrightarrow \infty$, de $\sum_{i=0}^{n} {a_i}^n$.

EXERCICE 3.3.17 (Formule des résidus)

Soit F une fraction rationnelle définie et intégrable sur $\mathbf{R}$. Que dire de cette fraction rationnelle ? Notons $a_1, \ldots, a_n$ les pôles distincts de F et P^+ le demi-plan des nombres complexes z tels que $\Im z > 0$. Notons $\mathrm{Res}(a_k)$ le coefficient de $\frac{1}{\mathrm{X} - a_k}$ dans la décomposition de F en éléments simples.

1) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(a_k) = 0.$$

2) À l'aide de $\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \mathrm{F}(t)\mathrm{d}t$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(t)\mathrm{d}t = 2i\pi \sum_{a_k \in \mathrm{P}^+} \mathrm{Res}(a_k).$$

3) En déduire que pour $m > n$, la valeur de

$$\mathrm{I}_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}}\mathrm{d}t.$$

4) En déduire par densité la valeur pour tout $\alpha > 1$,

$$\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}.$$

Exercice 3.3.18

Soient a, b deux nombres réels strictement positifs tels que $a \leqslant b$et les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

1) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une même limite $\mathrm{M}_2(a,b)$.
2) Considérons l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I}_2(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}}.$$

Montrer que $\mathrm{I}_2(a,b) = \mathrm{I}_2\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.
3) En déduire que

$$\mathrm{I}_2(a,b)\mathrm{M}_2(a,b) = \frac{\tau}{2}.$$

Exercice 3.3.19

Notons $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.
1) Déterminer la limite de $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{I}_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\mathrm{I}_n.$$

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{I}_n}{n}$ converge et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

Exercice 3.3.20

Soit f une fonction continue non nulle et $\tau-$périodique.
1) Montrer qu'il existe k tel que

$$\int_0^\tau t^k f(t)\mathrm{d}t \neq 0.$$

2) Soit k_0 le plus petit parmi les entiers précédents. Soit u une fonction $\mathcal{C}^{k_0}$. Établir le développement asymptotique avec une précision $o\left(\dfrac{1}{n^{k_0+1}}\right)$ de

$$\mathrm{I}_n = \int_0^\tau u(t)f(nt)\mathrm{d}t.$$

Exercice 3.3.21 (Méthode de Gauß)

Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ tels que pour tout polynôme P de $\mathbf{R}_{2n-1}[\mathrm{X}]$,

$$\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathrm{P}(\alpha_k).$$

Exercice 3.3.22

Soit $\mathrm{E} = \{u, u \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbf{R}), u(0) = 0, u(1) = 1\}$. Calculer

$$\inf_{u\in\mathrm{E}} \int_0^1 u^2 + u'^2.$$

3.4 Équations différentielles linéaires

Exercice 3.4.1

Pour toutes les équations différentielles considérées, on donnera des solutions définies dans $\mathbf{R}$, à valeurs réelles.

On se propose de résoudre l'équation différentielle linéaire

$$(*) \quad x'' + 2x' \text{ th } t + x = \text{sh } t \ .$$

On lui associe l'équation homogène $(**)$ $\ x'' + 2x' \text{ th } t + x = 0$.

1) a) Vérifier que les solutions de l'équation différentielle homogène $z' + z \text{ th } t = 0$ sont solutions de l'équation $(**)$.
   b) Résoudre le problème de Cauchy $z(0) = 1$ attaché à l'équation différentielle $z' + z \text{ th } t = 0$. On désignera par u la fonction obtenue, qui est indéfiniment dérivable. (On ne cherchera pas à le démontrer.)
2) Soit x une fonction numérique deux fois dérivable. On lui associe la fonction numérique $y = x/u$, qui est deux fois dérivable d'après la théorie générale de la dérivation.
   a) Vérifier que x est solution de l'équation $(*)$ si et seulement si y' est solution d'une équation différentielle d'ordre 1, que l'on précisera.
   b) Résoudre cette équation différentielle linéaire d'odre 1.
   c) En déduire les solutions de l'équation différentielle $(*)$.

Exercice 3.4.2

On se propose de généraliser le formulaire classique de trigonométrie au cas des fonctions qui jouent pour l'équation différentielle $x'' - \sigma x' + \varpi x = 0$ le même rôle que cosinus et sinus pour l'équation différentielle $x'' + x = 0$.

Soient σ, ϖ des nombres complexes. On rappelle que, pour tout couple $(x_0, x_0^{'})$ de nombres complexes, il existe une unique fonction numérique complexe x deux fois dérivable dans $\mathbf{R}$, telle que
$x(0) = x_0, \ x'(0) = x_0^{'}, \ x'' - \sigma x' + \varpi x = 0.$

On note c (resp. s) la fonction obtenue pour le couple (1,0) (resp. (0,1)). On désigne par E l'ensemble des fonctions numériques complexes x deux fois dérivables dans $\mathbf{R}$, telles que $x'' - \sigma x' + \varpi x = 0$.

1) Soit x un élément de E. Établir l'égalité $x = x(0)c + x'(0)s$. Vérifier que x' appartient à E, ainsi que, pour tout nombre réel a, la fonction $t \longmapsto x(t + a)$ définie dans $\mathbf{R}$.
2) Calculer $c''(0)$ et $s''(0)$ en fonction de σ et de ϖ.
3) En déduire les relations $c' = -\varpi s$ et $s' = c + \sigma s$.
4) Soient t, u des nombres réels. Établir les formules

$$c(t + u) = c(t)c(u) - \varpi s(t)s(u),$$

$$s(t + u) = s(t)c(u) + c(t)s(u) + \sigma s(t)s(u).$$

5) On pose W $= cs' - c's$ *(c'est le Wronskien de l'équation différentielle)*. Démontrer que W est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants. En déduire la valeur de W(t) pour tout nombre réel t.
6) Exprimer W à l'aide des nombres complexes σ, ϖ et des fonctions c, s (et non leurs dérivées). Quelle relation obtient-on qui généralise les formules $\cos^2 t + sin^2 t = 1$ et $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$?
7) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes σ, ϖ ppur que la fonction c (resp. s) soit paire (resp. impaire).
8) On suppose ϖ non nul. Démontrer que si l'une des fonctions c, s est périodique alors les éléments de E le sont aussi et qu'alors σ est imaginaire pur.

9) On suppose σ nul. La fonction s est-elle nécessairement périodique ?

10) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres *réels* σ, ϖ pour que les fonctions c et s soient périodiques de même période.

Exercice 3.4.3

Considérons l'équation différentielle dans $\mathbf{R}$ $(H) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, où a, b sont des fonctions continues. Soit (φ_1, φ_2) un système fondamental de $\mathrm{Sol}(H)$.

1) Montrer que les zéros de φ_1 (resp. φ_2) sont isolés.

2) Montrer qu'entre deux zéros successifs de φ_1, il existe un unique zéro de φ_2.

Exercice 3.4.3

Considérons l'équation différentielle d'ordre 2 suivante : $(E) : tx'' + x' + tx = 0$.

1) Montrer que f, définie par $f(t) = \int_0^{\tau/2} \cos(t \sin\theta) \mathrm{d}\theta$, est solution de (E) sur $\mathbf{R}$.

2) Quelles sont les solutions développables en série entière en 0 ?

3) Soit f_0 une de ces solutions et telle que $f_0(0) = 1$. Montrer qu'une solution f de (E) sur $]0, \alpha[$ où $\alpha > 0$ est non bornée au voisinage de 0 si et seulement si (f_0, f) est libre.

3.5 Étude locale de fonctions à valeurs réelles

Exercice 3.5.1

Trouver un équivalent simple de
1) $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})_{n\in\mathbf{N}}$,
2) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbf{N}}$,
3)

Exercice 3.5.2

Dans les questions suivantes est demandé de calculer le développement limité d'ordre n en a, si elle existe, de la fonction énoncée.
1) $t \longmapsto \ln(1+\sin 2t)$, $a=0$, $n=3$.
2) $t \longmapsto \ln(\cos t)$, $a=0$, $n=6$.
3) $t \longmapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$, $a=0$, $n=2$.
4) $t \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$, $a=4$, $n=2$.
5) $t \longmapsto \tan t$, $a=0$, $n=7$.
6) $t \longmapsto (\cos t)^{\mathrm{cotan}\ t}$, $a=0$, $n=2$.
7) $t \longmapsto$, $a=$, $n=$.

Exercice 3.5.3

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie dans $[0,1[$ à valeurs réelles telle qu'en 1 $f(x)\sim\dfrac{1}{(1-x)^\alpha}$ et f' est croissante. Montrer que $f'(x)\sim\dfrac{\alpha}{(1-x)^{\alpha+1}}$.

Exercice 3.5.4 (Cardinal de l'ensemble des points de discontinuités)

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. x est un point de discontinuité de première espèce de f si f est discontinue en x et si les limites à gauche et à droite $(f(x^-),f(x^+))$ existent. On note $\mathrm{Disc}(f)$ l'ensemble de ces points.
1) Soit f une fonction monotone. Montrer que les limites à gauche et à droite existent toujours et que $\mathrm{Disc}(f)$ est dénombrable.
2) f est désormais quelconque. Montrer que $\mathrm{Disc}(f)$ est dénombrable.

3.6 Suites et séries de fonctions

Exercice 3.6.1 **#Corrigé !**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels distincts et bornée. Notons $\Delta = \{a_n, n \in \mathbf{N}\}$.

1) Montrer que la fonction f définie par
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x-a_n|}{2^n}$$
est bien définie sur $\mathbf{R}$ et dérivable dans $\mathbf{R}-\Delta$.

2) La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est plus supposée bornée. Donner une fonction analogue ayant les propriétés, démontrées précédemment, de f.

Exercice 3.6.2 **#Corrigé !**

Montrer que
$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}\ .$$

Exercice 3.6.3 **#Corrigé !**

Montrer que quels que soient les nombres réels $a, b > 0$,
$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{t^a - t^b}{\ln t}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(b+1)t} - \mathrm{e}^{-(a+1)t}}{t}\mathrm{d}t\ .$$

Exercice 3.6.4

Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(2x) = \sqrt{2}\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\tau}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 3.6.5

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par
$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}a_k.$$

À l'aide de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$, calculer a_n.

Exercice 3.6.6

Soient f, g deux fonctions continues de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, non constantes, de limite nulle en 0 et en l'infini. Notons pour tout entier naturel n, $f_n(x) = f(nx)$, $g_n(x) = g(x/n)$ et $h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$. Étudier la convergence simple et uniforme des fonctions f_n, g_n et h_n sur tout intervalle de $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 3.6.7 (Logarithme complexe)

1) Quel est le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$? On notera $\mathrm{L}(z)$ la somme de cette série dans le disque ouvert de convergence.

2) Montrer que si $|z| < 1$ alors la fonction u, définie par $u(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{L}(tz)}$, est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée.

3) Démontrer que si $|z| < 1$ alors
$$\mathrm{e}^{\mathrm{L}(z)} = 1 + z.$$
Interpréter cela.

4) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$. Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout nombre complexe z de module $< \alpha$,

$$\det(\mathrm{I}_p + z\mathrm{A}) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{tr}\left(\mathrm{A}^n\right) z^n\right).$$

5) Que dire de A si pour tout $n \geqslant 1$, $\operatorname{tr}(\mathrm{A}^n) = 0$?

Exercice 3.6.8

Soit a un entier $\geqslant 2$. Montrer que quand $x \longrightarrow 1^-$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{a^n} \sim -\frac{\ln(1-x)}{\ln a}.$$

Exercice 3.6.9 (Points du réseau $\mathbf{Z}^2$)

On se place dans $\mathbf{R}^2$ euclidien usuel. Pour tout $r \geqslant 0$, notons $q(r)$ le nombre de points à coordonnées entières de norme $\leqslant r$ et $q_+(r)$ ceux parmi les $q(r)$ précédents dont les coordonnées sont positives.

1) Trouver des équivalents en $+\infty$ de q et q_+.

2) Soit f définie sur $]-1, 1[$ par

$$f(t) = \frac{1}{1-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}\right)^2.$$

Montrer que

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_+(\sqrt{n}) t^n.$$

4) Donner un équivalent de f en 1^-.

Exercice 3.6.10 **#Corrigé !**

Déterminer l'existence et la valeur de la limite quand $x \longrightarrow 1^-$ de

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n^2}.$$

3.7 Intégrales paramétriques

Exercice 3.7.1

Pour tout nombre complexe z, posons

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t \ .$$

1) Montrer que Γ est bien définie sur l'ensemble A des nombres complexes de partie réelle strictement positive.
2) Montrer que pour tout nombre complexe $z \in A$,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ .$$

3) Quelle fonction, Γ prolonge-t-elle ? Calculer $\Gamma(1/2)$.
4) Montrer que lorsque x tend vers 0, $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$.
5) Montrer que pour tout $z \in A$,

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \ .$$

Exercice 3.7.2 (Intégrale de Fresnel)

Soit F définie par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(-t^2+i)x^2}}{t^2-i} \mathrm{d}t$.
1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}_+$ et dérivable en tout point $x > 0$. Calculer sa dérivée.
2) En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{F}(x) = \sqrt{\pi} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2} \mathrm{d}t$.
3) En déduire finalement la valeur de l'intégrale de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) \mathrm{d}t.$$

(Indication : elle vaut la partie réelle de $\mathrm{F}(0)$ *qui se calcule si l'on n'est pas bête, et on trouve* $\sqrt{\pi/8}$*.)*

3.8 Calcul différentiel

Exercice 3.8.1

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\mathrm{d}\varphi_0$ est inversible. Montrer qu'il existe un ouvert sur lequel φ est injective.

Exercice 3.8.2

Soit f une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Notons $\mathrm{F}(x) = f(||x||)x$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.
1) Montrer que F est différentiable et quels que soient x, h dans $\mathbf{R}^n$,

$$(\mathrm{dF}_x(h), h \mid \geqslant) \, f(||x||) \, ||h||^2 \ .$$

2) En déduire que F est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme.

4

Théorie des ensembles

4.1 Notions élémentaires

Exercice 4.1.1

Démontrer que tout ensemble X ne se surjecte pas dans $\mathfrak{P}(X)$.

Exercice 4.1.2

Soit X un ensemble non vide. Soit f de X×X dans $\mathbf{R}$ telle que, quels que soient les éléments x, y, z de X, $f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=0$. Démontrer qu'il existe g de X dans $\mathbf{R}$ telle que, quels que soient les éléments x, y de X, $f(x,y)=g(y)-g(x)$.

Exercice 4.1.3 **#Corrigé !**

On définit des sous-ensembles de $\mathbf{N}$ par $A_1=\varnothing$, $B_1=\{0\}$ et pour $n\geqslant 1$,

$$A_{n+1}=B_n+1=\{x+1, x\in B_n\},$$

$$B_{n+1}=A_n\Delta B_n=(A_n\cup B_n)-(A_n\cap B_n).$$

Montrer que pour tout n, $B_{2^n}=B_1$.

Exercice 4.1.4 (Axiome du choix)

Montrer que les formulations suivantes sont équivalentes à l'axiome du choix *(Pour tout ensemble X d'ensembles non vides, il existe une fonction définie sur X qui pour tout sous-ensemble A de X associe un élément de A).*

1. Pour tout ensemble E, il existe une fonction qui à chaque partie A non vide E associe un élément de A.
2. Pour toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$, il existe un système de représentants des classes de $\mathcal{R}$.
3. Toute surjection est associable à une section.
4. Le produit $\prod_{i\in I} X_i$ d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'ensembles non vides est non vide.

Exercice 4.1.5 (Théorème de Cantor et Bernstein)

Soient E, F deux ensembles tels que f soit une injection de E dans F et g une injection de F dans E.

1) Soit X un ensemble et φ une application de $\mathfrak{P}(\mathrm{X})$ dans $\mathfrak{P}(\mathrm{X})$ croissante pour l'inclusion. Montrer que φ admet un point fixe.
2) À l'aide de $\mathrm{S}\mapsto \mathrm{E}-g(\mathrm{F}-f(\mathrm{S}))$, montrer qu'il existe une bijection de E dans F.

Exercice 4.1.6

Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si et seulement si pour toute fonction $f:E\longrightarrow E$ il existe $A\subset E$, $A\neq\varnothing$, $A\neq E$ telle que $f(A)\subset A$.

4.2 Dénombrement

Dans les exercices suivants E est un ensemble fini de cardinal le nombre entier naturel n.

Exercice 4.2.1

Calculer $|\mathfrak{P}(E)|$ et montrer que l'ensemble des parties de cardinal pair a le même nombre d'éléments que celui des parties de cardinal impair.

Exercice 4.2.2

Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{X \in \mathfrak{P}(E)} |X|$.

b) $\sum_{(X,Y) \in \mathfrak{P}(E)^2} |X \cap Y|$.

c) $\sum_{(X,Y) \in \mathfrak{P}(E)^2} |X \cup Y|$.

Exercice 4.2.3

Montrer que $\sum_{i+j=n} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{n}$.

Exercice 4.2.4 **#Corrigé !**

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, posons B_n le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et $B_0 = 1$.

1) Donner une relation de récurrence, permettant de déterminer B_n. Écrire un algorithme renvoyant B_n selon une complexité $O(n^2)$ en multiplication. L'implémenter sur machine, que constate-t-on ?

2) Considérons f définie par
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \ .$$
Donner son ensemble de définition et trouver une équation différentielle vérifiée par f.

3) En déduire, pour tout entier naturel n, B_n sous forme de somme infinie.

Exercice 4.2.5 **#Corrigé !**

Montrer que quels que soient les entiers naturels strictement positifs k, n, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 4.2.6 **#Corrigé !**

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre k maximal de parties E_i de cardinal impair de E telles que quels que soient $i \neq j$, le cardinal de $\mathrm{E}_i \cap \mathrm{E}_j$ est pair.

Exercice 4.2.7

Notons $\Delta(\mathrm{X}, \mathrm{E}) = ||\mathrm{E} - \mathrm{X}| - |\mathrm{E} \cap \mathrm{X}||$ la discrépance de X par rapport à E. Montrer que
$$\frac{1}{|\mathfrak{P}(\mathrm{E})|} \sum_{\mathrm{X} \subset \mathrm{E}} \Delta(\mathrm{X}, \mathrm{E})^2 = |\mathrm{E}| \, .$$

Exercice 4.2.8 (A Telescoping Constraint)

Soient S un ensemble de cardinal $n > 1$ et $f : \mathfrak{P}(S) \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(A \cap B) = \min(f(A), f(B))$.
Montrer que
$$\sum_{A \subset S} (-1)^{|A|} f(A) = (-1)^n (f(S) - \max_{B \neq S} f(B)) \ .$$

4.3 Groupe symétrique

EXERCICE 4.3.1 **#Corrigé !**

À quelle condition le carré d'un cycle de longueur p est un cycle de longueur p ?

5

Probabilités

Exercice 5.1

On munit le grouype symétrique $\mathfrak{S}_n$ de la tribu de ses parties et de la probabilité uniforme. Déterminer la probabilité au'une permutation soit sans point fixe et évaluer cette probabilité quand n croît indéfiniment.

Exercice 5.2

Soit G un groupe fini non commutatif. On note $Z(G)$ le centre de G et $N(a)$ l'ensemble des éléments qui commutent avec a, où a est un élément de G. Démontrer que si a n'appartient pas à $Z(G)$ alors

$$\frac{|G|}{|N(a)|} \geqslant 2 \text{ et } \frac{|N(a)|}{|Z(G)|} \geqslant 2 \ .$$

En déduire que $|Z(G)| \leqslant \frac{1}{4}|G|$.

Démontrer que si a et b sont conjugués, c'est-à-dire s'il existe g dans G tel que $g^{-1}ag = b$, alors $N(a)$ et $N(b)$ sont isomorphes.

En déduire finalement que la probabilité que deux éléments de G soient permutables est $\leqslant \frac{5}{8}$ et que si elle vaut $\frac{5}{8}$ alors $|G|$ est divisible par 8.

Exercice 5.3

Considérons la situation suivante. Une particule est confinée à être en trois lieux : A, B et C. On étudie son mouvement selon un temps discret. Sachant qu'à l'instant n la particule est en A (resp. B ; resp. C), elle a une probabilité 1/2 de se trouver en B (resp. C) (en C (resp. A) ; en A (resp. B)).

1) On suppose que la particule est en A à l'instant 1. Calculer a_n, (resp. b_n ; resp. c_n) la probabilité à l'instant n d'être en A (resp. B ; resp. C).
2) Quel est le comportement après un temps long ? Commentaires.

Exercice 5.4

Considérons la situation suivante. Un automobiliste doit se garer dans un parking. S'il trouve une place alors il se gare. On étudie la situation selon un temps discret. A l'étape n il a une probabilité $\dfrac{n}{n+1}$ de trouver une place.

1) Soit T la variable aléatoire qui renvoie l'étape où l'automobiliste trouve une voiture. Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, calculer $P(T \geqslant n)$.
2) En déduire l'étape moyenne où l'automobiliste se gare.

Exercice 5.5

Montrer que la tribu borélienne de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire celle engendrée par l'ensemble des segments de $\mathbf{R}$, est également celle engendrée par les intervalles ouverts et celle engendrée par les ouverts ou les fermés de $\mathbf{R}$.

Exercice 5.6

Soient $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire telles que $\mathrm{X}(\Omega) = \mathrm{X}_n(\Omega) = \mathbf{N}$. Montrer que $(\mathrm{G}_{\mathrm{X}_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers G_X sur le disque unité ouvert si et seulement si $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers X.

Exercice 5.7 (Entropie)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{X}$. On note $p_\mathrm{X}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$ et par entropie de X le nombre

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p_\mathrm{X}(x) \ln p_\mathrm{X}(x).$$

1) Vérifier que H(X) est un réel positif, nul si et seulement si X est constante presque sûrement.
2) Montrer que si X et Y sont indépendantes et à valeurs dans les ensembles finis respectifs $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ alors

$$\mathrm{H}((\mathrm{X}, \mathrm{Y})) = \mathrm{H}(\mathrm{X}) + \mathrm{H}(\mathrm{Y}).$$

Exercice 5.8 (Nature presque sûre d'une série)

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires toutes de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On désire étudier la converge de la série $\mathrm{S}(\alpha) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha \mathrm{X}_n}$ selon $\alpha > 0$. Notons C_α l'événement $(\mathrm{S}(\alpha)$ converge$)$.

1) Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{C}_\alpha)$ pour $\alpha > 1$.
2) Soit $\alpha < 1$.
   a) Montrer que si $n \geqslant 1$ alors $\mathbb{P}(\mathrm{X}_n > n^{1-\alpha}) \leqslant (1-p)^{n^{1-\alpha}-1}$.
   b) En déduire que
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} (\mathrm{X}_k > k^{1-\alpha})\right) = 0.$$
   c) En déduire la nature presque sûre de $\mathrm{S}(\alpha)$.
3) Déterminer S(1) en calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant k} (\mathrm{X}_n \geqslant \lambda \ln n)\right)$ pour λ bien choisi.

Exercice 5.9 (Rademacher)

Soit $\mathrm{M} = (\mathrm{X}_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]\times[1,n]}$ une matrice de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathbb{P}((\mathrm{X} = 1)) = \mathbb{P}((\mathrm{X} = -1)) = 1/2$. Calculer l'espérance et la variance de $\det \mathrm{M}$.

Exercice 5.10

Soient a, b deux réels tels que $b \neq 0$ et $a \geqslant 0$. Soit X une variable aléatoire discrète réelle telle que X et $a\mathrm{X} + b$ suivent la même loi. Démontrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 5.11 **#Corrigé !**

Soit p un nombre premier et n un entier naturel non nul. Considérons la probabilité uniforme sur l'ensemble $\mathcal{U}_n$ des polynômes unitaires de degré n de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[\mathrm{X}]$. Soient P et Q deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathcal{U}_n$. Calculer

$$\mathbb{P}(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} = 1).$$

Exercice 5.12 #Corrigé !

Soient $c_{n,k}$ le nombre de permutations de S_n dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints (D.P.C.S.D) comporte k cycles (les 1-cycles sont également comptés). Considérons donc X_n la variable aléatoire qui retourne le nombre de cycles dans la D.P.C.S.D définie sur $(\mathrm{S}_n, \mathcal{P}(\mathrm{S}_n)$, probabilité uniforme). Donner un équivalent de $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$ quand n croît indéfiniment.

Exercice 5.13 #Corrigé !

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. À quelle condition la suite admet presque sûrement une sous-suite convergente ?

Exercice 5.14 (Inégalité de Alzer) #Corrigé !

Soit X une variable aléatoire presque sûrement à valeurs strictement positives, bornée et telle que $E(\ln X)$ existe. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique suivante :

$$E(X) - \mathrm{e}^{E(\ln X)} \geqslant \frac{E\left(\left(X - \mathrm{e}^{E(\ln X)}\right)^2\right)}{2\,||X||_\infty} \ .$$

En déduire le cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique.

6

Logique

EXERCICE 6.1

Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

« Un tiroir contient un nombre n de crayons de couleur. Alors tous les crayons sont de la même couleur. En effet, raisonnons par récurrence sur le nombre n de crayons. Si $n = 1$ alors l'assertion est vraie. Supposons $n > 1$. L'on retire un crayon du tiroir ; il en reste $n - 1$ et ils sont tous d'une même couleur, par exemple rouge, d'après l'hypothèse de récurrence. On remet le crayon dans le tiroir et on en retire un autre ; il est rouge et les $n - 1$ crayons du tiroir sont tous de la même couleur, qui est nécessairement rouge. Donc tous les crayons sont rouges. »

7

Correction

7.1 Indications

Exercice 1.1.11

Remarquer que G est un $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel.

Exercice 1.1.17

1) Utiliser l'identité de Bézout.
2) I et $\mathbf{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbf{Q}$ donc I$\cap\mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Q}$ et donc de $\mathbf{Z}$. Utiliser 1).
3) Ok.
4) Ok, penser à utiliser x/y lorsque l'on traite de la somme $x+y$.

Exercice 1.1.21

1) Ok.
2) Par l'absurde construire un élément d'ordre $> r$.
3) Considérer une famille $g_1, \ldots, g_t$ génératrice et la fonction $(x_1, \ldots, x_t) \longmapsto x_1 \ldots x_t$définie sur $< g_1 > \times \ldots \times < g_t >$. Utiliser le théorème du rang et conclure.
4) Conséquence direct de 3) avec les arguments de 2).

Exercice 1.3.4

Notons ϕ_k la restriction de u^k à Ker u^{k+1} et à valeurs dans Im $u^k \cap$ Ker u. Montrer que ϕ_k est surjective de noyau Ker u^k. En déduire le résultat.

Exercice 1.4.9

— Je peux me ramener à $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + \ldots + \varepsilon_1 \mathrm{X}^1 + \varepsilon_0$, où $\epsilon_0 \neq 0$.
— Je montre que si $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels > 0 alors $\displaystyle\sum_{i,j} \frac{a_i}{a_j} \geqslant n^2$.
— Lien coefficients-racines #SommesDeNewton.

Exercice 1.5.1 (Déterminant de Vandermonde)

Démontrer le résultat par récurrence en faisant apparaître le déterminant associé aux nombres complexes $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Exercice 1.5.4 (Critère d'Hadamard)

Démontrer par l'absurde que si $AX = 0$ alors $X = 0$.

Exercice 1.5.15

Considérer J la matrice d'ordre $2n$ dont tous les coefficients sont des 1 et écrire que la matrice associée à M dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est $\mathrm{J} - \mathrm{I}_{2n}$ dont le spectre est inclus dans $\{-1, 2n-1\}$.

Exercice 1.7.3

Réécrire l'équation de telle sorte à faire apparaître une relation de divisibilité

Exercice 2.2.13

Démontrer que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et si $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$ alors pour tout nombre réel $x > 0$, il existe $\theta_x \in]0,1[$ tel que $\Delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x + n\theta_x)$.

Exercice 2.4.5

Constater qu'à n fixé, $\binom{n}{k}$ croît avec k puis décroît avec k.

Exercice 2.4.6

La symétrie par conjugaison invite à écrire $u_n = |u_n| \mathrm{e}^{\theta_n}$, où $\theta_n \in [-\pi, \pi]$.

Exercice 2.4.11

Traiter d'abord le cas où la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est supposée décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 2.6.7

Pour tout $y \in [0,1]$, considérer la projection orthogonale de $x \mapsto K(x,y)$ sur une famille finie orthonormée de Ker $(\Phi - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.

Exercice 2.6.8

Soit $\mathrm{P} \in \Omega_n$. Je note $a_1 < \ldots < a_n$ les racines distinctes de P et $x_0, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que $x_0 < a_1 < x_1 < a_2 < \ldots < x_{n-1} < a_n < x_n$. En dimension finie les normes sont équivalentes, je considère la norme infinie sur le segment $[x_0, x_n]$ et note $r = \inf_{0 \leqslant k \leqslant n} |\mathrm{P}(x_k)| > 0$. Alors pour tout R de $\mathbf{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $||\mathrm{P} - \mathrm{R}||_\infty \leqslant r/2$, R change strictement n fois de signe et donc a n racines distinctes, R étant de degré $\leqslant$ n, R appartient à Ω_n.

Exercice 2.6.10

1) Évident.+
2) Évident.
2) Montrer que $\det(\mathrm{M}) \leqslant \rho(\mathrm{M})^n \det(\mathrm{A}_0)$ et considérer $\det(\mathrm{A}_0 + t\mathrm{B})$.

Exercice 2.6.12

Si A est un tel ensemble alors considérer $||x|| = \inf \{\alpha > 0, x/\alpha \in \mathrm{A}\}$.

Exercice 3.3.19

Développement de Taylor à l'ordre $k_0 - 1$ de u, découpage d'intégrale et uniforme continuité.

Exercice 3.6.1

2) Considérer la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x - a_n|}{2^n(1 + |a_n|)} \ .$$

Exercice 3.6.2

Considérer les fonctions f_n définies par $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!}$.

Exercice 3.6.3

Y voir le théroème des doubles intégrables de Fubini. Montrer que $I(a,b) = \ln\left(\frac{a+1}{b+1}\right)$.

Exercice 3.2.4

Étudier les ensembles T et F, définis par

$$T = \{(x,y) \in I^2, x < y\},$$
$$F = \left[\frac{f(x)-f(y)}{x-y}, (x,y) \in I^2\right].$$

Exercice 3.2.5

1)

Exercice 3.3.20

Taylor à l'ordre n en rajoutant le terme $n+1$ de force.

Exercice 3.3.21

Gram-Schmidt puis division euclidienne.

Exercice 4.1.3

On pourra considérer les polynômes $P_n = \sum_{k \in A_n} \mathrm{X}^k$ et $Q_n = \sum_{k \in B_n} \mathrm{X}^k$ et raisonner modulo 2.

Exercice 4.2.4

2) Démontrer que f est solution de $y' = e^x y$.

Exercice 4.2.5

Déterminer une bijection de $[|1,n|] \times \mathcal{P}_{k-1}([|1,n-1|])$ dans $[|1,k|] \times \mathcal{P}_k([|1,n|])$.

Exercice 4.2.6

Soient $x_1, \dots, x_n$ les éléments de E.
Considérer la matrice M de taille (n,k) de coefficients m_{ij} dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ tels que $m_{ij} = 1$ si $x_i \in E_j$ et $m_{ij} = 0$ sinon. Voir que ${}^t\mathrm{MM} = I_n$.

Exercice 4.3.1

p est impair.

Exercice 5.12

$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) \sim \ln n$.

7.2 Démonstrations

Exercice 1.1.7

(Dans la suite, G n'est pas trivial.) Soit a un élément différent du neutre e. Alors $< a >$ est un sous-groupe de G. Il est différent de $\{e\}$ donc $< a >= G$ et G est monogène. Si G est infini alors il est isomorphe à $(\mathbf{Z}, +)$ ce qui est impossible — $(2\,\mathbf{Z}, +)$ est un sous-groupe non trivial de $(\mathbf{Z}, +)$. G est donc fini. Si le cardinal de G n'est pas un nombre premier alors il admet au moins le sous-groupe non trivial $< a^{n/d} >$, où n est son cardinal et d un diviseur différent de 1, ce qui est absurde.

Exercice 1.1.8

Je note G un groupe de cardinal pq et soient H et K deux sous-groupes distincts de cardinal q. Alors H et K sont cycliques car q est premier, autrement dit $H = \{e, a, \ldots, a^{q-1}\}$ et $K = \{e, b, \ldots, b^{q-1}\}$. Soit $x \in H \cap K$. Si x est non nul alors il génère H et K et donc $H = K$, ce qui est absurde. Donc $H \cap K = \{e\}$. J'en déduis que $\phi : H \times K \longrightarrow G \quad (h, k) \mapsto hk$, est un monomorphisme de groupes. Donc $q^2 \leqslant pq$. Ce qui est absurde.

Exercice 1.1.9

(Dans la suite, $p \neq 2$.) Soit G un groupe d'ordre $2p$. Un élément de G a un ordre divisant $2p$, autrement dit l'ordre d'un élément non nul de G est $2, p$ ou $2p$. S'il existe x d'ordre $2p$ alors x^2 est d'ordre p. Supposons que tous les éléments non nuls de G sont d'ordre 2. Alors G est abélien. Soit H un sous-groupe de G différent de G. Alors pour $x \notin H$, $H \cup xH$ est un sous-groupe de G de cardinal $2|H|$. J'en déduis par maximalité que $|G| = 2^n$, où n est un entier naturel. Ce qui est absurde.

Exercice 1.1.10

S'il y a un élément d'ordre pq alors c'est bon ! S'il n'y a que des éléments d'ordre p (resp. q) alors G est un $\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$-espace vectoriel (resp. $\mathbf{Z}/q\,\mathbf{Z}$-espace vectoriel) de dimension finie (car G est lui-même fini), et donc $|G| = p^n$ (resp. $|G| = q^n$), où n est un entier naturel, ce qui est absurde. S'il existe un élément d'ordre p et un d'ordre q alors leur produit est d'ordre pq. In fine, G est cyclique.

Exercice 1.1.14

Pour tout point x du segment S étudié, je note I_x l'ensemble des fonctions s'annulant en x. Alors pour tout $x \in \mathrm{S}$, I_x est un idéal non trivial comme image réciproque de l'idéal $\{0\}$ par le morphisme d'anneaux $f \mapsto f(x)$ défini de $\mathcal{C}^0(\mathrm{S})$ dans $\mathbf{R}$.

Plus encore, ce sont des idéaux non triviaux et maximaux. En effet, soit $x \in S$. Je considère un idéal J qui contient l'ensemble $\mathrm{I}_x \cup \{g\}$, où $g \notin \mathrm{I}_x$. Je note w la fonction affine par morceaux définie sur S dont le graphe relie $(a, 1)$ à $(x, 0)$ et $(x, 0)$ à $(b, 1)$, où $\mathrm{S} = [a, b]$. w appartient bien à I_x, et la fonction $\varphi := g^2 + w$ appartient donc à J. Or φ est inversible [1] donc $\mathrm{J} = \mathcal{C}^0(\mathrm{S})$. D'où le résultat.

Réciproquement, soit I un idéal maximal de $\mathcal{C}^0(\mathrm{S})$. Pour tout $f \in \mathrm{I}$, comme vu précédemment, I n'admet aucun inversible, il existe donc $X(f)$ non vide tel que pour tout $x \in X(f)$, $f \in \mathrm{I}_x$. Je pose $X_{\mathrm{S}} := \displaystyle\bigcap_{f \in \mathrm{J}} X(f)$. Si X_{S} est vide alors il existe deux fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathrm{S})$ qui n'ont pas de point commun d'annulation. De manière analogue à ce qui est fait précédemment, je peux exhiber une fonction inversible appartenant à I. *Absurde.* Si X_{S} a plus d'un élément alors I est inclus dans I_x, or il est maximal donc $\mathrm{I} = \mathrm{I}_x$.

Exercice 1.1.15

a) Facile.

1. Pour tout élément $t \neq x$, $\varphi(t) > 0$ et $\varphi(x)$ vaut comme limite $g(x)^2 > 0$.

b) Je note e le neutre de G. $e^1 = e$, donc $e \in \mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}$. Si $x^n = e$ et $(y^{-1})^m = e$ alors $(xy^{-1})^{nm} = (x^n)^m(x^{-m})^n = e^2 = e$, donc $xy^{-1} \in \mathrm{T}_{mn} \subset \mathrm{T}$.
c) Si G est fini alors le théorème de Lagrange assure que tout élément de G appartient à $\mathrm{T}_{|\mathrm{G}|}$. Donc $\mathrm{G} \subset \mathrm{T}$.
d) Je note $n = dn', m = dm'$, où $d = m \wedge n$ et donc $n' \wedge m' = 1.\mathrm{T}_d \subset \mathrm{T}_m \cap \mathrm{T}_n$ est clair. Réciproquement, je suppose que $x \in \mathrm{T}_m \cap \mathrm{T}_n$. Alors, n' et m' étant premiers entre eux, il existe deux entiers u, v tels que $un' + vm' = 1$ et donc $x^d = e$. D'où le résultat.
e) Soit $x \in G$. Je note $y := f(x) \in \mathrm{T}_n$. Alors $y^m = f(x)^m = f(x^m) = f(e) = e$. Donc $y \in \mathrm{T}_m \cap \mathrm{T}_n$, et d'après la réponse précédente, $y \in \mathrm{T}_1$. Donc f est le morphisme nul.
La première inclusion est claire. Réciproquement, je me donne x un élément de T_{mn}.

Exercice 1.1.16

1) Ok.
2) Ok, avec le neutre n défini par $n(e) = 1$, et $n(g) = 0$ sinon.
3) En notant $\mathbf{Z}_f$ l'ensemble fini des valeurs prises par f, f est inversible si et seulement si les éléments de $\mathbf{Z}_f$ sont premiers dans leur ensemble.
4)

Exercice 1.5.1 (Déterminant de Vandermonde)

Je note le déterminant $V(a_1, \ldots, a_n)$.

Premièrement, s'il existe $k \neq j$ tels que $a_k = a_j$ alors le déterminant est clairement nul. Nous supposons donc que les nombres complexes en question sont distincts deux à deux.

<u>Je suppose que $n = 2$:</u> dans ce cas, $V(a_1, a_2) = a_2 - a_1$ et l'égalité est vérifiée.

<u>Je suppose que $n \geqslant 3$ et l'égalité vérifiée pour $V(a_1, \ldots, a_{n-1})$:</u>
<u>Soit</u> $P = V(a_1, \ldots, a_{n-1}, \mathrm{X})$. Alors en développant la dernière la ligne et comme les nombres complexes en question sont deux à deux distincts, il vient que P est un polynôme de degré $n-1$ dont le coefficient dominant est précisément $(\lambda :=)V(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Or pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $P(a_k) = 0$ (deux lignes identiques dans un déterminant implique la nullité de ce dernier). Donc

$$\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^{n-1} (\mathrm{X} - a_k).}$$

En évaluant P en a_n, l'égalité est vérifiée.

Ainsi, par récurrence le résultat est vrai quel que soit le nombre de nombres complexes considérés.

Exercice 1.5.4 (Critère d'Hadamard)

Soit $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur tel que $AX = 0$. Nous supposons que $X \neq 0$.
Alors il existe i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max \{|x_j|, 1 \leqslant j \leqslant n\} > 0$.
Or pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$.
Donc, en particulier, $|x_{i_0}||a_{i_0 i_0}| \leqslant \displaystyle\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}||x_j|$. La définition de i_0 implique que

$$|a_{i_0 i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|.$$

Ce qui est en contradiction avec les hypothèses faites sur A. Donc $X = 0$ et A est inversible.

Exercice 1.5.18

Considérons les nombres $\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^{2^2}, \dots, \mathrm{e}^{2^{n^2}}$. Soit $\mathrm{M} = (m_{ij})$ une matrice de format $n \times n$ formée à partir de ces nombres. Alors

$$\det \mathrm{M} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \epsilon(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \epsilon(\sigma) \mathrm{e}^{\delta(\sigma)},$$

où $\delta(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} 2^{p_{k\sigma(k)}}$ et les p_{ij} distincts deux à deux appartenant à $\{1, 2, \dots, n^2\}$.

Or e est transcendant et pour tout permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$, $\epsilon(\sigma)$ est un entier non nul, donc si ($\delta(\sigma) = \delta(\sigma')$ implique $\sigma = \sigma'$) alors $\det \mathrm{M}$ est la valeur d'un polynôme non nul à coefficients entiers évalué en e, et donc $\det \mathrm{M} \neq 0$.

Soient $\sigma, \sigma' \in \mathrm{S}_n$ tels que $\delta(\sigma) = \delta(\sigma')$. Alors

$$\sum_{\sigma(k) \neq \sigma'(k)} 2^{p_{k\sigma(k)}} = \sum_{\sigma(k) \neq \sigma'(k)} 2^{p_{k\sigma'(k)}}.$$

Or les p_{ij} sont distincts deux à deux donc s'il existe k tel que $\sigma(k) \neq \sigma'(k)$ alors un entier naturel est décomposé de deux manières en base 2. *Absurde.* Donc $\sigma = \sigma'$. D'où le résultat.

Exercice 1.6.3

Écrire $a_i b_j + a_j b_i = b_j b_i (a_i/b_i + a_j/b_j)$ et faire apparaître une matrice de Gram.

Exercice 2.2.10

Supposons que l'une d'entre elles ne tendent pas vers l'infini, par exemple la suite des dénominateurs. Alors cette dernière admet une suite extraite bornée. La suite extraite associée aux numérateurs est également bornée. Et comme la suite des quotients associée a un nombre fini de termes, x est rationneé. Absurde.

Exercice 2.5.1

1) Traitons le cas $\alpha = 1, \beta = 0$. Supposons par l'absurde que la série des inverses des entiers naturels converge, notons-la E. Alors il en va de même pour la série des inverses des entiers naturels impairs, notons-la I. À partir de la bijection $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$, $k = 2^s(2n+1)$, je peux donc écrire

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s(2n+1)} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^s} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \right) = 2I$$

Ainsi

$$0 = E - 2I = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}}_{= \frac{1}{n(2n+1)}} \quad - \quad 2$$

Finalement,

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} \leqslant \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(2n-2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{5}{6}$$

Absurde.

Exercice 2.5.5 (Étude des séries alternées)

Je note $S_n = u_0 + \dots + u_n$.

1) Dans l'ordre les séries suivantes conviennent : $(d_n)_{n\geqslant 0} = (A, -A, A, -A, A, \ldots)$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ de somme $\ln 2$ (car c'est une série alternée) et la série géométrique de raison $1/2$ *(En effet, il est immédiat que si une série convergente enveloppe un réel alors ce dernier est la somme de la série. Le candidat est donc 2, or s'il est enveloppé alors $\forall n \geqslant 0, |1/2^n| \leqslant |1/2^{n+1}|$, ce qui est absurde.).*
2) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \theta_{n+1}u_{n+1} - \theta_{n+2}u_{n+2}$ et donc $u_{n+1} = -u_{n+2}\theta_{n+2}/(1-\theta_{n+1})$. D'où le caractère alterné. Ainsi pour tout entier naturel n,

$$S_n - A = -\theta_{n+1}u_{n+1} = \underbrace{-(\theta_{n+1}/(1-\theta_{n+1}))}_{\leqslant 0}(S_{n+1} - A),$$

et donc une des deux triples inégalités $S_n \leqslant A \leqslant S_{n+1}$, $S_{n+1} \leqslant A \leqslant S_n$ est vérifiée.
3) L'hypothèse permet d'exhiber une suite *positive* $(\theta_n)_{n\geqslant 1}$ telle que pour tout entier naturel n, $A - (u_0 + \ldots + u_n) = \theta_{n+1}u_{n+1}$. Soit n un entier naturel. Le calcul effectué en 2) donne l'égalité $u_{n+1}(1-\theta_{n+1}) = -u_{n+2}\underbrace{\theta_{n+2}}_{\geqslant 0}$, de laquelle il vient que $\theta_n \leqslant 1$.

Exercice 1.7.2

Identité de Bézout : $1 = \mathrm{AP} + \mathrm{BQ}$, en fait $d = \mathrm{AP} + \mathrm{BQ}$, avec A, B à coefficients entiers.

Or pour tout polynôme R, $\mathrm{R}(n+d) = \mathrm{R}(n) \mod d$. Pour tout n, $u_n | d$. Ainsi $u_n | u_{n+d}$ et de même $u_{n+d} | u_n$.

Exercice 2.5.3

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$. Alors — formule de Moivre — $\cos(2n+1)t + i\sin(2n+1)t = (\cos\, t + i\sin t)^{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\cos^{2n+1-k} t\right) i^k \left(\sin^k t\right)$. Et donc en identifiant les parties imaginaires et en divisant par $\sin^{2n+1} t$, j'obtiens :

$$\frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1} t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (\mathrm{cotan}^2\, t)^{n-k} := \mathrm{P}(\mathrm{cotan}^2\, t).$$

Or pour tout $k \in [1, 2n+1]$, $x_k := \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\tau}{4n+2}\right)$ est racine de P, or ils sont distincts puisque cotan^2 restreinte à $]0, \tau/4[$ est injective, au nombre de n et exactement les racines de P, P étant de degré n. Et donc le coefficient de X^{n-1} dans P est l'opposée de la somme des x_k multipliée par le coefficient dominant de P.

Or par convexité de tan et par concavité de sin, pour tout t, $0 < t < \tau/4$, $\sin t < t < \tan t$ et donc $\mathrm{cotan}^2\, t < 1/t^2 < 1/\sin^2 t = \mathrm{cotan}^2\, t + 1$. Et donc

$$\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} + n,$$

et donc

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{4(2n+1)^2}{\tau^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}.$$

D'où $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \tau^2/24$.

Exercice 2.5.6 (Preuve d'Erdös)

Supposons qu'elle converge. Alors il existe un rang m tel que $\displaystyle\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$.

Définissons $N(x)$ comme le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs à x et qui ne sont pas divisibles par un nombre premier autre que les m premiers. Un tel entier peut être écrit sous la forme kr^2 où k est *quadratfrei*.

Puisque seulement les m premiers nombres premiers peuvent diviser k, il y a au plus 2^m choix pour k. Conjointement avec le fait qu'il y au plus $\sqrt{x}$ valeurs possibles pour r, cela nous donne :

$$N(x) \leqslant 2^m \sqrt{x}.$$

Le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs à x et divisibles par un nombre premier différent des m premiers est égal à $x - N(x)$.

Puisque le nombre d'entiers inférieurs à x et divisbles par p est au plus x/p, nous obtenons :

$$x - N(x) \leqslant \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{x}{p_i} < \frac{x}{2},$$

ou encore

$$\frac{x}{2} < N(x) \leqslant 2^m \sqrt{x}.$$

Mais cela est impossible pour tout x strictement supérieur à 2^{2m+2}, d'où la contradiction.

Exercice 2.5.8

Je regroupe par paquets (entre 2^k et 2^{k+1}) dont les sommes valent $\sigma_k = (k+1)\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$. Donc la série est convergente de somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} - 1/2 = 3/2$.

Exercice 2.6.6

Supposons que A est une telle partie et que $A \neq \varnothing$. Par translation on peut supposer que $0 \in A$. Soit $x \in E$ et $x \notin A$. Je pose $S(x) := \{t \geqslant 0 \mid tx \notin A\}$. $1 \in S(x)$ donc $S(x)$ est une partie non vide de $\mathbf{R}_+$ qui admet donc une borne inférieure t_0. Il existe donc $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $t_n \longrightarrow t_0$ et pour tout entier naturel n, $t_n \notin A$. Or A est ouvert donc $E - A$ est fermé et donc $\boxed{t_0 x \notin A}$. Il vient donc que $t_0 > 0$. Autrement dit, il existe $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante telle que $\tau_n \longrightarrow t_0$ et pour tout entier naturel n, $\tau_n \in A$. A étant fermé, il vient que $\boxed{t_0 x \in A}$. L'existence d'un tel vecteur x est absurde donc $A = E$.

Exercice 2.7.1

Soit $k \leqslant n$.

d est bien positive, symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire puisque $d = \mathrm{N} \circ$ "différence" et N est une norme. Enfin, si $d(\mathrm{V}, \mathrm{W}) = 0$ alors $p_{\mathrm{V}} = p_{\mathrm{W}}$, en particulier $\mathrm{Im}\ p_{\mathrm{V}} = \mathrm{Im}\ p_{\mathrm{W}}$, c'est-à-dire V = W.

Soit $(\mathrm{W}_s)_{s\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{G}_k(\mathrm{E})$. Alors la suite $(p_{\mathrm{W}_s})_{s\in\mathbf{N}}$ est une suite de la sphère unité qui est une partie compacte de $(\mathcal{L}(\mathrm{E}), \mathrm{N})$ (car fermée et bornée en dimension finie). Il existe donc φ telle que $p_{\mathrm{W}_{\varphi(s)}} \longrightarrow p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Or $u \mapsto u \circ u - u$ est continue donc p est un projecteur. Enfin pour tout $s \in \mathbf{N}$, $k = \mathrm{rg}\left(p_{\mathrm{W}_{\varphi(s)}}\right) = \mathrm{tr}\left(p_{\mathrm{W}_{\varphi(s)}}\right)$. Or la trace est continue et donc $\mathrm{Im}\ p \in \mathcal{G}_k(\mathrm{E})$, ainsi $\mathrm{Im}\ p$ est valeur d'adhérence de $(\mathrm{W}_s)_{s\in\mathbf{N}}$. D'où le résultat de compacité.

L'idée est de dire que pour relier continûment $\mathrm{V} = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ à $\mathrm{W} = \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_k)$, on considère k chemins γ_i dans E amenant respectivement v_i à w_i, en s'assurant que pout tout $t \in [0,1]$, $\mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_{i-1}, \gamma_i(t), v_{i+1}, \ldots, v_k) := \Gamma_i(t)$ est de dimension k, condition notée (C). Finalement, on considérera la "concaténation" des Γ_i.

— La continuité de Γ_i est assurée puisque $p_{\Gamma_i(t)}$ s'écrit à l'aide du produit scalaire qui est continu. En effet, soit $i \leqslant k$, il n'y a donc que le $i-$ème vecteur qui varie lorsque t varie. Ainsi, quels que soient $t_0, t \in [0,1]$, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$\begin{aligned}\left(p_{\Gamma_i(t)} - p_{\Gamma_i(t_0)}\right)(x) &= (x \mid \gamma_i(t))\,\gamma_i(t) - (x \mid \gamma_i(t_0))\,\gamma_i(t_0) \\ &= \underbrace{(x \mid \gamma_i(t))\,\gamma_i(t) - (x \mid \gamma_i(t))\,\gamma_i(t_0)}_{=a(x)} + \underbrace{(x \mid \gamma_i(t))\,\gamma_i(t_0) - (x \mid \gamma_i(t_0))\,\gamma_i(t_0)}_{=b(x)}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$||a(x)|| \leqslant ||x||\,||\gamma_i(t)||\,||\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)|| \text{ et } ||b(x)|| \leqslant ||x||\,||\gamma_i(t_0)||\,||\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)||\,.$$

γ_i étant bornée (continue sur un compact), il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que

$$d\left(\Gamma_i(t), \Gamma_i(t_0)\right) = \mathrm{N}\left(p_{\Gamma_i(t)} - p_{\Gamma_i(t_0)}\right) \leqslant 2\mathrm{M}\,||\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)||\,.$$

Les γ_i sont continus, d'où le résultat.

— Assurons nous de la condition (C), faisons-le par récurrence. Si $\mathrm{V} = \mathrm{W}$ alors un chemin constant convient. Sinon, V et W étant des sous-espaces vectoriels, il existe une droite $\mathrm{Vect}(x)$ de W qui n'est pas incluse dans V. Il faut donc choisir convenablement les $k-$uplets $(v_1, \dots, v_k)$ et $(w_1, \dots, w_k)$. On prend donc $w_1 := x$ et les autres vecteurs complétant la famille en une base de W. Ainsi $(w_1, v_2, \dots, v_k)$ est de dimension k, il reste donc à s'assurer que pour tout $t \in]0,1[$, $(\gamma_1(t), v_2, \dots, v_k)$ est de dimension k.

Exercice 3.5.4 (Cardinal de l'ensemble des points de discontinuités)

2) Il s'agit à nouveau d'aborder $\mathbf{R}$, qui est infini indénombrable, en le simplifiant à l'aide de réunions dénombrables. On pose $\mathrm{Disc}(f) = \bigcup_{(n,m)\in(\mathbf{N}^*)^2} \mathrm{D}_m^n(f)$, où

$$\mathrm{D}_m^n(f) = [-m, m] \cap \left\{a \in \mathrm{Disc}(f), \left|f(a^+) - f(a^-)\right| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\,.$$

L'étude générale des éléments de $\mathrm{D}_m^n(f)$ est ardue car la vitesse de convergence de f à droite et à gauche dépend du point étudié. Soit $a \in \mathrm{D}_m^n(f)$ et $\varepsilon > 0$. Posons $\mathrm{B}_a^+(\varepsilon) = \{r > 0, a < x < a + r \implies |f(x) - f(a^+)| < \varepsilon\}$. Comme $f(a^+)$ est bien défini, $\mathrm{B}_a^+(\varepsilon)$ est non vide et donc on peut poser $\sigma_a^+(\varepsilon) = \sup \mathrm{B}_a^+(\varepsilon) \in \mathbf{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. De même on définit $\sigma_a^-(\varepsilon)$. On note $\Delta_m^n(\varepsilon, \eta, \alpha) = \{a \in \mathrm{D}_m^n(f), \sigma_a^+(\varepsilon) \geqslant \eta, \sigma_a^-(\varepsilon) \geqslant \alpha\}$. Soient $\eta, \alpha > 0$. Montrons que pour un certain $\varepsilon > 0$, $\Delta_m^n(\varepsilon, \eta, \alpha)$ est fini. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons $\Delta_m^n(\varepsilon, \eta, \alpha)$ infini. Comme $[-m, m]$ est compact on peut supposer que $\Delta_m^n(\varepsilon, \eta, \alpha)$ contient une suite injective $(a_p)_{p\in\mathbf{N}}$ qui est convergente vers $a \in \mathbf{R}$ et quitte à faire des calculs similaires à gauche de a on peut supposer $(a_p)_{p\in\mathbf{N}}$ strictement décroissante vers a. À partir d'un certain rang N, on a $0 \leqslant a_p - a \leqslant \min(\eta, \alpha)$ et $0 \leqslant a_p - a_{p+1} \leqslant \min(\eta, \alpha)$. De la première relation on en déduit que $\left|f(a) - f(a_p^-)\right| \leqslant \varepsilon$ et $\left|f(a) - f(a_{p+1}^-)\right| \leqslant \varepsilon$, ainsi

$$\left|f(a_p^-) - f(a_{p+1}^-)\right| \leqslant 2\varepsilon\,.$$

De la deuxième relation on en déduit que pour $x := (a_p + a_{p+1})/2$, qui est différent de a_p et de a_{p+1}, $\left|f(x) - f(a_p^-)\right| \leqslant \varepsilon$ et $\left|f(x) - f(a_{p+1}^+)\right| \leqslant \varepsilon$, ainsi

$$\left|f(a_p^-) - f(a_{p+1}^+)\right| \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Finalement on a $\left|f(a_{p+1}^-) - f(a_{p+1}^+)\right| \leqslant 4\varepsilon$. Absurde avec $\varepsilon := \frac{1}{8n}$: on a donc montré que $\Delta_m^n\left(\frac{1}{8n}, \eta, \alpha\right)$ est fini. In fine,

$$\mathrm{D}_m^n(f) = \bigcup_{(s,t)\in(\mathbf{N}^*)^2} \Delta_m^n\left(\frac{1}{8n}, \frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right)\,.$$

D'où le résultat.

EXERCICE 3.6.10

$1/2$, autrement dit la supersomme de $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

EXERCICE 4.1.4

(0) équivalent à (1) : (0) est un cas particulier de (1). Réciproquement, on déduit (1) de (0) en prenant comme ensemble E la réunion des ensembles appartenant à X : (0) fournit une fonction de choix sur les parties non vides de E, en particulier sur les parties appartenant à X.

(1) implique (2) : soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. En appliquant (0) à l'ensemble X des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$, on obtient une partie F de E telle que tout élément de E est $\mathcal{R}$-équivalent à un unique élément de F.

(2) implique (3) : à toute surjection $s : E \longrightarrow I$ est associée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E : deux éléments sont équivalents s'ils ont même image par s. Un inverse à droite pour s est donné par un choix de représentants de $\mathcal{R}$.

(3) implique (4) : pour $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides, notons E la réunion disjointe des X_i, c'est-à-dire l'ensemble de tous les couples (i, x) tels que x appartienne à X_i. Alors la première projection, de E dans I, qui à (i, x) associe i, est une surjection, dont toute section fournit un élément du produit des X_i.

(4) implique (1) : soit X un ensemble d'ensembles non vides. En appliquant (4) à la famille de ces ensembles, indexée par X lui-même, on construit un élément de leur produit, c'est-à-dire une fonction de choix.

EXERCICE 4.1.5

1) Considérer $\mathrm{T} = \{\mathrm{S} \in \mathfrak{P}(\mathrm{X}), \varphi(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}\}$ et $\mathrm{X}_0 = \bigcap\limits_{\mathrm{X}\in\mathrm{T}} \mathrm{X}$.
2) Montrer que l'application est croissante, considérer le point fixe et construire la bijection : le point fixe assure la surjectivité, l'injectivité est assurée par f et g.

EXERCICE 5.11

Le calcul se fait par récurrence. Notons t_n la probabilité en question. Premièrement, pour tout entier naturel k, $|\mathcal{U}_k| = p^k$.

— Dénombrons les éléments dans le complémentaire D de $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} = 1)$. $\mathrm{D} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathrm{D}_k$, où D_k est l'ensemble des couples de polynômes dont le *pgcd* est de degré k, la réunion est disjointe. Or un couple de D_k est la donné d'un élément de $\mathcal{U}_k$ et d'un couple de polynômes de $\mathcal{U}_{n-k}$ dont le *pgcd* vaut 1. Il vient l'égalité
$$(1 - t_n)p^{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left(t_{n-k}p^{2(n-k)}\right) p^k,$$
donc
$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_{n-k}}{p^k}.$$

— Calculons t_n. Soit f la série entière $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n z^n$. Elle est de rayon convergence non nul puisque $t_n \leqslant 1$. On peut donc retranscrire l'égalité de récurrence linéaire par un produit de Cauchy sur le disque unité ouvert. Donc pour tout x de module < 1, $1/(1 - x) = f(x)/(1 - x/p)$. Donc $u_0 = 1$ et $u_n = 1 - 1/p$ pour $n \geqslant 1$.

EXERCICE 5.13

La condition est que X_1 soit presque sûrement à valeurs bornées.

Exercice 5.14 (faux)

Notons $\Delta = E\left(\left(X - \mathrm{e}^{E(\ln X)}\right)^2\right)$.
ln étant concave, il vient que $E(\ln X) \leqslant \ln(E(X))$ (1).
Or on a

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & E(X^2) - 2E(X)\mathrm{e}^{E(\ln X)} + (\mathrm{e}^{E(\ln X)})^2 \\ & & \text{(d'après (1) et comme exp est croissante)} \\ & \leqslant & E(X^2) + \mathrm{e}^{\ln(E(X^2))} - 2E(X)\mathrm{e}^{E(\ln X)} \\ & = & 2(E(X^2) - E(X)\mathrm{e}^{E(\ln X)}) \\ & & \text{(d'après } 0 \leqslant X \leqslant \|X\|_\infty\text{)} \\ & \leqslant & 2\|X\|_\infty \left(E(X) - \mathrm{e}^{E(\ln X)}\right) . \end{array}$$

D'où le résultat en divisant par $2\|X\|_\infty$.