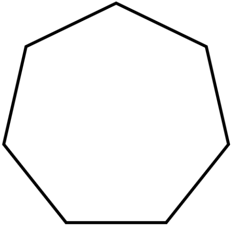
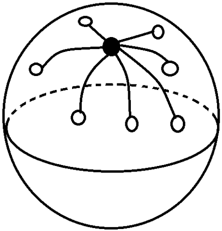
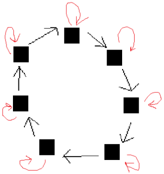
Introduction

géométrie théorie des nombres



$$\boxed{a^7 = 1}$$





topologie des surfaces combinatoire

Qu'est-ce qu'un nombre ?

Qu'est-ce qu'un nombre ?

Attention aux citations, elles ne sont pas authentiques !

Livres à lire (la page Wikipedia, c'est bien aussi !)

Number Theory : An Approach Through History from Hammurapi to Legendre, André Weil (1984)

Histoire des nombres complexes : entre algèbre et géométrie, Dominique Flament (2003)

Éléments d'histoire des mathématiques, Nicolas Bourbaki (1960,1969,1974)

I. Un peu d'histoire

« Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas tousjours reelles ; mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est a dire qu'on peut bien tousjours en imaginer autant que jay dit en chasque Equation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires. », La Géométrie, René Descartes (1637)

« Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas tousjours reelles ; mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est a dire qu'on peut bien tousjours en imaginer autant que jay dit en chasque Equation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires. », La Géométrie, René Descartes (1637)

⋆⋆⋆

« Itaque elegans et mirabile effugium reperit in illo analyseos miraculo, idealis mondi monstro, pene inter Ens et non Ens amphibium quo radicem imaginariam apellamus », Gottfried Wilhelm Leibniz (1702)

« On tombe ainsi sur l'élégant et l'admirable dans ce miracle de l'analyse, monstre du monde des idées, presque amphibie entre l'être et le non-être, que nous appelons racine imaginaire. »

« masque géométrique appliqué sur des formes analytiques dont l'usage immédiat [est] plus simple et plus expéditif », Augustin-Louis Cauchy (1813)

II. Les nombres comme des dessins d'enfants sur un tore

Écoutons Grothendieck :

« Les exigences d'un enseignement universitaire, s'adressant donc à des étudiants (y compris les étudiants dits "avancés") au bagage mathématique modeste (et souvent moins que modeste), m'ont amené à renouveler de façon draconienne les thèmes de réflexion à proposer à mes élèves, et de fil en aiguille et de plus en plus, à moi-même également. Il m'avait semblé important de partir d'un bagage intuitif commun, indépendant de tout langage technique censé l'exprimer, bien antérieur à tout tel langage. L'accent principal se trouve sur les propriétés topologiques des surfaces, ou sur les aspects combinatoires qui en constituent l'expression technique la plus terre-à-terre, et non sur les aspects différentiels, voire conformes, riemannien, holomorphes, et (de là) l'aspect "courbes algébriques complexes". »

« Une fois ce dernier pas franchi cependant, voici soudain la géométrie algébrique (mes anciennes amours!) qui fait irruption à nouveau, et ce par les objets qu'on peut considérer comme les pierres de construction ultime de toutes les variétés algébriques. Alors que dans mes recherches d'avant 1970, mon attention systématiquement était dirigée vers les objets de généralité maximale, afin de dégager un langage d'ensemble adéquat pour le monde de la géométrie algébrique, et que je ne m'attardais sur les courbes algébriques que dans la stricte mesure où cela s'avérait indispensable (notamment en cohomologie étale) pour développer des techniques et énoncés "passe-partout" valables en toute dimension et en tous lieux (j'entends, sur tous schémas de base, voire tous topos annelés de base...), me voici donc ramené, par le truchement d'objets si simples qu'un enfant peut les connaître en jouant, aux débuts et origines de la géométrie algébrique, familiers à Riemann et à ses émules ! »

« On aboutit à cette constatation, qui huit ans après me paraît encore toujours aussi extraordinaire : **toute carte orientée "finie" se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe** *! Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est trouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable. Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffoné sur un bout de papier donne un exemple parfaitement explicite. »*

« On aboutit à cette constatation, qui huit ans après me paraît encore toujours aussi extraordinaire : ***toute carte orientée "finie" se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe !*** *Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est trouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable. Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffoné sur un bout de papier donne un exemple parfaitement explicite. »*

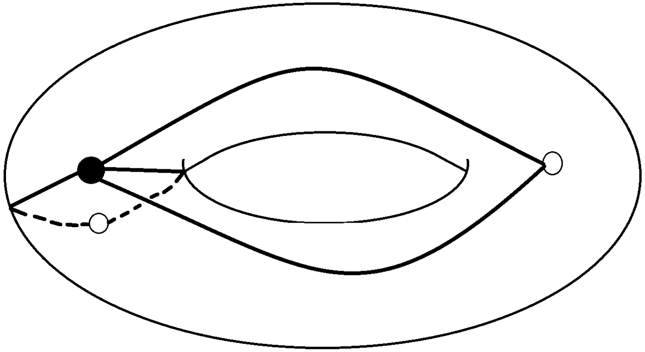
« Une telle supposition avait l'air à tel point dingue que j'étaits presque gêné de la soummettre aux compétences en la matière. Deligne consulté trouvait la supposition dingue en effet, mais sans avoir un contre-exemple dans ses manches. »

*« Pour moi, son message essentiel a été qu'****il y a une identité profonde entre la combinatoire des cartes finies d'une part, et la géométrie des courbes algébriques définies sur des corps de nombres, de l'autre****. »*

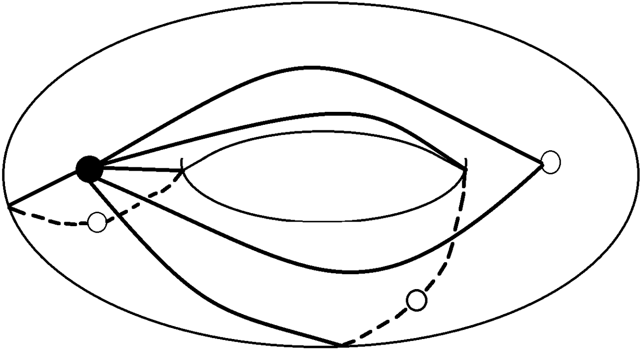
Considérons un dessin sur un tore. Alors il induit un morphisme $\beta : E \longrightarrow \mathbb{P}^1$, où E est une courbe elliptique. Puisqu'on sait à quoi ressemble une courbe elliptique, on a tendance à chercher des équations à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ (qu'on suppose disponible), c'est-à-dire $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \backslash \{0, 1\}$ tel que dans $\mathbb{P}^2$ la courbe E est donné sous sa forme de Legendre

$$v^2 w = u(u - w)(u - \lambda w)$$

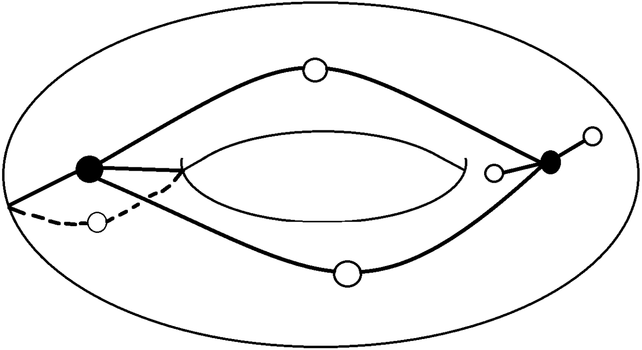
et β une fraction rationnelle homogène dans $K(u, v, w)$, où K est un corps de nombres suffisament grand. Le problème est que ces équations ne sont pas uniques. Cependant certaines quantitiés le sont, par exemple le j–invariant.



$\boxed{j = 1728}$

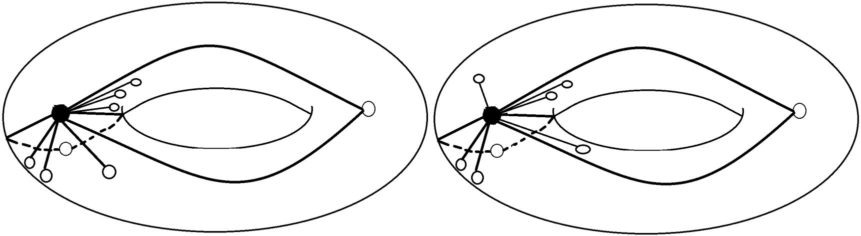


$\boxed{j = 0}$



$$\boxed{j = 8000}$$

horrible computation : $\dfrac{4^4\left(1-\frac{1+\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^3}{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(1-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 8000$

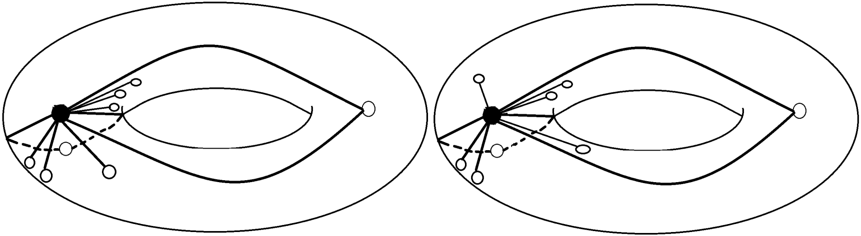


Si j'étais old-school, j'écrirais

$$j = -4^3 \frac{131547 \pm 24887\sqrt{5}}{9 \cdot 7}$$

et que le groupe de Galois est donné par

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\}$$



Si j'étais old-school, j'écrirais

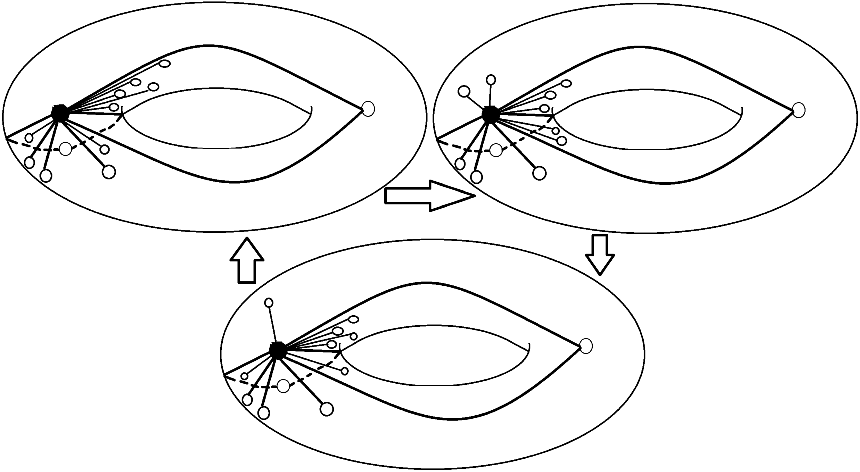
$$j = -4^3 \frac{131547 \pm 24887\sqrt{5}}{9 \cdot 7}$$

et que le groupe de Galois est donné par

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{5})|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times/\{\pm 1\}$$

$$\boxed{(9 \cdot 7)^2 j^2 + 1060795008 j + 70779645095659 = 0}$$

$$\boxed{\mathrm{Gal} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$$



$$\boxed{j^3 + 2880j^2 + 1531904j + 216793088 = 0}$$

$$\boxed{\mathrm{Gal} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$$

III. L'article de Felix Klein de 1879

Felix Klein avait déjà, en un certain sens, découvert les dessins d'enfants en 1879. Il les appelle **Linienzuges** ($\sim$ lignes brisées)

Felix Klein avait déjà, en un certain sens, découvert les dessins d'enfants en 1879. Il les appelle **Linienzuges** ($\sim$ lignes brisées)

$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}$ définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

et la projection associée

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[d] \\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \ \left(\xrightarrow[\simeq]{j} \mathbb{C} \right) \end{tikzcd}$$

Si on enlève les classes de $\tau = i$ et $\tau = \exp(2i\pi/3)$ alors $j/1728$ est un revêtement non-ramifié de base $\mathbb{C} \backslash \{0, 1\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \backslash \{0, 1, \infty\}$.

Will man nun wissen, wie viele verschiedene elfblättrige Flächen es giebt, welche die von uns verlangte Lage und Multiplicität der Verzweigungspunkte besitzen, so ist die Frage augenscheinlich die (Annalen XIV, pag. 424): *Auf wie viele Weisen ist es möglich, die 22 Halbkanten der in Figur a vorhandenen inneren Begränzung derart zu einem aus 11 Stücken bestehenden, doppelt überdeckten Linienzuge zusammenzubiegen, dass von den 11 Punkten* $J = 0$ *dreimal drei und von den 11 Punkten* $J = 1$ *viermal zwei zusammenkommen?* — Die Figur b (die wohl ohne besondere Erläuterung verständlich ist) soll an einem Beispiele erläutern, wie dieses Zusammenbiegen gemeint ist.

four white vertices of order 2

three black vertices of order 3

Il ne compte pas les feuilles du graphes, c'est-à-dire les sommets d'ordre 1, au total on a donc :

$3 + 2 = 5$ sommets noirs et $4 + 3 = 7$ sommets blancs.

von der soeben die Rede war, ist, wie ich l. c. zeigte, so in Bezug auf J verzweigt, dass bei $J = \infty$ sämmtliche elf Blätter im Cyklus zusammenhängen, bei $J = 0$ dreimal drei, bei $J = 1$ viermal zwei. Nun behauptete ich ebendort, *dass es nicht weniger als zehn wesentlich verschiedene Riemann'sche Flüchen giebt, welche dieselbe Eigenschaft besitzen* (von denen aber nur zwei bei der Transformationstheorie in Betracht kommen). Es ist heute meine nächste Aufgabe, diese Behauptung auf dem damals bereits angedeuteten, rein geometrischen Wege zu beweisen.

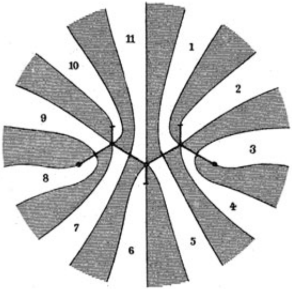


Fig. 3.

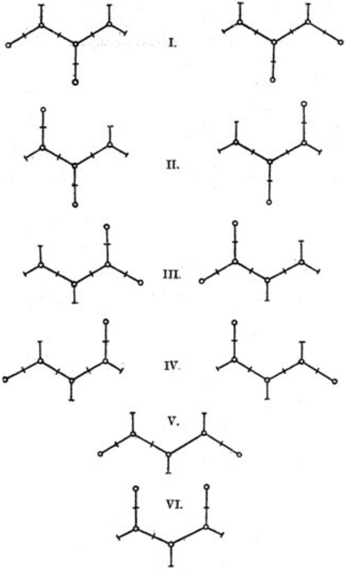


Fig. 2.

in Figur b dargestellten Fall; die Schemata I sind, meinen früheren Erläuterungen zufolge, die einzigen, welche auf die aus der Transformationstheorie hervorgehenden Gleichungen elften Grades passen. —

Es giebt, diesen Schematen nach, in der That *zehn* Möglichkeiten der Zusammenbiegung. Dass es auch nicht mehr giebt, ist ebenso evident; denn offenbar gelingt es nicht, noch andere elfgliedrige Linienzüge der von uns gewünschten Art herzustellen. — Somit ist der zu Eingang des Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen.

Im Verfolg meiner Untersuchungen über die Transformation der elliptischen Functionen behandele ich im Nachstehenden die Transformation *elfter* Ordnung. Es ist dabei mein besonderes Ziel gewesen, die Gleichung *elften* Grades, welche in diesem Falle auftritt, in einfachster Form explicite herzustellen. Im XIV[ten] Bande dieser Annalen, p. 423—424, habe ich bereits gezeigt, dass man dieser Gleichung folgende Gestalt geben kann:

$$J = F(z),$$

eine Curve, auszuscheiden, die bei den 660 Collineationen in sich übergeht, und das specielle auf sie bezügliche Problem der y durchzuführen.

Von dieser Curve wissen wir, *dass sie das Bild der Galois'schen Resolvente der Transformationsgleichung sein muss.* Nun ist, wie ich früher ausführte (Ann. XIV, p. 151) die Galois'sche Resolvente vorgestellt durch eine Riemann'sche Fläche, die 660-blättrig über der Ebene J ausgebreitet ist und deren Blätter bei $J = 0$ zu je 3, bei $J = 1$ zu je 2, bei $J = \infty$ zu je 11, sonst aber nirgends zusammenhängen, deren Geschlecht also $= 26$ ist. Auf unserer Curve muss es dementsprechend eine rationale Function J geben, welche jeden

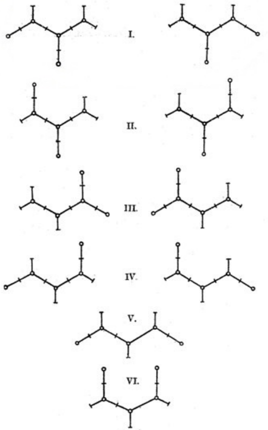
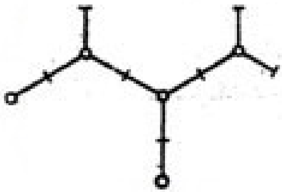
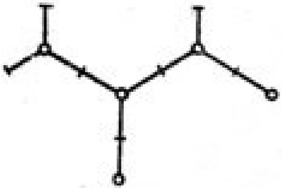


Fig. 2.



I.



bination der folgenden zwei Operationen $\left(\varrho = e^{\frac{2i\pi}{11}}\right)$:

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
&S)\quad y_1' = \varrho y_1,\quad y_4' = \varrho^4 y_4,\quad y_5' = \varrho^5 y_5,\quad y_9' = \varrho^9 y_9,\quad y_3' = \varrho^3 y_3,\\
&T)\left\{
\begin{aligned}
\sqrt{-11}\cdot y_1' &= (\varrho^9-\varrho^2)y_1 + (\varrho^4-\varrho^7)y_4 + (\varrho^3-\varrho^8)y_5\\
&\qquad + (\varrho^5-\varrho^6)y_9 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_3,\\
\sqrt{-11}\cdot y_4' &= (\varrho^4-\varrho^7)y_1 + (\varrho^3-\varrho^8)y_4 + (\varrho^5-\varrho^6)y_5\\
&\qquad + (\varrho^1-\varrho^{10})y_9 + (\varrho^9-\varrho^2)y_3,\\
\sqrt{-11}\cdot y_5' &= (\varrho^3-\varrho^8)y_1 + (\varrho^5-\varrho^6)y_4 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_5\\
&\qquad + (\varrho^9-\varrho^2)y_9 + (\varrho^4-\varrho^7)y_3,\\
\sqrt{-11}\cdot y_9' &= (\varrho^5-\varrho^6)y_1 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_4 + (\varrho^9-\varrho^2)y_5\\
&\qquad + (\varrho^4-\varrho^7)y_9 + (\varrho^3-\varrho^8)y_3,\\
\sqrt{-11}\cdot y_3' &= (\varrho^1-\varrho^{10})y_1 + (\varrho^9-\varrho^2)y_4 + (\varrho^4-\varrho^7)y_5\\
&\qquad + (\varrho^3-\varrho^8)y_9 + (\varrho^5-\varrho^6)y_3,
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

denen sich als einfachste Combination die cyklische Vertauschung zugesellt:

2) *Die Function dritten Grades:*

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad f_0 = {} & (y_1^3 + y_4^3 + y_5^3 + y_9^3 + y_3^3) \\
& + 3(y_1^2 y_3 + y_4^2 y_1 + y_5^2 y_4 + y_9^2 y_5 + y_3^2 y_9) \\
& - 3(y_1 y_4 y_9 + y_4 y_5 y_3 + y_5 y_9 y_1 + y_9 y_3 y_4 + y_3 y_1 y_5) \\
& + \frac{1+\sqrt{-11}}{2}(y_1^2 y_5 + y_4^2 y_9 + y_5^2 y_3 + y_9^2 y_1 + y_3^2 y_4) \\
& - \frac{1+\sqrt{-11}}{2}(y_1 y_4 y_5 + y_4 y_5 y_9 + y_5 y_9 y_3 + y_9 y_3 y_1 + y_3 y_1 y_4) \\
& - (1+\sqrt{-11})(y_1^2 y_4 + y_4^2 y_5 + y_5^2 y_9 + y_9^2 y_3 + y_3^2 y_1).
\end{aligned}
$$

Die Function φ_0 stimmt mit $\frac{-1+\sqrt{-11}}{12}\Sigma p^2$ überein; die Function f_0 ist von $\frac{-\sqrt{-11}}{6}\Sigma p^3$ nur um ein Glied verschieden, das ein numerisches Multiplum von ∇ (3) ist. — Die elf Werthe, welche φ_0 oder f_0 bei den 660 Collineationen annimmt, und die ich φ_ν, bez. f_ν nennen will, erwachsen aus φ_0 und f_0, wenn man der Collineation S^ν entsprechend statt $y_{\varkappa^2}$ einträgt $\rho^{\varkappa^2\nu}\cdot y_{\varkappa^2}$. — Aendert man in diesen Formeln

§ 10.

Zusammenstellung der bisherigen Resultate.

Fassen wir zusammen, so sind wir für *die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen* nunmehr zu folgenden Resultaten gekommen:

1) *Die Galois'sche Resolvente* 660^{ten} *Grades lässt sich folgendermassen anschreiben:* Man unterwerfe die fünf Verhältnissgrössen

$$y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3$$

den 15 Relationen $H_{ik} = 0$ (vergl. (12) resp. (13)) und setze: *)

$$\frac{-C^3}{1728\,\nabla^{11}} = J,$$

wo ∇ die Function dritten Grades (2), C die Function elften Grades (4) bezeichnet. — Hat man *ein* Lösungssystem dieser Gleichungen gefunden, so ergeben sich alle anderen durch die Collineationen des § 3.

2) *Es giebt zwei einfachste Formen der Resolvente elften Grades.* Die eine, von uns zu Anfang allein betrachtete, lautet (20):

$$
\begin{aligned}
J:J-1:1 = {} & \left(z^2-3z+(5-\sqrt{-11})\right)\cdot \\
& \cdot\left(z^3+z^2-3\cdot\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\cdot z+\frac{7-\sqrt{-11}}{2}\right)^3 \\
& :\left(z^3+4z^2+\frac{7-5\sqrt{-11}}{2}\cdot z+(4-6\sqrt{-11})\right)\cdot \\
& \cdot\left(z^4-2z^3+3\cdot\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\cdot z^2+(5+\sqrt{-11})z-3\cdot\frac{5+\sqrt{-11}}{2}\right)^2 \\
& :-1728;
\end{aligned}
$$

ihre 11 Wurzeln sind durch die Formel gegeben:

$$z_\nu = \frac{f_\nu}{\nabla},$$

wo f_ν durch Gleichung (10) definirt ist.

Die zweite Form wird durch (25) vorgestellt:

$$0=\xi^{11}-22\cdot\xi^8+11(9-2\sqrt{-11})\cdot\xi^5-11\cdot\frac{12\,g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi^4+88\cdot\sqrt{-11}\cdot\xi^2$$

ihre 11 Wurzeln sind durch die Formel gegeben:

$$z_\nu = \frac{f_\nu}{\nabla},$$

wo f_ν durch Gleichung (10) definirt ist.

Die zweite Form wird durch (25) vorgestellt:

$$0 = \xi^{11} - 22 \cdot \xi^8 + 11(9 - 2\sqrt{-11}) \cdot \xi^5 - 11 \cdot \frac{12\, g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} \cdot \xi^4 + 88 \cdot \sqrt{-11} \cdot \xi^2$$
$$- 11 \cdot \frac{-3 + \sqrt{-11}}{2} \cdot \frac{12\, g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} \cdot \xi - \frac{144\, g_2^2}{\sqrt[3]{\Delta^2}};$$

und ihre Wurzeln sind:

$$\xi_\nu = \frac{\varphi_\nu}{\nabla^{\frac{2}{3}}},$$

unter φ_ν die Functionen (9) verstanden.

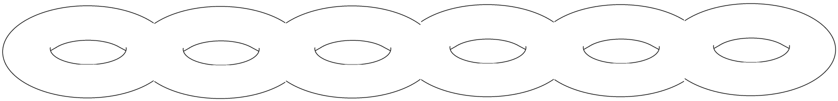
```
gap> x_1:=(1,2);
(1,2)
gap> y_1:=();
()
gap> x_2:=(1,2,3);
(1,2,3)
gap> y_2:=();
()
gap> genreduproduitfibre(x_1,y_1,x_2,y_2);
 0
```

```
gap> x_1:=(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9);
(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)
gap> y_1:= (2,6)(4,10)(5,7)(8,11);
(2,6)(4,10)(5,7)(8,11)
gap> x_2:=(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12);
(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)(10,11,12)
gap> y_2:=(2,10)(3,4)(5,7)(6,8)(9,1)(12,11);
(1,9)(2,10)(3,4)(5,7)(6,8)(11,12)
gap> genreduproduitfibre(x_1,y_1,x_2,y_2);
6
```

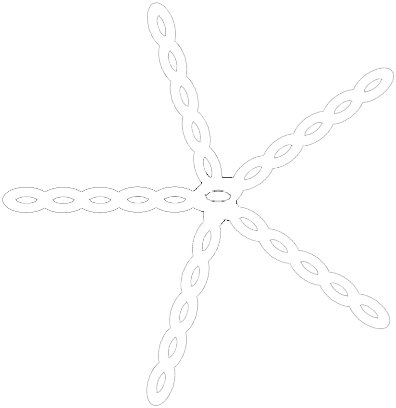
```
x = (1,13,25)(2,14,23)(3,12,24)(4,16,28)
(5,17,26)(6,15,27)(7,19,31)(8,20,29)
(9,18,30)(10,21,32)(11,22,33)(34,46,58)
(35,47,56)(36,45,57)(37,49,61)(38,50,59)
(39,48,60)(40,52,64)(41,53,62)(42,51,63)
(43,54,65)(44,55,66)(67,79,91)(68,80,89)
(69,78,90)(70,82,94)(71,83,92)(72,81,93)
(73,85,97)(74,86,95)(75,84,96)(76,87,98)
(77,88,99)(100,112,124)(101,113,122)(102,111,123)
(103,115,127)(104,116,125)(105,114,126)(106,118,130)
(107,119,128)(108,117,129)(109,120,131)(110,121,132)

y = (1,89)(2,94)(3,91)(4,98)(5,95)(6,90)(7,93)(8,99)(9,97)(10,92)(11,96)(12,100)(13,105)
(14,102)(15,109)(16,106)(17,101)(18,104)(19,110)(20,108)(21,103)(22,107)(23,34)(24,39)(25,36)
(26,43)(27,40)(28,35)(29,38)(30,44)(31,42)(32,37)(33,41)(45,67)(46,72)(47,69)(48,76)(49,73)
(50,68)(51,71)(52,77)(53,75)(54,70)(55,74)(56,78)(57,83)(58,80)(59,87)(60,84)(61,79)(62,82)
(63,88)(64,86)(65,81)(66,85)(111,122)(112,127)(113,124)(114,131)(115,128)(116,123)(117,126)
(118,132)(119,130)(120,125)(121,129)
```

En prenant son temps, un humain peut dessiner le graphe sur la surface :



Finallement la surface de genre 26 est un revêtement ramifié de degré 5 de celle de genre 6, et devrait donc ressembler à ça :



$$g = (6-1) \cdot 5 + 1 = 26$$

III.bis. Le groupe de Grothendieck-Teichmüller $\mathcal{GT}$

« *Ainsi* ***le groupe de Galois*** $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ ***se réalise comme un groupe d'automorphismes d'un groupe profini des plus concrets****, respectant d'ailleurs certaines structures essentielles de ce groupe. Une des tâches les plus fascinantes ici, est justement d'appréhender des conditions nécessaires et suffisantes sur un automorphisme pour qu'il provienne d'un élément de Galois — ce qui fournirait une description "purement algébrique" de* $G_{\mathbb{Q}}$*, en termes de groupes profinis et sans référence à la théorie de Galois des corps de nombres.* » - A.Grothendieck, Esquisse d'un programme

$\mathcal{GT}$ est défini comme étant le sous-ensemble de $\mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$ (groupe des automorphismes continus de $\widehat{F_2}$). Soit $\gamma \in \mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$, et on définit z par $xyz = 1$.

$\mathcal{GT}$ est défini comme étant le sous-ensemble de $\mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$ (groupe des automorphismes continus de $\widehat{F_2}$). Soit $\gamma \in \mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$, et on définit z par $xyz = 1$.

Définition. γ est un élément de $\mathcal{GT}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in (\widehat{\mathbb{Z}})^{\times}$ et $f \in \widehat{F_2}$ tel que :

$\mathcal{GT}$ est défini comme étant le sous-ensemble de $\mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$ (groupe des automorphismes continus de $\widehat{F_2}$). Soit $\gamma \in \mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$, et on définit z par $xyz = 1$.

DÉFINITION. γ est un élément de $\mathcal{GT}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in (\widehat{\mathbb{Z}})^{\times}$ et $f \in \widehat{F_2}$ tel que :

(O) $\gamma(x) = x^{\lambda}, \gamma(y) = fy^{\lambda}f^{-1}$.

$\mathcal{GT}$ est défini comme étant le sous-ensemble de $\mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$ (groupe des automorphismes continus de $\widehat{F_2}$). Soit $\gamma \in \mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$, et on définit z par $xyz = 1$.

Définition. γ est un élément de $\mathcal{GT}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in (\widehat{\mathbb{Z}})^\times$ et $f \in \widehat{F_2}$ tel que :

(O) $\gamma(x) = x^\lambda, \gamma(y) = fy^\lambda f^{-1}$.

(I) $f(x, y)f(y, x) = 1$.

$\mathcal{GT}$ est défini comme étant le sous-ensemble de $\mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$ (groupe des automorphismes continus de $\widehat{F_2}$). Soit $\gamma \in \mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$, et on définit z par $xyz = 1$.

Définition. γ est un élément de $\mathcal{GT}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in (\widehat{\mathbb{Z}})^{\times}$ et $f \in \widehat{F_2}$ tel que :

(O) $\gamma(x) = x^{\lambda}, \gamma(y) = fy^{\lambda}f^{-1}$.

(I) $f(x, y)f(y, x) = 1$.

(II) $f(z, x)z^{m}f(y, z)y^{m}f(x, y)x^{m} = 1$, where $m := \frac{\lambda-1}{2}$.

$\mathcal{GT}$ est défini comme étant le sous-ensemble de $\mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$ (groupe des automorphismes continus de $\widehat{F_2}$). Soit $\gamma \in \mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$, et on définit z par $xyz = 1$.

Définition. γ est un élément de $\mathcal{GT}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in (\widehat{\mathbb{Z}})^{\times}$ et $f \in \widehat{F_2}$ tel que :

(O) $\gamma(x) = x^{\lambda}, \gamma(y) = fy^{\lambda}f^{-1}$.

(I) $f(x, y)f(y, x) = 1$.

(II) $f(z, x)z^m f(y, z)y^m f(x, y)x^m = 1$, where $m := \frac{\lambda-1}{2}$.

(III) $f(\sigma_{12}, \sigma_{23})f(\sigma_{34}, \sigma_{45})f(\sigma_{51}, \sigma_{12})f(\sigma_{23}, \sigma_{34})f(\sigma_{45}, \sigma_{51}) = 1$, where σ_{ij} sont les générateurs usuels de K_5, le groupe de tresses sur 5 cordes dans une sphère.

$\mathcal{GT}$ est défini comme étant le sous-ensemble de $\mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$ (groupe des automorphismes continus de $\widehat{F_2}$). Soit $\gamma \in \mathrm{Aut}(\widehat{F_2})$, et on définit z par $xyz = 1$.

Définition. γ est un élément de $\mathcal{GT}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in (\widehat{\mathbb{Z}})^\times$ et $f \in \widehat{F_2}$ tel que :

(O) $\gamma(x) = x^\lambda, \gamma(y) = f y^\lambda f^{-1}$.

(I) $f(x,y)f(y,x) = 1$.

(II) $f(z,x)z^m f(y,z)y^m f(x,y)x^m = 1$, where $m := \frac{\lambda - 1}{2}$.

(III) $f(\sigma_{12},\sigma_{23})f(\sigma_{34},\sigma_{45})f(\sigma_{51},\sigma_{12})f(\sigma_{23},\sigma_{34})f(\sigma_{45},\sigma_{51}) = 1$, where σ_{ij} sont les générateurs usuels de K_5, le groupe de tresses sur 5 cordes dans une sphère.

Remarques. (I& II) $\iff$ γ commute dans $\mathrm{Out}(\widehat{F_2})$ avec le groupe $\mathfrak{S}_3$ qui permute $\{0, 1, \infty\}$. $\mathcal{GT}$ est un sous-groupe, λ est unique, et f l'est si choisi dans le sous-groupe dérivé $\widehat{F_2}'$.

« *Whatever form is algebraically equivalent to an another when expressed in general symbols, must continue to be equivalent, whatever those symbols denote* », Reverend George Peacock (1791-1858)

On a l'habitude de commencer par :

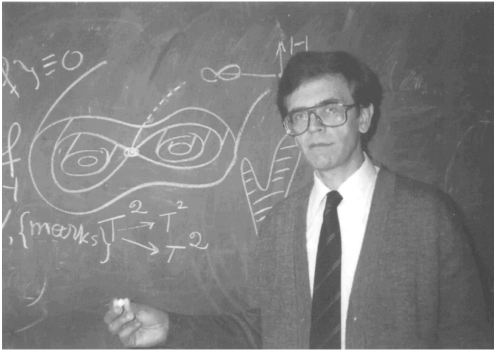
"Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ **une** clôture algébrique $\mathbb{Q}$."

Ou pire :

"Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ **la** clôture algébrique de $\mathbb{Q}$."

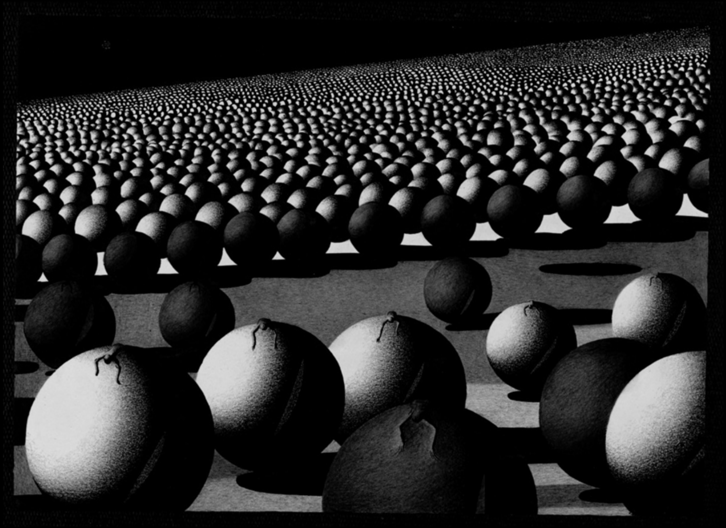
C'est, pour moi, **cauchemardesque**.

Anatoli Timofeïevitch Fomenko (1945-????) :



Attention à ses théories du complot sur l'histoire...


S.DALI



Il *faut* construire une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, adapté à la situation. Je la note Ω pour marquer la différence. L'objectif est de construire

$$\mathcal{GT} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\Omega|\mathbb{Q})$$

Seulement après cela, on pourrait écrire $\overline{\mathbb{Q}} := \Omega$ et la suite exacte étale donnerait la flèche

$$\mathrm{Gal}(\Omega|\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{GT}$$

Il *faut* construire une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, adapté à la situation. Je la note Ω pour marquer la différence. L'objectif est de construire

$$\mathcal{GT} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\Omega|\mathbb{Q})$$

Seulement après cela, on pourrait écrire $\overline{\mathbb{Q}} := \Omega$ et la suite exacte étale donnerait la flèche

$$\mathrm{Gal}(\Omega|\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{GT}$$

L'idée est plus générale mais on peut se restreindre à dire que

$$\Omega := \text{généré par les } j\text{−invariants}$$

Le cauchemar finit et on est content !