Homologie algébrique

1 Exposé du 30 mars 26. 1
1.1 Présentation. 1
1.2 Exemple du logarithme sur $\mathbb{C}$. 2
1.3 Catégories abéliennes. 3
1.4 Complexes et suites exactes. 3
1.5 Boîte à outils. 4
1.6 Foncteurs additifs. 5
2 Exposé du 8 avril 26. 6
2.1 Complexes (encore). 6
2.2 Résolutions. 6
2.3 La cohomologie des groupes. 7
2.4 Résolution standard. 8
2.5 Cas d'un groupe monogène. 8

1 Exposé du 30 mars 26.

1.1 Présentation.

Ce groupe de travail a pour objectif de présenter la théorie générale du calcul en algèbre homologique à travers les notions de résolutions, de catégories dérivées, de foncteurs dérivés et de suites spectrales. Bien que tout sera présenté pour n'importe quelle catégorie abélienne $\mathcal{A}$, il sera judicieux d'avoir en tête un exemple explicite : $\mathcal{A}$ la catégorie des faisceaux (en topologie ou en géométrie algébrique), ou la catégorie des R–modules, R un anneau, des G–modules, G un groupe, des représentations d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, etc. La catégorie des G–modules sera sûrement l'exemple qui parlera à tout le monde.

Le calcul en question est celui portant sur les groupes de cohomologie. Ces derniers sont définis à partir d'un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre catégories abéliennes exact à gauche que l'on dérive, notion qu'on explicitera, ou de façon plus élémentaire en affirmant qu'ils sont déterminés par le fait qu'ils complètent les suites exactes courtes, i.e. si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est exacte alors on a une suite exacte dans $\mathcal{B}$

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to \mathrm{H}^1(A) \to \mathrm{H}^1(B) \to \mathrm{H}^1(C) \to \cdots$$

la cohomologie dépendant des catégories abéliennes et du foncteur F. Il faut avoir en tête que la catégorie $\mathcal{A}$ sera toujours plus « subtile » que la catégorie $\mathcal{B}$.

Considère l'exemple suivant. $\mathcal{A}$ est la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur un espace topologique X et $\mathcal{B} = \mathsf{Ab}$ la catégorie des groupes abéliens, et F est le foncteur des sections globales $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}(X)$. L'exactitude d'une suite dans $\mathcal{A}$ se vérifie localement, pour chaque $x \in X$, on peut construire un foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}_x$ à valeurs dans Ab ; $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ est exacte si et seulement si

$$0 \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x \to 0$$

l'est pour tout x. Il y a donc autant de vérifications à faire qu'il y a de points dans X. Mais du reste ces vérifications sont *locales*, et rien ne nous assure qu'en passant au global, i.e. en appliquant le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}(X)$ la suite soit exacte à droite, autrement dit le premier groupe de cohomologie noté $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{F})$ gouverne si la suite est exacte à droite.

1.2 Exemple du logarithme sur $\mathbb{C}$.

Considère l'example du faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes défini sur les ouverts de $U \subset \mathbb{C}$ par

$$\mathcal{O}(U) = \{\texttt{fonctions holomorphes } U \to \mathbb{C}\}$$

c'est un faisceau car l'holomorphité est une propriété locale. De même on définit $\mathcal{O}^\times$ le faisceau des fonctions holomorphes inversibles. On peut définir un morphisme de faisceaux $\exp : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ qui est la post-composition par l'exponentielle. Le noyau d'un faisceau est donné par le noyau des morphismes en chaque ouvert, d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \underset{\times 2i\pi}{\longrightarrow} \mathcal{O} \underset{\exp}{\longrightarrow} \mathcal{O}^\times$$

où $\underline{\mathbb{Z}}$ est le faisceau constant $\underline{\mathbb{Z}}(U) = \mathbb{Z}$. Il se trouve que l'exponentiation est surjective : d'après une remarque plus haut cela se vérifie localement, et on a effectivement pour tout $z \in \mathbb{C}$, une surjection

$$\mathcal{O}_z \underset{\exp}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}_z^\times$$

Déterminer un logarithme consiste à cherche une préimage à la fonction $z \mapsto z$ qui est inversible sur $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. La suite exacte courte donne une suite exacte longue en cohomologie,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \underset{\times 2i\pi}{\longrightarrow} \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \underset{\exp}{\longrightarrow} \mathcal{O}^\times(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathrm{H}^1(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \underline{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \cdots$$

Or on a

$$\mathbb{Z} \simeq \mathrm{H}^1(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \underline{\mathbb{Z}}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\}), \mathbb{Z})$$

généré par la forme linéaire qui compte le nombre de tours que fait un lacet autour de 0 ; plus précisément si γ est un lacet dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ alors $\langle \varphi(f) | \gamma \rangle$ est le nombre de tours que fait le lacet $t \mapsto f(\gamma(t))$. Par conséquent un logarithme existe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ si et seulement si l'image de la fonction identité dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \underline{\mathbb{Z}})$ est non-nulle, mais à l'évidence elle ne l'est pas : d'où **l'inexistence** d'un logarithme.

1.3 Catégories abéliennes.

Définition 1. *Une catégorie $\mathcal{A}$ est dite* **additive** *si les flèches entre deux objets forment un groupe abélien, de telle sorte à ce que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Z)$$

est une appliaction bi-additive.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. X est dit **zéro** *s'il est à la fois initial et final.*

Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{A}$. Un **noyau**, *resp. conoyau, de φ est un morphisme $K \to X$, resp. $Y \to H$, satisfaisant la propriété universelle*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ K' \arrow[u, dotted] \arrow[ur] \arrow[urr, "0"'] \end{tikzcd} \qquad \textit{resp.} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, "0"'] & Y \arrow[r] \arrow[dr] & H \arrow[d, dotted] \\ & & H' \end{tikzcd}$$

Un tel objet est en pratique noté $\ker\varphi$, resp. $\operatorname{coker}\varphi$.

Dans une catégorie additive X est zéro si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,X) = \{0\}$.

Définition 2. *Une catégorie $\mathcal{A}$ est dite* **abélienne** *si*

(1) $\mathcal{A}$ admet un objet zéro,

(2) $\mathcal{A}$ admet produit et coproduit et ces deux coïncident,

(3) tout morphisme $X \to Y$ admet une **décomposition unique**, *i.e.*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right] & I \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

où K est un noyau de i, H conoyau de j.

Proposition 1. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Alors un morphisme est un mono(resp. épi)morphisme si et seulement si son noyau(resp. conoyau) est nul.*

On peut définir le noyau de façon canonique en le voyant comme un préfaisceau, i.e. en posant

$$(\ker\varphi)(Z) = \ker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z,Y))$$

et en demandant dans le cas d'une catégorie abélienne qu'il soit représentable (d'où l'unicité à unique isomorphisme près d'ailleurs). Pour le conoyau c'est un peu plus subtil.

1.4 Complexes et suites exactes.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive.

Définition 3. *Un* **complexe** *dans $\mathcal{A}$ est la donnée d'une suite de morphismes*

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-2}} K^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

telle que $d^{n+1} \circ d^n = 0$, pour tout $n \geqslant 0$. Elle est notée $K^\bullet$, et en pratique tous les morphismes sont notés d, de telle sorte à ce que la condition d'annulation soit retranscrite par $d \circ d = 0$.

Un morphisme entre complexes $K^\bullet$ et $L^\bullet$ est la donnée de morphismes $K^n \to L^n$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & K^n \arrow[r] \arrow[d] & K^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L^{n-1} \arrow[r] & L^n \arrow[r] & L^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La catégorie qu'ils forment est notée $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$*.*

Proposition 2. $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ *est additive, et abélienne si $\mathcal{A}$ l'est.*

Supposons que $\mathcal{A}$ est abélienne. Soit $K^\bullet$ un morphisme. Alors on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{coker} d^{n-1} \arrow[dr, dotted, "b^n"] & \\
K^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[dr, dotted, "a^{n-1}"'] & K^n \arrow[u] \arrow[r, "d^n"] & K^{n+1} \\
& \ker d^n \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Proposition 3. *Il existe un isomorphisme fonctoriel entre $\operatorname{coker} a^{n-1}$ et $\ker b^n$. Cela permet de définir un foncteur $\mathrm{H}^n(-) : \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ de deux façons équivalentes.*

Définition 4. *On dit que $K^\bullet$ est **exacte en degré** n si $\mathrm{H}^n(K^\bullet) = 0$, et **exacte** si c'est le cas pour tout n.*

On peut donc définir l'exactitude en Y d'une suite $X \to Y \to Z$ en demandant d'une part qu'elle s'étend en un complexe $\cdots \to 0 \to X \to Y \to Z \to 0 \to \cdots$ et qu'elle est exacte en degré 0.

Définition 5. *Un morphisme $h : K^\bullet \to L^\bullet$ est dit **homotope à 0**, noté $h \sim 0$, s'il existe des morphismes $k^i : K^i \to L^{i-1}$ tels que $h^i = d^{i-1}k^i + k^{i+1}d^i$, noté $h = kd + dk$.*

*On dit que f est **homotope à** g, noté $f \sim g$, si $f - g \sim 0$.*

En fait n'importe quelle famille de morphismes k^i permet de définir comme précédemment une famille h^i qui induit un morphisme de complexes. Il reste en effet à vérifier que h commute avec d, ce qui s'écrit formellement

$$dh = dkd + ddk = dkd = kdd + dkd = (kd + dk)d = hd$$

Proposition 4.
Si $h_1 \sim 0$, $h_2 \sim 0$ alors $h_1 + h_2 \sim 0$.
Si $h \sim 0$ alors $fh \sim 0$, $hg \sim 0$.
Si $f \sim g$ alors $\mathrm{H}^\bullet(f) = \mathrm{H}^\bullet(g)$.

1.5 Boîte à outils.

Lemme 1. *(des cinq) Supposons qu'on dispose d'un diagramme commutatif dont les suites sont exactes*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "epi"'] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "iso"'] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "iso"] & X_5 \arrow[d, "mono"] \\
Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5
\end{tikzcd}$$

Alors f est un isomorphisme.

Lemme 2. *(du serpent) Supposons qu'on dispose d'un diagramme commutatif dont les suites sont exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"'] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"'] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Alors il existe une suite exacte induite par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\varphi_1 \arrow[r] & \ker\varphi_2 \arrow[r] & \ker\varphi_3 \arrow[r, dotted] & \operatorname{coker}\varphi_1 \arrow[r] & \operatorname{coker}\varphi_2 \arrow[r] & \operatorname{coker}\varphi_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

1.6 Foncteurs additifs.

Définition 6. *Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur entre catégories additives. On dit qu'il est* **additif** *si*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),F(Y))$$

est additif. F est dit exact à gauche (resp. à droite) si lorsque $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ est exact alors on a une suite exacte

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \qquad (\textit{ resp. } F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0\ )$$

On dit qu'il est exact s'il l'est à gauche et à droite.

Proposition 5. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,-)$ *est exact à gauche et* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,Y)$ *est exact à gauche en tant que foncteur sur* $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$.

Un autre exemple est donné par le foncteur $R-\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$, $X \mapsto Y \underset{R}{\otimes} X$, qui est exact à droite.

Définition 7. Y *est dit* **injectif** *(resp.* **projectif***) si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,Y)$ *(resp.* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,-)$*) est exact.*

Proposition 6. *Soient $\mathcal{A},\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ deux foncteurs additifs. Supposons que F est adjoint à gauche de G, ou dit autrement G adjoint à droite de F, c'est-à-dire qu'il existe une équivalence entre les bifoncteurs naturelle en les variables X dans $\mathcal{A}$, Y dans $\mathcal{B}$,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,G(Y))$$

Alors F est exact à droite et G est exact à gauche.

Notons que si $K^\bullet$ est un complexe dans $\mathcal{A}$ alors $F(K^\bullet) := (F(K^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ avec les flèches induites par fonctorialité est un complexe dans $\mathcal{B}$. Autrement dit $\mathrm{Kom}(-)$ est une construction fonctorielle.

Lemme 3. *Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories additives. Si $K^\bullet \xrightarrow{h} L^\bullet$ est homotope à 0 alors $F(K^\bullet) \xrightarrow{F(h)} F(L^\bullet)$ est homotope à 0. On en déduit que si f,g sont homotopes alors $F(f),F(g)$ sont homotopes.*

2 Exposé du 8 avril 26.

Nous allons nous intéresser désormais aux résolutions dans les catégories abéliennes, notamment en traitant le cas de la cohomologie des groupes. Rappelons qu'une cohomologie à valeurs dans une catégorie $\mathcal{B}$ sera toujours donnée par un foncteur exact à gauche $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, où il faut penser à $\mathcal{B}$ comme une catégorie plus simple que $\mathcal{A}$: par exemple $\mathcal{A} = \mathrm{Sh}(X)$ la catégorie des faisceaux en groupe abéliens sur un espace topologique X et le foncteur exact à gauche $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(X)$. Ce foncteur F admet ce qu'on appelle des foncteurs dérivés R^nF, dont nous verrons la définition canonique en termes de catégories dérivées, mais qui se restreint en termes de groupes de cohomologies à dire qu'ils induisent de façon canonique des foncteurs $A \mapsto \mathrm{H}^n(A)$ permettant de compléter les suites exactes courtes en des suites exactes longues comme vu en (?).

Dans cet exposé on s'intéressera au foncteur $G\text{–}\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$, $M \mapsto M^G$ qui à un module associe le groupe abélien formé des éléments fixés par l'action de G. Nous verrons la pertinence d'introduire la notion de catégorie dérivée.

2.1 Complexes (encore).

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

Je rajoute ici la mise en diagramme de l'injectivité et de la projectivité.

Proposition 7. *Y est injectif (resp. projectif) si la propriété universelle suivante est vérifiée*

$$\begin{tikzcd} Y & & \\ Z \arrow[u, dotted] & X \arrow[l] \arrow[ul] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & & \\ Z \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \right)$$

Proposition 8. *(T.Pasquer)*

Soit $0 \to K^\bullet \to L^\bullet \to M^\bullet \to 0$ une suite exacte dans $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, c'est-à-dire exacte dans $\mathcal{A}$ en chaque n. Alors il existe une suite exacte longue pour les groupes de cohomologies

$$\cdots \to \mathrm{H}^0(M^\bullet) \dashrightarrow \mathrm{H}^1(K^\bullet) \to \mathrm{H}^1(L^\bullet) \to \mathrm{H}^1(M^\bullet) \dashrightarrow \mathrm{H}^2(K^\bullet) \to \cdots$$

2.2 Résolutions.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

Définition 8. *Une* **résolution** *(à droite) d'un objet X est une suite longue exacte*

$$0 \to X \to K^0 \to K^1 \to K^2 \to \cdots$$

que l'on note $X \to K^\bullet$. Si $K^n = 0$ pour $n > l$ alors la suite est dite **de longueur** *l.*

On peut voir ces suites comme des complexes en les complétant avec des 0. On accolle souvent un adjectif ou un substantif si la résolution est composée de certains types d'objets : l'exemple typique étant celui de résolution **injective** (ou **par des injectifs**), ou projective (ou **par des projectifs**). On peut également définir de façon similaire les résolutions à gauche.

Théorème 1. *Soient $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme dans A et $X \to I^\bullet$ une résolution injective. Soit $Y \to K^\bullet$ une résolution. Alors il existe un morphisme de complexes $I^\bullet \xrightarrow{r} K^\bullet$ tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[d, "r^0"] \\
Y \arrow[r] & K^0
\end{tikzcd}$$

Si r' est un autre tel morphisme alors r et r' sont homotopes.

Cela permet de démontrer le résultat fondamental suivant

Corollaire 1. *Soient $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif et X un objet de $\mathcal{A}$ admettant une résolution injective. Alors on peut définir de façon canonique (i.e. uniques à unique isomorphisme près) des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^n_F(X)$ données par $\mathrm{H}^n(F(I^\bullet))$ pour n'importe quelle résolution injective $X \to I^\bullet$.*

Preuve. En effet, appliquons le théorème précédent au morphisme identité $X \to X$, et en prenant une autre résolution injective $X \to J^\bullet$. Alors on dispose de deux morphismes $I^\bullet \xrightarrow{r} J^\bullet$, $J^\bullet \xrightarrow{s} I^\bullet$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
& J^0 \\
X \arrow[ru] \arrow[r] \arrow[rd] & I^0 \arrow[u, "r^0"] \\
& J^0 \arrow[u, "s^0"] \arrow[uu, bend right, "t^0"']
\end{tikzcd}$$

où $t := rs$. Mais on a également le morphisme identité $J^0 \to J^0$, d'après le théorème t et Id sont homotopes, et par conséquent d'après la proposition 4 que pour tout n, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n(J^\bullet) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}"'] & \mathrm{H}^n(I^\bullet) \arrow[r] & \mathrm{H}^n(J^\bullet)
\end{tikzcd}$$

d'où le fait que les groupes sont isomorphes ; remplacer r, s par r', s' donnent des morphismes homotopes donc les mêmes morphismes en cohomologie, d'où l'unicité de l'isomorphisme $\mathrm{H}^n(J^\bullet) \simeq \mathrm{H}^n(I^\bullet)$. $\square$

On a des énoncés équivalents avec des résolutions projectives.

2.3 La cohomologie des groupes.

Dans cette partie $\mathcal{A}$ est la catégorie G–Mod, $\mathcal{B}$ la catégorie Ab et le foncteur additif exact à gauche $M \mapsto M^G$. C'est parce que tout G–module admet une résolution injective qu'on peut définir des groupes de cohomologie pour le foncteur $(-)^G$, qu'on note $(\mathrm{H}^n(G,-))_{n\geqslant 0}$. Les G–modules admettent également des résolutions projectives, par conséqunet on peut définir des groupes d'homologies $(\mathrm{H}_n(G,-))_{n\geqslant 0}$ cette fois-ci à partir du foncteur $M \mapsto M \underset{\mathbb{Z}[G]}{\otimes} \mathbb{Z}$ exact à droite.

2.4 Résolution standard.

Il existe une résolution standard pour calculer la cohomologie d'un groupe, c'est la **bar résolution**. Elle en fait obtenue à partir d'une résolution libre de $\mathbb{Z}$ le G–module trivial, en effet dans la catégorie des G–modules les modules libres sont projectifs. Elle est notée $F^\bullet \to \mathbb{Z} \to 0$, où F^n est le module de base les $(n+1)$–uplets dans G avec l'action sur la base

$$g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$$

La différentielle est donnée par

$$\partial(g_0, \dots, g_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)$$

F_n est un module libre sur l'anneau $\mathbb{Z}[G]$ avec comme base les

$$[g_1 | \dots, g_n] := (1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1 \cdots g_n)$$

et le début de la résolution s'écrit en ces termes

$$F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$$

avec $\partial_2([g|h]) = g \cdot [h] - [gh] + [g]$ et $\partial_1([g]) = g - 1$.

La remarque importante est que si M est un G–module alors on peut effectuer l'identification $M^G = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M)$, et par conséquent on peut obtenir une résolution injective de M qui évaluée en le foncteur $(-)^G$ donne un complexe explicite

$$0 \to M^G \to C^0(M, G) \xrightarrow{d_1} C^1(M, G) \xrightarrow{d_2} C^2(M, G) \to \cdots$$

avec $C^n(M, G) = \{G^n \to M\}$ et pour les premiers termes

$$d_1(x) = g \mapsto g \cdot x - x \qquad d_2(v) = (g, h) \mapsto v(gh) - g \cdot v(h) - v(g)$$

Il en suit la description explicite

Proposition 9. *Soit M un G–module. Alors*

$$\mathrm{H}^0(G, M) = M^G \qquad \mathrm{H}^1(G, M) = \frac{\{v \;|\; v(gh) = g \cdot v(h) + v(g)\}}{\{g \mapsto g \cdot x - x \;|x \in M\}}$$

En particulier si G agit trivialement sur M alors $M^G = M$ et on a les identifications

$$\mathrm{H}^1(G, M) = \mathrm{Hom}(G, M) = \mathrm{Hom}(G^{\mathrm{ab}}, M)$$

2.5 Cas d'un groupe monogène.

Dans cette sous-section G est engendré par un élément t. Soit M un G–module Supposons que G soit infini. Alors on a une résolution projective de $\mathbb{Z}$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Il en suit un complexe permettant de calculer la cohomologie de M :

$$M \xrightarrow{t-1} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

et donc
$$\mathrm{H}^1(G,M) = \frac{M}{\{g\cdot x - x, x\in M\}} =: M_G$$
et $\mathrm{H}^i(G,M)=0$ si $i>1$. Le module M_G est appelé module des co-invariants, et il correspond au 0–ième terme des groupes d'homologie et on voit ici une forme de dualité puisqu'on a $\mathrm{H}_0(G,M)=\mathrm{H}^1(G,M)$ et en fait on montre aussi que $\mathrm{H}^0(G,M)=\mathrm{H}_1(G,M)$.

Supposons que t soit d'ordre m. On définit une application N, appelée **application norme**, par
$$N = \mathrm{id} + t + \ldots + t^{m-1}$$
Cette fois-ci on a une résolution projective
$$\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$
Il en suit un complexe permettant de calculer la cohomologie de M :
$$M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} \cdots$$
et donc
$$\mathrm{H}^{2i+1}(G,M) = \mathrm{im}(\ker N \to M_G)$$
$$\mathrm{H}^{2i}(G,M) = \frac{M^G}{N(M)}$$