

## FEUILLE DE TD 2

**Exercice 1.** Soient  $V$  et  $W$  des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et  $f: V^n \rightarrow W$  une application  $n$ -linéaire. Soient  $\lambda \in K$  et  $x, y \in V$ .

- (1) Exprimer  $f(\lambda x, \dots, \lambda x)$  en termes de  $f(x, \dots, x)$ .
- (2) Pour  $n = 2, 3$  développer respectivement  $f(x + y, x + y)$  et  $f(x + y, x + y, x + y)$ .
- (3) On suppose  $f$  symétrique. Que deviennent les formules précédentes ?
- (4) On suppose  $f$  symétrique mais  $n$  quelconque. Donner une formule pour  $f(x + y, \dots, x + y)$ .

**Exercice 2.** On considère l'application  $\omega: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\omega(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3$$

où  $x = (x_1, \dots, x_4)$  et  $y = (y_1, \dots, y_4)$ .

- (1) Montrer que  $\omega$  est une application bilinéaire antisymétrique.
- (2) En déduire que si  $x, y \in \mathbb{R}^4$  sont liés alors  $\omega(x, y) = 0$ .
- (3) La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 3.** On considère l'application  $f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$f(x, y) := \left( \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right).$$

où  $x = (x_1, \dots, x_4)$  et  $y = (y_1, \dots, y_4)$ . Montrer les affirmations suivantes :

- (1) L'application  $f$  est bilinéaire antisymétrique.
- (2) Si  $x, y \in \mathbb{R}^4$  sont liés alors  $f(x, y) = 0$ .
- (3) Si  $x_1 \neq 0$  et  $f(x, y) = 0$  alors  $y = \lambda x$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (4) Existe-t-il  $x, y \in \mathbb{R}^4$  non liés tels que  $f(x, y) = 0$  ?
- (5) Trouver une application bilinéaire antisymétrique  $g = (g_1, \dots, g_n): \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 3$  telle que  $f = (g_1, g_2, g_3)$  et  $g(x, y) = 0$  si et seulement si  $x, y$  sont liés.

**Exercice 4.** Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,8}$  une matrice carrée de taille 8 à coefficients dans un corps  $K$ . Dans la formule de  $\det(A)$  déterminer le signe correspondant aux termes suivants :

- (1)  $a_{1,8} a_{2,7} a_{3,1} a_{4,6} a_{5,3} a_{6,4} a_{7,2} a_{8,5}$  ;
- (2)  $a_{1,8} a_{2,1} a_{3,3} a_{4,6} a_{5,5} a_{6,7} a_{7,4} a_{8,2}$  ;
- (3)  $a_{1,3} a_{2,6} a_{3,4} a_{4,5} a_{5,1} a_{6,8} a_{7,7} a_{8,2}$  ;
- (4)  $a_{1,6} a_{2,5} a_{3,4} a_{4,1} a_{5,2} a_{6,3} a_{7,7} a_{8,8}$ .

**Exercice 5.** On considère la permutation sur 8 éléments suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soit  $A = (a_{ij}) \in M_8(\mathbb{Q})$  avec  $a_{ij} = 1$  si  $j = \sigma(i)$  et  $a_{ij} = 5$  sinon. Montrer que  $\det(A) - 1$  est un multiple de 25. (*Indication.* Utiliser la formule explicite de  $\det(A)$  et remarquer que si  $\tau \in S_8 \setminus \{\sigma\}$  alors  $\sigma$  et  $\tau$  diffèrent en deux valeurs.)

**Exercice 6.** Soient  $K$  un corps et  $n \geq 1$  un entier. Pour  $a_0, \dots, a_n \in K$  on considère le déterminant dit de *Vandermonde*

$$V(a_0, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de montrer la formule suivante :

$$(\heartsuit) \quad V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

- (1) Montrer que  $V(a_0, \dots, a_n) = 0$  si  $a_i = a_j$  pour certains  $i \neq j$ .
- (2) Vérifier le résultat pour  $n = 1, 2$ .
- (3) Montrer la formule

$$(\clubsuit) \quad V(a_0, \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^n (a_i - a_0).$$

- (4) Conclure par récurrence.
- (5) Soit  $K[X]_{\leq n}$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq n$ . Si  $a_0, \dots, a_n$  sont deux à deux distincts, montrer que l'application linéaire suivante est un isomorphisme :

$$K[X]_{\leq n} \longrightarrow K^{n+1}, \quad f \longmapsto (f(a_0), \dots, f(a_n)).$$

- (6) Dédurre qu'étant donnés  $b_0, \dots, b_n \in K$  il existe un unique polynôme  $f$  de degré  $\leq n$  tel que  $f(a_i) = b_i$ .

**Exercice 7.** Le but de cet exercice est de donner une preuve différente de  $(\clubsuit)$ .

- (1) Montrer que  $f(X) := V(X, a_1, \dots, a_n) \in K[X]$  est un polynôme de degré  $\leq n$ .
- (2) Déterminer les racines de  $f$ .
- (3) Calculer le coefficient dominant de  $f$ .
- (4) Conclure.

**Exercice 8.** Pour un entier  $n \geq 1$  soit

$$A_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Q})$$

la matrice dont les coefficients diagonaux et ceux juste en-dessous valent  $-1$ , ceux juste au-dessus de la diagonale valent  $2$ , et tous les autres sont nuls. On pose  $D_n = \det(A_n)$ .

- (1) Calculer  $D_1$  et  $D_2$ .
- (2) Montrer que  $D_n = bD_{n-1} + cD_{n-2}$ , pour des entiers  $b, c \in \mathbb{Z}$  que l'on déterminera.
- (3) Soit  $V$  l'espace vectoriel formé par les suites  $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_{i+2} = bu_{i+1} + cu_i$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $V$  est un espace vectoriel de dimension  $2$ .
- (4) Déterminer les  $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$  distincts tels que  $u = (\lambda^i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $v = (\mu^i)_{i \in \mathbb{N}}$  appartiennent à  $V$ .

- (5) Montrer que  $u$  et  $v$  forment une base de  $V$ .  
(6) Donner une formule pour  $D_n$  pour tout  $n \geq 1$ .

**Exercice 9.** Soient  $a \in K^\times$  et

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \ddots & a \\ a & a & 0 & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de  $A$  et en déduire la valeur de  $\det(A)$  en fonction de  $a$ .

**Exercice 10.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On considère la matrice

$$A_t := \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & t+6 \\ 4 & 4 & 6-t & 8 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

- (1) Calculer  $\det A_t$ .  
(2) Déterminer les nombres réels  $t$  pour lesquels la matrice  $A_t$  n'est pas inversible.  
(3) Déterminer le noyau de  $A_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .