

INTRODUCTION À L'ÉQUATION DE BURGERS STOCHASTIQUE ET BURGULENCE

TAKFARINAS KELAI & SERGEI KUKSIN

RÉSUMÉ. Cet article propose une introduction à l'équation de Burgers visqueuse stochastique unidimensionnelle périodique, perturbée par une force aléatoire de type bruit blanc en temps, et suffisamment régulière en espace. Nous prouvons des résultats classiques sur l'existence et l'unicité de solutions, étudions leurs régularités et discutons leurs propriétés quand le temps tend vers l'infini ou quand la viscosité ν tend vers zéro. La dernière limite décrit la turbulence dans l'équation de Burgers, nommée burgulence par U. Frisch. Notre article sert d'une introduction élémentaire aux méthodes modernes de l'analyse des équations aux dérivées partielles stochastiques.

TABLE DES MATIÈRES

1.	Introduction	1
2.	Estimations de la force ξ^ω	3
3.	Problème de Cauchy	5
4.	Principe du maximum de Kružkov	10
5.	Loi de la solution u et les deux semi groupes de Markov	11
6.	Convergence faible de mesures	15
7.	Estimations au-dessus des normes Sobolev de u	16
8.	Balance de l'énergie et estimations au-dessous	19
9.	Échelle d'espace	21
10.	Lemmes de récurrence et L^1 -contraction	22
11.	Les mesures stationnaires et la méthode de Bogoliubov-Krylov	24
12.	L'unicité d'une mesure stationnaire et la propriété de mélange	25
13.	Fonction de structure	27
14.	Spectre de l'énergie	29
15.	Appendice A : Le processus de Wiener standard	30
16.	Appendice B : Les temps d'atteinte et d'arrêt, et la propriété de Markov forte	30
17.	Notation	31
	Références	31

1. INTRODUCTION

On se propose d'étudier les propriétés qualitatives de l'équation de Burgers visqueuse stochastique avec une force aléatoire η^ω :

$$(B) \quad \begin{cases} u_t(t, x) + u(t, x) u_x(t, x) - \nu u_{xx}(t, x) = \eta^\omega(t, x), \\ t \geq 0, x \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ici $\nu \in (0, 1]$ est la *viscosité*. On suppose que pour tout $t \geq 0$:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \eta^\omega(t, x) dx = \int_{\mathbb{S}^1} u(0, x) dx = 0.$$

D'ici et d'après (B), on a pour tout $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{S}^1} u(t, x) dx = 0.$$

On note H l'espace de Hilbert défini par

$$H = \{v \in L_2(\mathbb{S}^1) : \int_{\mathbb{S}^1} v(x) dx = 0\},$$

muni de la norme usuelle et du produit scalaire de L_2 qu'on notera $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et de la base Hilbertienne $\{e_k(x), k \in \mathbb{Z}^*\}$ avec

$$(1.1) \quad \begin{cases} e_s = \sqrt{2} \cos(2\pi s x) \\ e_{-s} = \sqrt{2} \sin(2\pi s x) \end{cases} \quad s \in \mathbb{N}^*.$$

Notons que si $u(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} u_s e_s(x)$ alors

$$(1.2) \quad u(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} \widehat{u}_s e^{2i\pi s x}, \quad \widehat{u}_s = \overline{\widehat{u}_{-s}} = \left(\sqrt{2}\right)^{-1} (u_s - i u_{-s}) \text{ pour tout } s \in \mathbb{N}^*.$$

Dans la suite, on donne η^ω tel que :

$$(1.3) \quad \eta^\omega(t, x) = \partial_t \xi^\omega(t, x), \quad \text{et } \xi^\omega(t, x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} b_s \beta_s^\omega(t) e_s(x),$$

où $b_s \in \mathbb{R}$ et β_s^ω sont les processus de Wiener standard indépendants (appendice A), définie sur un espace de probabilité standard $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ [17], [28]. Pour tout $m \geq 0$, on pose

$$(1.4) \quad B_m = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} |s|^{2m} b_s^2 \leq +\infty.$$

Nous supposons toujours que $B_0 < \infty$. On appelle la force aléatoire η^ω le *Bruit blanc* dans l'espace H et ξ^ω le *processus de Wiener dans H* . On dit que u^ω est une solution de (B), (1.3), si

$$u^\omega(t, x) - u^\omega(0, x) + \int_0^t (u(s, x) u_x(s, x) - \nu u_{xx}(s, x)) ds = \xi^\omega(t, x) - \xi^\omega(0, x),$$

pour tout $t \geq 0$, $x \in \mathbb{S}^1$, et pour tout $\omega \notin Q$, où Q est un ensemble négligeable (i.e. $Q \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(Q) = 0$).

L'équation (B), (1.3) est un modèle populaire en physique théorique moderne [2]. Nous étudions le problème de Cauchy relatif à (B), ainsi que les propriétés qualitatives de ses solutions. À savoir, dans les sections 2-6, nous prouvons les propriétés d'existence et d'unicité des solutions de (B) et discutons les processus de Markov correspondants. Puis, dans les sections 7-8, nous obtenons des bornes au-dessus et au-dessous pour les normes Sobolev des solutions, lesquelles sont asymptotiquement précises quand $\nu \rightarrow 0$. Dans la section 9, nous déduisons de ces estimations que l'échelle d'espace pour les solutions de (B) est égale à ν . Les résultats des sections 7-9 sont basés sur les thèses [5], [8] (voir aussi [4], [7]), où les méthodes suggérées dans [21], [22] pour étudier l'équation de Ginzburg-Landau complexe, sont appliquées à (B). Dans les sections 10-12, nous étudions les propriétés de mélange de l'équation de Burgers, utilisant l'approche du couplage de Döblin et suivant [7], [23]. Enfin, dans les sections 13-14, on montre que les estimations des sections 7-8 entraînent que le spectre de l'énergie des solutions de (B) est de la forme de la loi de Kolmogorov [13], $E_k \sim k^{-2}$. Là, nous suivons [8], [7], où la dérivation heuristique du spectre, suggérée dans [1], est rigoureusement justifiée, ceci étant basé sur les résultats des sections précédentes.

Cet article est basé sur les notes de cours pour la seconde année de Master de Mathématiques Fondamentales à l'université de Paris Diderot, donné par S. K lors des années universitaires 2012/2013 et 2014/2015.

2. ESTIMATIONS DE LA FORCE ξ^ω

Pour $T > 0$, notons par X^T l'espace de Banach $\mathcal{C}(0, T; H)$, munit de la norme $\|\xi\|_{X^T} = \sup_{t \in [0, T]} \|\xi(t)\|$.

Théorème 2.1. *Il existe une ensemble négligeable $Q \in \mathcal{F}$ tel que si $\omega \notin Q$, alors pour tout $T > 0$ nous avons $\xi^\omega \in X^T$. De plus, il existe $\alpha(T, B_0) > 0$, $C'(T, B_0) > 0$, et pour chaque $p \geq 1$, il existe $C(p, T, B_0) > 0$ tel que*

$$(2.1) \quad \mathbb{E}[e^{\alpha \|\xi^\omega(t)\|^2}] \leq C',$$

$$(2.2) \quad \mathbb{E}[\sup_{t \in (0, T)} \|\xi^\omega(t)\|^p] \leq C.$$

Si $\omega \in Q$, alors on redéfinit ξ^ω par $\xi^\omega = 0$. Ainsi $\xi^\omega \in X^T$ pour tout ω .

Démonstration. Étape 1 : troncature. Fixons $T > 0$ et posons pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$H^{(N)} = \text{vect}\{e_j, |j| \leq N\} \subset H \text{ et } \xi^{N\omega}(t, x) = \sum_{|s| \leq N} b_s \beta_s^\omega(t) e_s(x).$$

Alors $\xi^{N\omega}$ est un processus aléatoire continue dans $H^{(N)}$ ¹. Pour $t \geq 0$, on a

$$\|\xi^{N\omega}(t)\|^2 = \sum_{|s| \leq N} b_s^2 \beta_s^\omega(t)^2$$

Maintenant on va estimer les moments exponentiels de $\sup_{t \in (0, T)} \|\xi^{N\omega}(t)\|$. On a immédiatement pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbb{E}[e^{\alpha \|\xi^{N\omega}(T)\|^2}] = \mathbb{E}\left[e^{\alpha \sum_{|s| \leq N} b_s^2 \beta_s^\omega(T)^2}\right] = \prod_{|s| \leq N} \mathbb{E}[e^{\alpha b_s^2 \beta_s^\omega(T)^2}],$$

car les processus $\{\beta_s\}$ sont indépendants. Comme $\beta_s(T) = \mathcal{N}(0, \sqrt{T})$, nous avons que

$$\mathbb{E}[e^{\alpha b_s^2 \beta_s^\omega(T)^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha b_s^2 x^2} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx = \frac{1}{\sqrt{1 - 2T\alpha b_s^2}}, \quad \text{si } \alpha < \frac{1}{2Tb_s^2}.$$

En notant $b_{\max} = \sup_{s \geq 1} |b_s|$, on obtient que

$$(2.3) \quad \mathbb{E}[e^{\alpha \|\xi^{N\omega}(T)\|^2}] = e^{-\frac{1}{2} \sum_{|s| \leq N} \ln(1 - 2T\alpha b_s^2)}, \quad \text{si } \alpha < \frac{1}{2Tb_{\max}^2}.$$

Comme pour tout $|x| \leq \frac{1}{2}$ nous avons $-\ln(1 - x) \leq 2x$, alors de (2.3)

$$(2.4) \quad \mathbb{E}[e^{\alpha \|\xi^{N\omega}(T)\|^2}] \leq e^{\sum_{|s| \leq N} 2T\alpha b_s^2} = e^{2T\alpha B^{(N)}}, \quad \text{si } \alpha < \frac{1}{2Tb_{\max}^2},$$

avec $B^{(N)} = \sum_{|s| \leq N} b_s^2 \leq B_0$. Or, pour tout $p \geq 1$ et $\alpha > 0$ il existe $C(p, \alpha) > 0$ tel que pour chaque $x \geq 0$, on a $x^p \leq C e^{\alpha x^2}$. D'ici et l'inégalité (2.4), nous obtenons

$$\mathbb{E}[\|\xi^{N\omega}(T)\|^p] \leq C(p, T, B_0).$$

Par l'inégalité de Doob (15.1) (appendice A) et de cette inégalité, on a finalement

$$(2.5) \quad \mathbb{E}[\sup_{t \in (0, T)} \|\xi^{N\omega}(t)\|^p] \leq C'(p, T, B_0), \quad \text{pour } p > 1.$$

L'inégalité pour $p = 1$ suit de (2.5) avec $p = 2$.

Étape 2 : passage à la limite. Pour $N < M$, considérons

$$\xi_N^M := \xi^{M\omega} - \xi^{N\omega} = \sum_{N < |s| \leq M} b_s \beta_s^\omega e_s.$$

¹C'est à dire, pour presque tout ω , la courbe $t \mapsto \xi^{N\omega}(t) \in H^{(N)}$ est continue.

Comme $\mathbb{E}\|\xi_N^M(t)\|^2 = \sum_{N < |s| \leq M} b_s^2$, alors par l'inégalité de Doob, nous avons

$$(2.6) \quad \mathbb{E} \left[\|\xi_N^M\|_{X^T}^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|\xi_N^M(t)\|^2 \right] \leq 4 \sum_{N < |s| \leq M} b_s^2.$$

On considère l'espace de Hilbert $\mathbb{L}_2 = L_2(\Omega; X^T)$. Par (2.6), pour $N < M$, on a $\|\xi^{M\omega} - \xi^{N\omega}\|_{\mathbb{L}_2}^2 \leq 4 \sum_{N < |s| \leq M} b_s^2$. Comme $\sum b_s^2 = B_0 < \infty$, alors $\{\xi^{M\omega}\} \subset \mathbb{L}_2$ est une suite de Cauchy et $\xi^{M\omega} \rightarrow \xi^\omega \in \mathbb{L}_2$ quand $M \rightarrow +\infty$. Comme la convergence dans \mathbb{L}_2 implique la convergence presque partout pour une sous suite, alors, il existe un ensemble négligeable Q^T tel que $\xi^{M_j\omega} \rightarrow \xi^\omega$ dans X^T pour une sous suite $M_j \rightarrow +\infty$ et $\omega \notin Q^T$. Soit $Q = Q^1 \cup Q^2 \cup \dots$. Par le procédé diagonale de Cantor, on construit une suite $M_j \rightarrow +\infty$ tel que $\xi^{M_j\omega} \rightarrow \xi^\omega =: \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} b_s \beta_s^\omega e_s$ dans X^T , $T = 1, 2, \dots$ et pour tout $\omega \notin Q$.

De cette convergence, de la relation (2.4) et le théorème de Beppo-Levi, on obtient l'inégalité (2.1). De même, avec (2.5) et le théorème de Beppo-Levi, nous avons (2.2). \square

Dans la suite, on désigne par H^m l'espace de Sobolev défini par

$$H^m = \{v \in H, v^{(m)} \in H\},$$

où $u^{(m)} := \partial_x^m u$ représente la dérivée faible en x à l'ordre m de u . On muni H^m du produit scalaire homogène

$$\langle u, v \rangle_m = \int_{\mathbb{S}^1} u^{(m)}(x) v^{(m)}(x) dx,$$

On note par $\|\cdot\|_m$ la norme associée au produit scalaire. Notons que $\partial_x : H^{m+1} \rightarrow H^m$ est un isomorphisme et $\|\partial_x^k u\|_m = \|u\|_{m+k}$, pour tout $m, k \in \mathbb{N}$.

Si $u \in H$ alors u s'écrit dans la base trigonométrique (1.1) comme $u(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} u_s e_s(x)$, et la norme de u dans H^m est

$$\|u\|_m^2 = (2\pi)^m \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} |s|^{2m} |u_s|^2.$$

On utilise cette caractérisation pour définir H^m pour tout $m \geq 0$:

$$H^m = \{u \in H, \|u\|_m < \infty\}.$$

Pour $m < 0$, on définit H^m comme le complété de H par rapport à la norme $\|\cdot\|_m$.

On rappelle l'injection de Sobolev :

$$(2.7) \quad H^m \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\mathbb{S}^1) \iff m > k + \frac{1}{2},$$

et que l'espace H^m pour $m > \frac{1}{2}$ est une algèbre Hilbertienne :

$$(2.8) \quad \|uv\|_m \leq c_m \|u\|_m \|v\|_m.$$

Pour $T > 0$, on note par X_m^T l'espace de Banach $\mathcal{C}(0, T; H^m)$ munit de la norme $\|u\|_{X_m^T} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_m$. Avec ces notations, on a le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit $m \in \mathbb{N}$ et supposons que $B_m < \infty$. Alors pour chaque $\omega \in \Omega$ et pour tout $T > 0$ nous avons $\xi^\omega \in X_m^T$, et il existe $\alpha(T, B_m) > 0$ tel que*

$$(2.9) \quad \mathbb{E}[e^{\alpha \|\xi^\omega(T)\|_m^2}] \leq C'_m,$$

$$(2.10) \quad \mathbb{E} \left[\sup_{t \in (0, T)} \|\xi^\omega(t)\|_m^p \right] \leq C''_m, \quad \forall p \geq 1,$$

pour des constantes convenables $C'_m(T, B_m) > 0$, $C''_m(p, T, B_0) > 0$.

Ici, comme pour le théorème 2.1, nous avons modifié ξ^ω sur un ensemble négligeable.

La démonstration est similaire à celle du théorème 2.1.

3. PROBLÈME DE CAUCHY

Dans cette section on étudie le problème au limites périodiques (B), (1.3) avec la condition initiale.

$$(3.1) \quad u(0, x) = u_0(x).$$

3.1. Préliminaires. Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère l'équation de la chaleur

$$(CH) \quad \begin{cases} v_t(t, x) - \nu v_{xx}(t, x) = \xi_t(t, x), & \xi \in X_m^T \\ v(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

On dit que $v \in X_m^T$ est une solution de (CH) si pour tout $t \in [0, T]$:

$$v(t) - \nu \int_0^t v_{xx}(s) ds = u_0 + \xi(t).$$

Le lemme suivant est un résultat élémentaire des équations aux dérivées partielles paraboliques. Pour le démontrer, on décompose la force ξ et v dans la base trigonométrique (1.1) et on retrouve les coefficients de Fourier de v .

Lemme 3.1. *Soit $m \geq 0$ et $T > 0$. Alors pour tout $\xi \in X_m^T$ et $u_0 \in H^m$, il existe une unique solution $v \in X_m^T$ de (CH). De plus l'application $H^m \times X_m^T \rightarrow X_m^T$, $(u_0, \xi) \mapsto v$ est linéaire et continue.*

3.2. Décomposition des solutions de (B). On écrit maintenant une solution u de (B), (3.1) comme

$$u(t, x) = w(t, x) + v(t, x),$$

où v est la solution de (CH). D'ici, w vérifie l'équation de Burgers perturbée :

$$(BP) \quad \begin{cases} w_t - \nu w_{xx} + \frac{1}{2}((w + v)^2)_x = 0, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

L'avantage de se ramener de l'équation (B) à (BP) est le fait que tout les coefficients de cette dernière sont réguliers. Dans la suite on résout l'équation (BP). On commence par deux lemmes qui portent sur des inégalités fonctionnelles.

Lemme 3.2. *(inégalité de Gagliardo-Nirenberg [29])*

Pour tout $(m, (r, q)) \in \mathbb{N}^ \times [1, \infty]^2$ et $\beta \in [0, m - 1]$, il existe $C(\beta, q, r, m) > 0$ tel que*

$$(3.2) \quad |w^{(\beta)}|_r \leq C \|w\|_m^\theta \|w\|_q^{1-\theta}, \quad \theta(\beta, q, r, m) = \frac{\beta + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{m + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}}.$$

Lemme 3.3. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $q \in [1, \infty]$ et $w \in H^{m+1}$. Alors, il existe $C(m) > 0$ tel que*

$$(3.3) \quad |\langle \partial_x^{2m} w, \partial_x w^2 \rangle| \leq C \|w\|_{m+1}^{1+\theta} \|w\|_q^{2-\theta}, \quad \theta(m, q) = \frac{m + \frac{2}{q} - \frac{1}{2}}{m + \frac{1}{q} + \frac{1}{2}},$$

Démonstration. Par la formule de Leibniz, nous avons

$$(3.4) \quad |\langle \partial_x^{2m} w, \partial_x w^2 \rangle| \leq C(m) \sum_{n=0}^m \int |w^{(n)} w^{(m-n)} w^{(m+1)}| dx.$$

Nous majorons l'intégrale du membre de droite de (3.4) par l'inégalité de Hölder. On obtient

$$\int |w^{(n)} w^{(m-n)} w^{(m+1)}| dx \leq |w^{(n)}|_{p_1} |w^{(m-n)}|_{p_2} \|w\|_{m+1},$$

avec $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2}$. D'ici et (3.2) avec $m := m + 1$, et $r = n$ puis $r = m - n$, nous avons

$$\int |w^{(n)} w^{(m-n)} w^{(m+1)}| dx \leq C \|w\|_{m+1}^{1+\theta} \|w\|_q^{2-\theta},$$

où $\theta = \theta(n, q, p_1, m + 1) + \theta(m - n, q, p_2, m + 1) = \frac{m + \frac{2}{q} - \frac{1}{2}}{m + \frac{1}{q} + \frac{1}{2}}$. De cette dernière inégalité et la relation (3.4), on a (3.3). \square

Théorème 3.1. *Soit $m \geq 1$, $B_m < \infty$, $T > 0$ et $v \in X_m^T$. Alors il existe une unique solution $w \in X_m^T$ de (BP) et il existe $C_m(T, \nu, \|v\|_{X_m^T}) > 0$ tel que*

$$(3.5) \quad \|w(t)\|_{X_m^T} + \int_0^T \|w(t)\|_{m+1}^2 dt \leq C_m.$$

Démonstration. Étape 0 : unicité. Soit $w', w'' \in X_m^T$ solutions de (BP) et $v \in X_m^T$. Alors $w := w' - w''$ vérifie l'équation

$$w_t - \nu w_{xx} = \frac{1}{2}((w' + w'' + 2v)w)_x, \quad w(0) = 0.$$

En prenant le produit scalaire L_2 , de cette équation avec w , et en faisant des intégrations par partie, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \nu \|w(t)\|_1^2 = -\frac{1}{2} \int (w'(t) + w''(t) + 2v(t))w(t)w_x(t) dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'injection de H^1 dans L_∞ , et l'inégalité de Young, le membre à droite est majoré par

$$\begin{aligned} \int |(w'(t) + w''(t) + 2v)w(t)w_x(t)| dx &\leq \|(w'(t) + w''(t) + 2v)w(t)\| \cdot \|w_x(t)\| \\ &\leq C \left(\frac{C}{2\nu} \|w(t)\|^2 + \frac{\nu}{2C} \|w(t)\|_1^2 \right). \end{aligned}$$

D'ici

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 \leq C_1 \|w(t)\|^2.$$

Comme $w(0) = 0$, le lemme de Gronwall implique que $\|w(t)\|^2 = 0$, et donc $w = 0$. D'où l'unicité.

Étape 1 : estimations a priori. Supposons que $v \in X_m^T$ et que $w \in X_m^T$ est la solution de (BP) et montrons d'abord l'inégalité (3.5) pour $m = 0$. Après avoir multiplié (BP) par w et intégré en espace, le membre de gauche s'écrit comme

$$\int (w_t - \nu w_{xx})w dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \nu \|w(t)\|_1^2,$$

et le membre de droite devient

$$-\frac{1}{2} \int ((w + v)_x)^2 dx = \frac{1}{2} \int (w^2 w_x + v^2 w_x + 2vw w_x) dx = \frac{1}{2} \int (v^2 w_x + 2vw w_x) dx.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young, et utilisant (2.7) avec $k = 0$, nous obtenons que le terme à droite est borné par

$$\frac{\nu}{4} \|w(t)\|_1^2 + c \|v\|_{X_1^T}^4 + \frac{\nu}{4} \|w(t)\|_1^2 + c \|v\|_{X_1^T}^2 \|w(t)\|^2, \quad c = c(\nu).$$

Donc, on a

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \nu \|w(t)\|_1^2 \leq c_1 \|v\|_{X_1^T}^2 \|w(t)\|^2 + c_2 \|v\|_{X_1^T}^4.$$

D'ici et le lemme de Gronwall, il en résulte que

$$(3.6) \quad \|w(t)\|^2 \leq t c_2 \|v\|_{X_1^T}^4 e^{c_1 \|v\|_{X_1^T}^2 t} \leq c_0(T), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Maintenant, on va utiliser (3.6) pour estimer $\|w(t)\|_m$. Multiplions l'équation dans (BP) par $w^{(2m)}$. Alors, par une intégration par partie en espace, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_m^2 + \nu \|w(t)\|_{m+1}^2 &\leq \left\langle \frac{d^m}{dx^m} (w(t) + v(t))^2, \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} w(t) \right\rangle \\ &\leq \underbrace{\left\langle w^2(t)^{(1)}, w(t)^{(2m)} \right\rangle}_{=: I_1} + 2 \underbrace{\left\langle (wv)(t)^{(m)}, w(t)^{(m+1)} \right\rangle}_{=: I_2} + \underbrace{\left\langle v^2(t)^{(m)}, w(t)^{(m+1)} \right\rangle}_{=: I_3}. \end{aligned}$$

Par (3.3) (avec $\theta = \theta(m, 2)$), nous avons

$$|I_1| \leq C_1 \|w(t)\|_{m+1}^{1+\theta} \|w(t)\|^{2-\theta}, \quad \theta = \frac{2m+1}{2m+2}.$$

L'inégalité de Young appliquée au membre à droite de cette inégalité implique

$$I_1 \leq \frac{\nu}{4} \|w(t)\|_{m+1}^2 + C'_1 \|w(t)\|^{c'_1}.$$

Nous avons aussi,

$$I_2 \leq \frac{\nu}{4} \|w(t)\|_{m+1}^2 + C'_2 (\|v\|_{X_m^T}) \|w(t)\|^{c'_2}, \quad I_3 \leq \frac{\nu}{4} \|w(t)\|_{m+1}^2 + C'_3 (\|v\|_{X_m^T}) \|w(t)\|^{c'_3}.$$

Pour estimer $I_2 = 2\langle wv(t), w_x(t) \rangle_m$, on utilise (2.8) et (3.2) :

$$\begin{aligned} 2\langle wv(t), w_x(t) \rangle_m &\leq C \|wv(t)\|_m \|w(t)\|_{m+1} \leq C_1 \|w(t)\|_m \|v(t)\|_m \|w(t)\|_{m+1} \\ &\leq C_m \|v(t)\|_m \|w(t)\|^{1-\frac{m}{m+1}} \|w(t)\|_{m+1}^{1+\frac{m}{m+1}}, \end{aligned}$$

et on conclue par l'inégalité de Young. De manière similaire, on dérive une estimation du même type pour I_3 . D'ici et (3.6), on a

$$(3.7) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_m^2 + \frac{\nu}{4} \|w(t)\|_{m+1}^2 \leq C' (\|v\|_{X_m^T}) c_0(T)^{c'}.$$

Finalement, l'intégration de cette relation entre $[0, T]$ permet de conclure à la validité de (3.5) pour tout $m \geq 1$.

Étape 2 : approximation de Galerkin. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit

$$H^{(N)} = \text{vect}\{e_j, |j| \leq N\} \subset H,$$

et $\{w^N\}$ la suite de solutions approchées de Galerkin du problème (BP) définie par

$$w^N(t) = \sum_{|s| \leq N} \alpha_s(t) e_s,$$

où les $\alpha_s(t)$ sont à déterminer. En effet, en substituant w^N dans l'équation de (BP) et en prenant le produit scalaire L_2 dans les deux membre de l'égalité avec $e_j, |j| \leq N$, nous obtenons une EDO de la forme :

$$(3.8) \quad \frac{d\alpha_j}{dt}(t) = -(2\pi j)^2 \alpha_j(t) + P_j(\alpha(t), t), \quad \alpha_j(0) \equiv 0, \quad |j| \leq N,$$

où $P_j(\alpha, t)$ est un polynôme fini en $\alpha = (\alpha_k)_{|k| \leq N}$ et en $(v_k(t))_{k \in \mathbb{Z}^*}$. Donc, $P_j(\alpha, t)$ est une fonction lisse en α et continue en t , on conclut à l'existence d'une unique solution $w^N \in \mathcal{C}^1([0, T^N]; H^{(N)})$ de (3.8), où T^N est le temps maximal d'existence.

Exactement, comme dans l'étape 1, on montre que w^N vérifie l'inégalité (3.5) et donc $\|w^N(t)\|$ est borné uniformément en N . En particulier $\limsup_{t \rightarrow T^N} \|w^N(t)\| < \infty$ ce qui implique que $T^N = T$.

Étape 3 : Convergence. En utilisant l'équation (BP), on trouve que $\{w^N\}$ est borné dans l'espace de Hilbert

$$W^m = \{u \in L_2(0, T; H^{m+1}) : u_t \in L_2(0, T; H^{m-1})\}.$$

Comme $W^m \Subset L_2(0, T; H^m)$ [24, Théorème 5.1], alors il existe une sous suite $\{w^{N_j}\}$ qui converge vers $w \in W^m$ faiblement dans W^m et fortement dans $L_2(0, T; H^m)$. On procède comme dans [24] pour vérifier que w est solution de (BP) et satisfait bien les estimations a priori. De plus, $W^m \subset X_m^T$ [25], donc $w \in X_m^T$.

La suite $\{w^N\}$ est bornée dans X_m^T et H^m est relativement compact dans H^{m-1} . Comme $\{\partial_t w^N\}$ est borné dans $L_2(0, T; H^{m-1})$, alors la suite $\{w^N\}$ est équicontinue dans H^{m-1} . Donc, par le théorème d'Ascoli, $\{w^N\}$ est précompact dans X_{m-1}^T , et $\{w^{N_j}\}$ converge vers w dans X_{m-1}^T (Nous utiliserons cette convergence plus tard). \square

Remarque 1. Une version simplifiée de cet argument nous montre que pour tout $T > 0$, $m \geq 1$, $v \in X_m^T$ et $z \in X_{m-1}^T$, l'équation linéaire

$$(3.9) \quad \begin{cases} w_t - \nu w_{xx} + (vw)_x = z, \\ w|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution $w \in X_m^T$ vérifiant :

$$(3.10) \quad \|w\|_{X_m^T} \leq C \|z\|_{X_{m-1}^T}, \quad C = C(\nu, T, \|v\|_{X_m^T}).$$

3.3. Existence et unicité pour Burgers. Par le lemme 3.1 et le théorème 3.1 on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.2. Pour tout $T > 0$ $m \geq 1$, $u_0 \in H^m$ et $\xi \in X_m^T$ il existe une unique solution u dans X_m^T de (B), (1.3), (3.1). De plus, u satisfait

$$(3.11) \quad \|u\|_{X_m^T}^2 + \int_0^T \|u(t)\|_{m+1}^2 dt \leq C_m, \quad C_m = C_m(T, \nu, \|u_0\|_m, \|\xi\|_{X_m^T}) > 0$$

3.4. Analyticité du flot. Désormais, nous étudions la régularité de l'application

$$H^m \times X_m^T \rightarrow X_m^T, (u_0, \xi) \mapsto u$$

où u est la solution de (B), (3.1) avec $\eta = \partial_t \xi$.

Considérons l'équation de la chaleur

$$(3.12) \quad w_t - \nu w_{xx} = z, \quad w|_{t=0} = 0.$$

Par la remarque 1, si $m \geq 1$ et $z \in X_{m-1}^T$ alors (3.12) a une unique solution $w \in X_m^T$ et

$$(3.13) \quad \|w\|_{X_m^T} \leq C \|z\|_{X_{m-1}^T}, \quad C = C(m, \nu, T).$$

Soit $m \geq 1$ et notons par $X_{m,0}^T = \{w \in X_m^T : w(0) = 0\}$, et soit \mathcal{L} l'application définie par

$$\mathcal{L} : X_{m+1,0}^T \cap \mathcal{C}^1(0, T; H^{m-1}) \rightarrow X_{m-1}^T, \quad w \mapsto w_t - \nu w_{xx}.$$

Par (3.13), l'application $\mathcal{L}^{-1} : X_{m-1}^T \rightarrow X_{m,0}^T$ est une immersion continue. On définit l'espace $Z_m^T = \mathcal{L}^{-1}(X_{m-1}^T)$ munit de la norme $\|w\|_{Z_m^T} = \|\mathcal{L}w\|_{X_{m-1}^T}$ qui est un espace de Banach. Cette espace s'injecte continûment dans $X_{m,0}^T$ et \mathcal{L} définit une isométrie entre Z_m^T et X_{m-1}^T .

Considérons l'équation (BP) avec $v \in X_m^T$. Par le théorème 3.1 la solution $w \in X_m^T$. Donc, $\partial_x((w+v)^2) \in X_{m-1}^T$ et $w = \mathcal{L}^{-1}(-\frac{1}{2}\partial_x((w+v)^2)) \in Z_m^T$. Écrivons (BP) comme

$$(3.14) \quad \Phi(w, v) = 0, \quad \Phi(w, v) = w + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1} \circ \partial_x((w+v)^2).$$

Notons que pour chaque $v \in X_m^T$ l'équation $\Phi(w, v) = 0$ possède une unique solution $w \in Z_m^T$.

Lemme 3.4. Pour tout $T > 0$ et $m \geq 1$, Φ définit une application analytique de $Z_m^T \times X_m^T \rightarrow Z_m^T$.

Démonstration. L'application $X_m^T \rightarrow X_m^T, w \mapsto (w+v)^2$ est analytique car polynomiale et continue [10]. Comme $Z_m^T \hookrightarrow X_{m,0}^T$ alors l'application

$$Z_m^T \times X_m^T \rightarrow Z_m^T, (w, v) \mapsto (w+v)^2 \mapsto \partial_x((w+v)^2) \mapsto \mathcal{L}^{-1} \circ \partial_x((w+v)^2)$$

est aussi analytique. Donc Φ est analytique. \square

Pour tout $(w, v) \in Z_m^T \times X_m^T$, la différentielle de Φ en $w \in Z_m^T$ évaluée en $h \in Z_m^T$ est l'application $d_w \Phi(w, v)(h) : Z_m^T \rightarrow Z_m^T$, telle que $d_w \Phi(w, v)(h) = h + \mathcal{L}^{-1} \circ \partial_x(w+v)h$ [10]. Cette application est continue par le lemme 3.4.

Lemme 3.5. Pour tout $T > 0$, $m \geq 1$ et $(w, v) \in Z_m^T \times X_m^T$, $d_w \Phi$ est un isomorphisme de Z_m^T .

Démonstration. Il est clair que pour tout $w, h, g \in Z_m^T$ et $v \in X_m^T$, on a $d_w \Phi(h) = g$ si et seulement si

$$(3.15) \quad h_t - \nu h_{xx} + \partial_x(w+v)h = \mathcal{L}g.$$

Comme $(w+v, \mathcal{L}g) \in X_m^T \times X_{m-1}^T$, la remarque 1 implique qu'il existe une unique solution $h \in X_{m,0}^T$ de (3.15) et que l'application $X_m^T \rightarrow X_{m,0}^T, \mathcal{L}g \mapsto h$ est continue. \square

Finalement, par les lemmes 3.4 et 3.5, et la version analytique du théorème des fonctions implicites [27, Appendix B], nous obtenons que l'unique solution $w \in Z_m^T$ de l'équation $\Phi(w, v) = 0$ est une fonction analytique de $v \in X_m^T$. Car nous avons écrit la solution u de l'équation de Burgers comme $u = v + w$, on a du lemme 3.1, le

Théorème 3.3. *Soit $m \geq 1$ et $T > 0$. Si u est la solution de (B),(3.1) avec $\eta = \partial_t \xi$, alors l'application $\mathcal{M} : H^m \times X_m^T \rightarrow X_m^T, (u_0, \xi) \mapsto u$ est analytique. En particulier \mathcal{M} est continue.*

On munit l'espace $H^m \times X_m^T$ de la norme :

$$\|(f, h)\| = \|f\|_{H^m} + \|h\|_{X_m^T}.$$

Proposition 3.1. *l'application \mathcal{M} du théorème 3.3 est localement Lipschitzienne².*

Démonstration. Soit $m \geq 1$ et $T > 0$. Nous notons par $H^{m\mathbb{C}}$ l'espace de Sobolev complexe (la complexification de l'espace H^m). On définit $X_m^{T\mathbb{C}}$ et $Z_m^{T\mathbb{C}}$ comme les analogues complexes des espaces X_m^T et Z_m^T .

En utilisant la version analytique complexe du théorème des fonctions implicites [27, Appendix B], nous trouvons que si $w' \in Z_m^{T\mathbb{C}}, v' \in X_m^{T\mathbb{C}}$ et $\Phi(w', v') = 0$ (cf. (3.14)) alors w' est une fonction analytique de v' , et il existe $\varepsilon = \varepsilon(v') > 0$ tel que l'application $v' \mapsto w'(v')$ vérifiant $\Phi(w'(v'), v') = 0$ se prolonge en une application analytique complexe :

$$\Phi : B_{v'}^\varepsilon := \{v \in X_m^{T\mathbb{C}} : \|v - v'\|_{X_m^{T\mathbb{C}}} < \varepsilon\} \rightarrow Z_m^{T\mathbb{C}},$$

qui est bornée en norme par une constance $K(v') > 0$. De plus, nous pouvons choisir $\varepsilon = \varepsilon(\|v'\|_{X_m^{T\mathbb{C}}})$ et $K = K(\|v'\|_{X_m^{T\mathbb{C}}})$ tel que ε, K soient des fonctions continues positives. D'ici, il existe $\tilde{\varepsilon}, \tilde{K} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tel que l'application \mathcal{M} du théorème 3.3 se prolonge en une application analytique complexe :

$$(3.16) \quad \mathcal{M} : \mathcal{O}^{\mathbb{C}} \rightarrow X_m^{T\mathbb{C}},$$

où $\mathcal{O}^{\mathbb{C}} = \{u_0 \in H^{m\mathbb{C}} : \|\operatorname{Im} u_0\|_m \leq \tilde{\varepsilon}(\|\operatorname{Re} u_0\|_m)\} \times \{\xi \in X_m^{T\mathbb{C}} : \|\operatorname{Im} \xi\|_{X_m^{T\mathbb{C}}} \leq \tilde{\varepsilon}(\|\operatorname{Re} \xi\|_{X_m^{T\mathbb{C}}})\}$, et telle que $\|\mathcal{M}(u_0, \xi)\|_{X_m^{T\mathbb{C}}} \leq \tilde{K}(\|u_0\|_{H^{m\mathbb{C}}} + \|\xi\|_{X_m^{T\mathbb{C}}})$. Chaque couple $(u_0, \xi) \in H^m \times X_m^T$ se plonge dans $\mathcal{O}^{\mathbb{C}} \subset H^{m\mathbb{C}} \times X_m^{T\mathbb{C}}$ avec son voisinage complexe de rayon $\tilde{\varepsilon}(\|(u_0, \xi)\|)$. Donc, par l'analyticité de (3.16) et l'inégalité de Cauchy [16, Section VII.A], nous avons que pour tout $u_0 \in H^m$ et $\xi \in X_m^T$:

$$\|d\mathcal{M}(u_0, \xi)\|_{H^m \times X_m^T, X_m^T} \leq \min(\tilde{\varepsilon}(\|u_0\|_m), \tilde{\varepsilon}(\|\xi\|_{X_m^T}))^{-1} \tilde{K}(\|u_0\|_{H^{m\mathbb{C}}} + \|\xi\|_{X_m^{T\mathbb{C}}}).$$

D'ici, nous avons que \mathcal{M}_t est localement Lipschitzienne. \square

Pour $t \in [0, T]$ et $m \geq 1$, nous notons par \mathcal{M}_t l'application

$$(3.17) \quad \mathcal{M}_t : H^m \times X_m^T \rightarrow H^m, (u_0, \xi) \mapsto u(t) = \mathcal{M}|_{t=\text{const}}.$$

Elle est analytique par le théorème 3.3.

On notera parfois, $u(t) = \mathcal{M}(u_0, \xi)(t) = u(t; u_0, \xi)$ la solution de (B),(3.1) avec $\eta = \partial_t \xi$, et on notera $u^\omega(t; u_0) = \mathcal{M}_t(u_0, \xi^\omega)$ la solution de B), (1.3), (3.1).

²C'est à dire, il existe une fonction $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $u_0, u_0' \in H^m$ et $\xi, \xi' \in X_m^T$:

$$\|\mathcal{M}(u_0, \xi) - \mathcal{M}(u_0', \xi')\|_{X_m^T} \leq C(\max(\|(u_0, \xi)\|, \|(u_0', \xi')\|))\|(u_0, \xi) - (u_0', \xi')\|.$$

4. PRINCIPE DU MAXIMUM DE KRUŽKOV

Le but de cette section est d'estimer u , u_x et $u_x^+ := \max(0, u_x)$, en se basant sur la méthode de Kružkov [19]. Commençons avec un lemme évident.

Lemme 4.1. *Si $f \in C^1(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{S}^1} f(x) dx = 0$ et $f'(x) \leq c^*$ pour tout x . Alors $|f|_\infty \leq c^*$ et $|f'|_1 \leq 2c^*$.*

Le théorème suivant nous fournit des estimations portant sur $u_x^+(t)$, $u(t)$ dans L_∞ , et sur $u_x(t)$ dans L_1 .

Théorème 4.1. *Soit $B_4 < \infty$, $T > 0$, $t \in [0, T]$ et $u(t, x)$ solution de (B), (3.1) avec $\eta(t, x) = \partial_t \xi(t, x)$, $\xi \in X_4^T$ et $u(0) \in H^1$. Alors, il existe $C(T) > 0$ indépendante de u_0 et de $\nu \in (0, 1]$, tel que pour tout $\theta \in (0, T]$*

$$(4.1) \quad \sup_{\theta \leq t \leq T} |u_x^+(t, \cdot)|_\infty \leq C\theta^{-1}(1 + \|\xi\|_{X_4^T}),$$

$$(4.2) \quad \sup_{\theta \leq t \leq T} (|u(t, \cdot)|_\infty + |u_x(t, \cdot)|_1) \leq C\theta^{-1}(1 + \|\xi\|_{X_4^T}).$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous supposons que $T = 2$. Supposons d'abord que $u(0) \in H^4$. Alors, le théorème 3.2 implique que $u \in X_4^T$. On se propose d'écrire la solution u de (B), (1.3), (3.1) comme

$$u = \xi + v.$$

Par conséquent, v est solution de

$$(4.3) \quad v_t + u u_x - \nu v_{xx} = \nu \xi_{xx}.$$

On dérive cette équation par rapport à x et on multiplie par t , on trouve

$$(4.4) \quad t v_{tx} + t(u_x^2 + u u_{xx}) = \nu t v_{xxx} + \nu t \xi_{xxx}.$$

On pose $w := t v_x$ et on réécrit (4.4) comme

$$(4.5) \quad (w_t - v_x) + t u_x^2 + (t u \xi_{xx} + u w_x) = \nu w_{xx} + \nu t \xi_{xxx}.$$

Maintenant, on considère la fonction $w(t, x)$ sur le cylindre $Q = [0, 2] \times \mathbb{S}^1$. Comme $w|_{t=0} = 0$ et $\int w(x) dx = 0$ alors, soit w est identiquement nulle ou w atteint son maximum $M > 0$ en $(t_1, x_1) \in Q$ avec $t_1 > 0$. Si w est identiquement nulle alors $v_x(t, x) \equiv 0$, et $v(t, x) = 0$ sur Q . D'où (4.1) et (4.2). Maintenant, supposons que w atteint son maximum $M > 0$ en $(t_1, x_1) \in Q$ et notons par

$$(4.6) \quad K := \max(1, \max_{0 \leq t \leq 2} \|\xi(t, \cdot)\|_{C^3(\mathbb{S}^1)}).$$

Alors

$$K \leq \max(1, C \|\xi(t, \cdot)\|_{X_4^T}) < \infty, \quad C > 0$$

Démontrons que

$$(4.7) \quad M \leq 9K.$$

Par un raisonnement par l'absurde, supposons que $M > 9K$. Comme $\xi, u \in X_4^T$, on trouve de l'équation (4.5) que $w_t, w_x, w_{xx} \in C(Q)$ [12]. Alors les conditions d'optimalité impliquent que

$$(4.8) \quad w_t \geq 0, \quad w_x = 0 \text{ et } w_{xx} \leq 0 \quad \text{au point } (t_1, x_1).$$

Par (4.8) et (4.5), on a au point (t_1, x_1) , la relation

$$-v_x + t u_x^2 + t u \xi_{xx} \leq \nu t \xi_{xxx}.$$

On multiplie cette dernière inéquation par t et en utilisant le fait que $w(t_1, x_1) = M$ et $t^2 u_x^2 = (w + t \xi_x)^2$, nous avons au point (t_1, x_1) ,

$$(4.9) \quad -M + (M + t \xi_x)^2 + t^2 u \xi_{xx} \leq \nu t^2 \xi_{xxx}.$$

Comme $t \leq 2$, par (4.6) on a

$$(4.10) \quad |t \partial_{x^j}^j \xi| \leq 2K, \quad j = 0, \dots, 3.$$

De plus,

$$(4.11) \quad (M + t\xi_x)^2 \geq (M - 2K)^2, \quad \text{au point } (t_1, x_1),$$

car $M > 2K$. De plus, $\int_{\mathbb{S}^1} tv(x)dx = 0$ et $tv_x = w \leq M$, alors le lemme 4.1 implique que $|tv| \leq M$, ce qui entraîne

$$(4.12) \quad |tu| \leq |t\xi| + M \leq 2K + M, \quad \forall (t, x) \in Q,$$

et

$$|t^2 u \xi_{xx}| = |(tu)(t\xi_{xx})| \leq (2K + M)(2K), \quad \forall (t, x) \in Q.$$

Comme $\nu t^2 \xi_{xxx} \leq 4K$, alors d'ici et de (4.12), nous avons

$$-M + (M - 2K)^2 \leq 2K(2K + M) + 4K,$$

Cette dernière relation implique que $M < 6K + 2$. Comme $M > 9K$ et $K \geq 1$ alors $6K + 2 < 9K$. D'où la contradiction, et (4.7) est établi.

Comme $tu_x = w + t\xi_x$ et $M \leq 9K$, alors pour tout $(t, x) \in Q$, on a $tu_x \leq 11K$. Donc, u satisfait (4.1) si $u(0) \in H^4$. Encore une fois, le lemme 4.1 implique que

$$t|u|_\infty, t|u_x|_1 \leq 22K \leq 22(1 + \|\xi\|_{X_4^T}),$$

i.e, u satisfait (4.2) si $u(0) \in H^4$.

Maintenant, supposons que $u(0) \in H^1$ est montrons que la solution $u \in H^1$ de (B) vérifie bien (4.1) et (4.2). Choisissons une suite $\{u^j(0)\}_{j \in \mathbb{N}} \in H^4$ qui converge vers $u(0)$ dans H^1 . Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, $u^j(0)$ définit une solution $u^j \in H^4$ de (B) qui satisfait (par ce qui précède) (4.1) et (4.2). Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{S}^1$

$$(4.13) \quad |u_x^+(t, x)| \leq |u_x^+(t, x) - u_x^{j+}(t, x)| + C(1 + \|\xi\|_{X_4^T}), \quad C > 0.$$

Par le théorème 3.3 avec $m = 1$,

$$(4.14) \quad u^j(t, \cdot) \rightarrow u(t, \cdot) \text{ dans } H^1.$$

D'ici $\{u_x^j(t, x)\}$ converge (à sous-suite près) vers $u_x(t, x)$ p.p tout x . En passant à la limite dans (4.13) quand $j \rightarrow +\infty$ nous obtenons que $|u_x^+(t, x)| \leq C(1 + \|\xi\|_{X_4^T})$ presque partout, et (4.1) est vérifiée.

La convergence (4.14) et le fait que (4.2) est vrai pour u^j implique que (4.2) reste vrai pour u . \square

Par le théorème 2.2 et le théorème 4.1, nous avons immédiatement le :

Corollaire 4.1. *Si $B_4 < \infty$ et $u(0) \in H^1$, alors pour tout $p \geq 1$ et $0 < \theta \leq T$, il existe $C(p, T, B_4) > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{\theta \leq t \leq T} |u_x^+(t, \cdot)|_\infty^p] &\leq C\theta^{-p}, \\ \mathbb{E}[\sup_{\theta \leq t \leq T} (|u(t, \cdot)|_\infty^p + |u_x(t, \cdot)|_1^p)] &\leq C\theta^{-p}. \end{aligned}$$

5. LOI DE LA SOLUTION u ET LES DEUX SEMI GROUPE DE MARKOV

Soit (X, \mathcal{B}_X) et (Y, \mathcal{B}_Y) deux espaces mesurables. Par exemple, X et Y sont deux sous-ensemble fermées d'espaces de Banach, munis de leurs tribus Boréliennes [28]. Soit $F : X \rightarrow Y$ une application mesurable. Notons par $\mathcal{P}(X, \mathcal{B}_X)$ (resp. $\mathcal{P}(Y, \mathcal{B}_Y)$) l'espace des mesures de probabilités sur (X, \mathcal{B}_X) (resp. (Y, \mathcal{B}_Y)). Rappelons [28] que F définit l'application

$$F_* : \mathcal{P}(X, \mathcal{B}_X) \rightarrow \mathcal{P}(Y, \mathcal{B}_Y), \quad m \mapsto F \circ m,$$

où pour tout $Q \in \mathcal{B}_Y : (F \circ m)(Q) = m(F^{-1}(Q))$. L'application F_* est linéaire dans le sens où :

$$(5.1) \quad F_*(am_1 + (1-a)m_2) = aF_*(m_1) + (1-a)F_*(m_2),$$

pour tout $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, \mathcal{B}_X)$ et $a \in [0, 1]$.

Lemme 5.1. [28] *Soit X et Y deux espaces de Banach séparables et $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Alors, il existe une variable aléatoire $\varsigma : \Omega \rightarrow X$ tel que sa loi, noté $\mathcal{D}(\varsigma)$, est égale à μ . De plus, si $F : X \rightarrow Y$ est une application mesurable, alors $F \circ \mu = \mathcal{D}(F \circ \xi)$.*

Soit $m \geq 0$. On munit l'espace de Banach séparable X_m^T de sa tribu Borélienne $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{X_m^T}$. On note par $\mathcal{P}(X_m^T)$ l'espace des mesures de probabilités Boréliennes sur (X_m^T, \mathcal{B}) , et par $\mathcal{C}_b(X_m^T)$ l'espace des fonctions continues et bornées sur X_m^T muni de la norme de convergence uniforme [11]. On rappelle (théorème 2.2) que si $B_m < \infty$, $m \geq 1$, alors ξ^ω définit une variable aléatoire $\xi : \Omega \rightarrow X_m^T$. Sa loi, noté $\mathcal{D}(\xi^\omega)$, est la mesure $\pi = \xi \circ \mathbb{P}$. C'est à dire, telle que pour tout $Q \in \mathcal{B}(X_m^T) : \pi(Q) = \mathbb{P}\{\omega : \xi^\omega \in Q\}$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(X_m^T)$ on a

$$\langle f, \pi \rangle = \int_{X_m^T} f(\xi) \pi(d\xi) = \int_{\Omega} f(\xi^\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[f(\xi^\omega)],$$

(voir [28]). Soit $f \in (X_m^T)^*$, i.e f est une forme linéaire continue sur X_m^T . Comme les processus $\{\beta_s\}$ sont indépendants, alors

$$f \circ \pi = \mathcal{D} \left(f \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}^*} b_s \beta_s^\omega(t) e_s(x) \right) \right) = \mathcal{D} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}^*} b_s f(\beta_s^\omega(t) e_s(x)) \right) = \pi_1 \star \pi_2 \star \dots$$

Ici $\pi_j = \mathcal{D}(b_j f(e_j \beta_j^\omega))$ et \star est la convolution des mesures. Comme les π_j sont des mesures Gaussiennes alors $f \circ \pi$ l'est aussi [28]. C'est à dire, π est une mesure Gaussienne dans l'espace de Banach X_m^T [6], [20]. Comme π_j dépend seulement de f, b_s et de la loi de β_s^ω alors

$$(5.2) \quad \pi \text{ dépend seulement de la suite } \{b_k, k \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Notons qu'on peut obtenir (2.9) comme conséquence du célèbre Théorème de *Fernique* qui affirme que si μ est une mesure Gaussienne dans un espace de Banach X , alors il existe un réel positif α tel que

$$\int_X e^{\alpha \|x\|_X} \mu(dx) < \infty \text{ (voir [6], [20]).}$$

Soit $B_m < \infty$, $m \geq 1$. Considérons le problème de Cauchy (B), (1.3), (3.1). Soit $m_0 \in \mathcal{P}(H^m)$ et $u_0^\omega \in H^m$ une variable aléatoire indépendante de ξ^ω , telle que $\mathcal{D}(u_0^\omega) = m_0$ (lemme 5.1). Alors

$$\mathcal{P}(H^m \times X_m^T) \ni \mathcal{D}(u_0^\omega, \xi^\omega) = m_0 \times \mathcal{D}(\xi^\omega).$$

On note dans la suite $\mathcal{D}(u_0^\omega)$ par m_0 , et $\mathcal{D}(\xi^\omega)$ par π . On supposera π fixé et on étudie la dépendance de la loi de la solution $u^\omega(t, x)$ du problème de Cauchy par rapport à m_0 . On désigne par $u^\omega(t; u_0^\omega)$ la solution à l'instant t issue de u_0^ω , et on construit l'application S_t^* définie par :

$$S_t^* : \mathcal{P}(H^m) \rightarrow \mathcal{P}(H^m), \quad m_0 \mapsto \mathcal{M}_t \circ (m_0 \times \pi) := \mathcal{D}(u^\omega(t; u_0^\omega)),$$

(cf. théorème 3.3 et (3.17)). L'application S_t^* est linéaire (cf. (5.1)).

Lemme 5.2. *Soit \tilde{u}^ω une solution de (B) avec $\tilde{\eta}^\omega = \partial_t \tilde{\xi}^\omega$, $\tilde{\xi}^\omega(t, x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} b_s \tilde{\beta}_s^\omega(t) e_s(x)$, et $\{\tilde{\beta}_s^\omega(t), s \in \mathbb{Z}^*\}$ sont des processus de Wiener Standard indépendants. Soit $\tilde{u}^\omega(0) = \tilde{u}_0^\omega \in H^m$ une variable aléatoire indépendante de $\tilde{\xi}^\omega$ telle que $\mathcal{D}(\tilde{u}_0^\omega) = m_0$. Alors $\mathcal{D}(\tilde{u}(t)) = S_t^*(m_0)$, pour tout $t \in (0, T)$.*

Démonstration. Par le théorème 3.3, nous avons $\tilde{u}^\omega = \mathcal{M}_t(\tilde{u}_0^\omega, \tilde{\xi}^\omega)$, et par le lemme 5.1, nous obtenons que $\mathcal{D}(\tilde{u}(t)) = \mathcal{M}_t \circ \mathcal{D}(\tilde{u}_0^\omega, \tilde{\xi}^\omega)$. Étant donné (5.2) et que \tilde{u}_0^ω est indépendante de $\tilde{\xi}^\omega$, alors

$$\mathcal{D}(\tilde{u}_0^\omega, \tilde{\xi}^\omega) = \mathcal{D}(\tilde{u}_0^\omega) \times \mathcal{D}(\tilde{\xi}^\omega) = m_0 \times \pi.$$

Donc, $\mathcal{D}(\tilde{u}(t)) = \mathcal{M}_t \circ (m_0 \times \pi) = S_t^*(m_0)$ □

Si $u_0 := v \in H^m$ est indépendante de ω , alors $\mathcal{D}(u_0) = \delta_v \in \mathcal{P}(H^m)$ est la mesure de Dirac et $S_t^*(\delta_v) = \mathcal{D}(u(t; v))$. On considère l'application

$$\Sigma : \mathbb{R}^+ \times H^m \rightarrow \mathcal{P}(H^m), \quad (t, v) \mapsto S_t^*(\delta_v) = \mathcal{D}(u(t; v)) = \Sigma_t(v).$$

Elle est appelée : *la fonction de transition de Markov.*

Théorème 5.1. $S_0^* = Id$ et pour tout $t_1, t_2 > 0$:

$$(5.3) \quad S_{t_1}^* \circ S_{t_2}^* = S_{t_1+t_2}^*.$$

On dit que $\{S_t^*\}_{t>0}$ est le *semi groupe de Markov dans $\mathcal{P}(H^m)$* de l'équation (B).

Démonstration. La première affirmation est évidente. Pour démontrer la dernière, on fixe $t_1, t_2 > 0$ et on pose $\mu_i := \mathcal{D}(u^\omega(t_i; u_0^\omega))$ pour $i = 1, 2$. Notons $v(t, x) = u(t_1 + t; u_0^\omega)$. Alors v vérifie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} v_t + vv_x - \nu v_{xx} = \tilde{\eta}^\omega, \\ v(0, x) = v_0, \end{cases}$$

où $\tilde{\eta}^\omega(t, x) = \eta^\omega(t_1 + t, x)$ et $v_0 = u(t_1; u_0^\omega)$. C'est à dire,

$$\tilde{\eta}^\omega(t, x) = \partial_t(\xi^\omega(t_1 + t, x)) = \partial_t(\xi^\omega(t_1 + t, x) - \xi^\omega(t_1, x)) := \partial_t(\tilde{\xi}^\omega(t, x)).$$

et

$$\tilde{\xi}^\omega(t, x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} b_s(\beta_s^\omega(t + t_1) - \beta_s^\omega(t_1))e_s(x).$$

Comme $\{\beta_s^\omega\}$ sont des processus de Wiener standards indépendants alors $\{\beta_s^\omega(t + t_1) - \beta_s^\omega(t_1)\}$ l'est aussi (appendice A). D'ici, nous avons que $\mathcal{D}(\tilde{\xi}^\omega) = \mathcal{D}(\xi^\omega)$. La variable aléatoire $v_0^\omega = u(t_1, u_0^\omega)$ dépend que de u_0^ω et $(\xi^\omega(t), 0 \leq t \leq t_1)$. Donc, elle est indépendante des incréments $(\xi^\omega(t_1 + t) - \xi^\omega(t_1), t \geq 0)$ (qui sont indépendants de u_0^ω et des $(\xi^\omega(t), 0 \leq t \leq t_1)$). Donc, par le lemme 5.2

$$\mathcal{D}(v(t_2)) = S_{t_2}^*(\mu_1) = S_{t_2}^* \circ S_{t_1}^*(m_0).$$

Comme $\mathcal{D}(v(t_2)) = \mathcal{D}(u(t_1 + t_2); u_0) = S_{t_1+t_2}^*(\mu_1)$, alors nous obtenons (5.3). \square

Notons par $L_b(H^m)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur H^m , et pour tout $t \geq 0$, considérons l'application $S_t : \mathcal{C}_b(H^m) \rightarrow L_b(H^m)$ définie par

$$(5.4) \quad S_t f(v) := \mathbb{E}[f(u(t; v))], \quad f \in \mathcal{C}_b(H^m), v \in H^m.$$

Par définition de S_t , on a

$$(5.5) \quad S_t f(v) = \langle f, \mathcal{D}(u(t; v)) \rangle = \langle f, \mathcal{M}_t \circ (\delta_v \times \pi) \rangle = \langle f, S_t^*(\delta_v) \rangle.$$

Théorème 5.2. Soit $m \geq 1$ et $t \geq 0$. Alors

- (1) $S_t(\mathcal{C}_b(H^m)) \subset \mathcal{C}_b(H^m)$.
- (2) L'application S_t est linéaire et positive.
- (3) L'application $S_t : \mathcal{C}_b(H^m) \rightarrow \mathcal{C}_b(H^m)$ est continue et sa norme est égale à 1.
- (4) Pour tout $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$ et μ dans $\mathcal{P}(H^m)$ nous avons que

$$(5.6) \quad \langle S_t f, \mu \rangle = \langle f, S_t^*(\mu) \rangle.$$

Démonstration. 1) Si $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$ alors par (5.4) :

$$S_t f(v) = \mathbb{E}[f(u(t; v))] = \mathbb{E}[f \circ \mathcal{M}_t(v, \xi^\omega)].$$

Si $v_n \rightarrow v$ dans H^m alors pour chaque ω , $f \circ \mathcal{M}_t(v_n, \xi^\omega) \rightarrow f \circ \mathcal{M}_t(v, \xi^\omega)$ dans H^m (car $f \circ \mathcal{M}_t$ est continue). D'ici, et du théorème de convergence dominée de Lebesgue : $S_t f(v_n) \rightarrow S_t f(v)$, donc $S_t f \in \mathcal{C}_b(H^m)$.

2) La linéarité et la positivité de S_t sont évidentes.

3) La relation $S_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ou $\mathbf{1}(u) = 1$ pour tout u est triviale. Soit f dans $\mathcal{C}_b(H^m)$ et notons par $d = \|f\|$. Alors

$$-d\mathbf{1} \leq f \leq d\mathbf{1}.$$

Par la positivité de S_t et cette relation nous avons que $-d\mathbf{1} \leq S_t f \leq d\mathbf{1}$, d'ici $\|S_t f\| \leq \|f\|$ et donc $|S_t|_{\mathcal{C}_b, \mathcal{C}_b} \leq 1$, et S_t est continue. Finalement, comme $S_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$ alors $|S_t|_{\mathcal{C}_b, \mathcal{C}_b} = 1$.

3) Nous avons

$$\langle f, S_t^*(\mu) \rangle = \langle f, \mathcal{M}_t \circ (\mu \times \pi) \rangle = \langle f \circ \mathcal{M}_t, \mu \times \pi \rangle.$$

Puis par le théorème de Fubini :

$$\langle f \circ \mathcal{M}_t, \mu \times \pi \rangle = \int_{H^m} \underbrace{\int_{H^m} (f \circ \mathcal{M}_t)(v, \xi) \pi(d\xi) \mu(dv)}_{(S_t f)v} = \langle S_t f, \mu \rangle.$$

□

On démontre dans ce qui suit, que la famille d'opérateurs $\{S_t, t \geq 0\}$ forment un semi groupe.

Théorème 5.3. *Nous avons $S_0 = Id$ et pour tout $t_1, t_2 \geq 0$*

$$(5.7) \quad S_{t_1} \circ S_{t_2} = S_{t_1+t_2}.$$

On dit que $\{S_t\}_{t \geq 0}$ est *le semi groupe de Markov dans $\mathcal{C}_b(H^m)$* de l'équation (B).

Démonstration. Soit $t_1, t_2 > 0$, $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$ et $v \in H^m$. Par le théorème 5.2, on a $(S_{t_1+t_2} f)v = \langle f, S_{t_1+t_2}^*(\delta_v) \rangle$ et par le théorème 5.1 $\langle f, S_{t_1+t_2}^*(\delta_v) \rangle = \langle f, S_{t_1}^* \circ S_{t_2}^*(\delta_v) \rangle$. Encore une fois par le théorème 5.2 $\langle f, S_{t_1}^* \circ S_{t_2}^*(\delta_v) \rangle = \langle S_{t_1} f, S_{t_2}^*(\delta_v) \rangle = \langle S_{t_2} \circ S_{t_1} f, \delta_v \rangle$. Finalement $(S_{t_1+t_2} f)v = (S_{t_2} \circ S_{t_1} f)v$. □

Théorème 5.4. *(Relation de Kolmogorov-Chapman)*

Pour tout $t_1, t_2 \geq 0$, $m \geq 1$ et $v \in H^m$, on a

$$(5.8) \quad \Sigma_{t_1+t_2}(v) = \int (\Sigma_{t_2}(u)) \Sigma_{t_1}(v) (du).$$

Ici, l'intégrale de droite est une intégrale de la fonction $u \mapsto \Sigma_{t_2}(u) \in \mathcal{P}(H^m)$ par rapport à la mesure $\Sigma_{t_1}(v)$ [9]. Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$:

$$(5.9) \quad S_{t_1+t_2} f(v) = \langle \Sigma_{t_1+t_2}(v), f \rangle = \int \langle \Sigma_{t_2}(u), f \rangle \Sigma_{t_1}(v) (du).$$

Démonstration. L'intégrale à droite de (5.9) est égale à $\int S_{t_1} f(u) \Sigma_{t_1}(v) (du) = (S_{t_1} \circ S_{t_2} f)(v)$. Alors, (5.9) est une conséquence de (5.7). Comme les termes à gauche et à droite de (5.9) sont les intégrales de f avec les deux mesures définies dans (5.8), alors (5.9) est une conséquence de (5.8). □

Le théorème 5.4 peut être généralisé :

Proposition 5.1. *Pour tout $t_1, t_2 \geq 0$, $m \geq 1$ et $v \in H^m$, si $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$ et Φ est une fonction bornée et mesurable sur $X_m^{t_1}$, alors*

$$(5.10) \quad \mathbb{E}[\Phi(u(\tau; v)|_{\tau \in [0, t_1]}) f(u(t_1 + t_2; v))] = \mathbb{E}[\Phi(u(\tau; v)|_{\tau \in [0, t_1]}) \langle \Sigma_{t_2}(u(t_1; v)), f \rangle].$$

Notons que (5.10) est égale à (5.9) si $\Phi \equiv 1$.

Démonstration. Nous raisonnons comme dans la démonstration du théorème 5.1. Considérons des espaces de probabilité $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2$, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$. Soit $\{\beta_s^{\omega_i}, s \in \mathbb{Z}^*\}$, $i = 1, 2$, des processus de Wiener standards indépendants définies sur $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2$. Pour $t_1, t_2 \geq 0$ et $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, on pose :

$$\beta_s^\omega(t) = \begin{cases} \beta_s^{\omega_1}(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \beta_s^{\omega_1}(t_1) + \beta_s^{\omega_2}(t - t_1), & t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases}$$

qui sont des processus de Wiener standards indépendants. On choisit cette forme de $\{\beta_s^\omega, s \in \mathbb{Z}^*\}$ pour la force ξ (voir (1.3)). Dans ce cas, pour $0 \leq t \leq t_1$, la solution $u^\omega(t; v) = u^{\omega_1}(t; v)$ ne dépend pas de ω_2 , et pour $t_1 \leq t \leq t_2$, l'équation pour $u^\omega(t; v)$ dépend seulement de ω_2 . Donc,

$$u^\omega(t_1 + t; v) = u^{\omega_2}(t; u^{\omega_1}(t_1; v)),$$

et l'intégrale à gauche de (5.10) s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \Phi(u^\omega(\tau; v)|_{\tau \in [0, t_1]}) f(u^\omega(t_1 + t_2; v)) \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \Phi(u^{\omega_1}(\tau; v)|_{\tau \in [0, t_1]}) f(u^{\omega_1, \omega_2}(t_1 + t_2; v)) \mathbb{P}_1(d\omega_1) \mathbb{P}_2(d\omega_2) \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(u^{\omega_2}(t_2; u^{\omega_1}(t_1; v))) \mathbb{P}_2(d\omega_2) \right) \Phi(u^{\omega_1}(\tau; v)|_{\tau \in [0, t_1]}) \mathbb{P}_1(d\omega_1) \\
&= \int_{\Omega} \langle \Sigma_{t_2}(u(t_1; v)), f \rangle \Phi(u^\omega(\tau; v)|_{\tau \in [0, t_1]}) \mathbb{P}(d\omega).
\end{aligned}$$

Et (5.10) est vérifié. \square

Le théorème 5.1 et (5.9) montrent que pour $0 < t_1 < t_1 + t_2$ et pour chaque donnée initiale u_0^ω indépendante de la force η^ω de la forme (1.3), la loi de la solution $u(t_1 + t_2; u_0)$ est une fonction qui dépend seulement de la loi de $u(t_1; u_0)$. On appelle cela : *la propriété de Markov*. C'est la raison pour laquelle il est plus facile d'étudier l'équation de Burgers stochastique avec une force η^ω qui est un bruit blanc plutôt qu'avec une autre force aléatoire.

6. CONVERGENCE FAIBLE DE MESURES

On rappelle ici quelques résultats sur la notion de convergence faible (ou étroite) de mesures [3], [11], [28]. Soit X un espace de Banach séparable, $O_X \subset X$ un fermé (par exemple, $O_X = X$). On note par

$$L(O_X) := \{f \in \mathcal{C}_b(O_X) : Lip(f) < \infty\},$$

où $Lip(f)$ désigne la constante de Lipschitz de f . L'espace $L(O_X)$ muni de la norme

$$\|f\|_L = \|f\|_{L(X)} := \|f\| + Lip(f)$$

est un espace de Banach non séparable [11],[23].

Définition 6.1. *On dit qu'une suite $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(O_X)$ converge faiblement vers $\mu \in \mathcal{P}(O_X)$, et on note $\mu_n \rightharpoonup \mu$, si et seulement si*

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(O_X) : \langle \mu_n, f \rangle \rightarrow \langle \mu, f \rangle.$$

La convergence $\mu_n \rightharpoonup \mu$ n'implique pas la convergence de $\mu_n(Q)$ vers $\mu(Q)$, $Q \in \mathcal{B}(O_X)$. Pourtant

$$(6.1) \quad \mu_n(Q) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(Q), \text{ si } Q \text{ est fermé et } \mu_n \rightharpoonup \mu \text{ (voir [3], [11], [28]).}$$

Définition 6.2. *Si μ et ν sont des éléments de $\mathcal{P}(O_X)$, alors la distance Lipschitz-dual (ou Lip-dual) entre μ et ν est définie par*

$$\|\mu - \nu\|_{L(X)}^* := \sup_{\|f\|_{L(X)} \leq 1} (\langle f, \mu \rangle - \langle f, \nu \rangle).$$

Le théorème suivant dû à Kantrovitch caractérise la convergence faible de mesures par la distance Lipschitz-dual [11].

Théorème 6.1. *Soit X un espace de Banach séparable, $O_X \subset X$ un fermé. Alors*

- (1) $(\mathcal{P}(O_X), \|\cdot\|_{L(X)}^*)$ est un espace métrique complet.
- (2) Si $\{\mu_n\} \subset \mathcal{P}(O_X)$ et $\mu \in \mathcal{P}(O_X)$ alors

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \iff \|\mu_n - \mu\|_{L(X)}^* \rightarrow 0.$$

Théorème 6.2. *Pour tout $t \geq 0$ et $m \geq 1$, l'application $S_t^* : \mathcal{P}(H^m) \rightarrow \mathcal{P}(H^m)$ est faiblement continue, i.e. si $\mu_n \rightharpoonup \mu$ alors $S_t^* \mu_n \rightharpoonup S_t^* \mu$.*

Démonstration. Soit $\mu_n \rightharpoonup \mu$ et $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$. On a par (5.6) : $\langle S_t^* \mu_n, f \rangle = \langle \mu_n, S_t f \rangle$ et $\langle S_t^* \mu, f \rangle = \langle \mu, S_t f \rangle$. Comme $S_t f \in \mathcal{C}_b(H^m)$, on a $\langle \mu_n, S_t f \rangle \rightarrow \langle \mu, S_t f \rangle$. Donc, $S_t^* \mu_n \rightharpoonup S_t^* \mu$. \square

Définition 6.3. Soit M un ensemble de mesures de $\mathcal{P}(O_X)$.

(1) M est dit tendu, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset O_X$ tel que

$$\mu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall \mu \in M.$$

(2) M est dit faiblement relativement compact, si toute suite $\{\mu_n\} \subset M$ admet une sous suite faiblement convergente dans $\mathcal{P}(O_X)$.

Le théorème suivant dû à Prokhorov caractérise les ensembles de mesures faiblement relativement compact [3], [11], [28].

Théorème 6.3. Un ensemble de mesures $M \subset \mathcal{P}(O_X)$ est tendu si et seulement si M est faiblement relativement compact.

7. ESTIMATIONS AU-DESSUS DES NORMES SOBOLEV DE u

Dans la suite nous supposons toujours que $B_4 < \infty$.

Le but de cette section est d'estimer l'espérance mathématique des normes $\mathbb{E}[\|u(t)\|_m^2]$, $m \geq 1$, de la solution $u(t)$ de (B) uniformément en $\nu \in (0, 1]$ et en $u_0 \in H^1$.

On se donne $u \in X_m^T$ solution de (B), et on rappelle brièvement la formule d'Itô [14], [17], [26]. Soit f une fonction sur H^m de classe C^2 . Alors la formule d'Itô implique que³

$$(7.1) \quad \frac{d}{dt} \mathbb{E}[f(u(t))] = \mathbb{E} \left[df(u(t))L(u(t)) + \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} b_s^2 d^2 f(u(t))(e_s, e_s) \right],$$

où $L(u) = \nu u_{xx} - u u_x$. La relation (7.1) est une égalité formelle. Elle devient une affirmation rigoureuse si on suppose des restrictions sur f [23, Appendix A7]. Nous discuterons cela plus tard.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on note par $[x]$ la partie entière par excès de x :

$$[x] = \min\{l \in \mathbb{N} : l \geq x\}.$$

Théorème 7.1. Soit $T > \theta > 0$, $m \geq 1$ et $\nu \in (0, 1]$. Si $B_{[m]} < \infty$, alors il existe $C_m(\theta, B_{[m]}, B_4) > 0$ tel que pour tout $u_0 \in H^1$, la solution u de (B), (1.3), (3.1) satisfait

$$(7.2) \quad \mathbb{E}[\|u(t)\|_m^2] \leq C_m \nu^{-(2m-1)}, \quad \forall \theta \leq t \leq T.$$

Démonstration. Par C_{mj} , c'_m , C'_{mj} , ... etc, nous notons des constantes positives qui ne dépendent que de m , θ , B_4 et $B_{[m]}$. On supposera d'abord que $m \in \mathbb{N}^*$.

i) En premier lieu, nous présentons une preuve basée sur une application formelle de la formule (7.1) et nous expliquerons plus tard comment convertir cette argument en une preuve rigoureuse. Supposons d'abord que $u_0 \in H^m$, alors la solution $u = u^\omega \in X_m^T$ (cf. théorème 3.2) pour chaque ω .

On applique (7.1) à la fonction $f(u) = \|u\|_m^2 = \langle (-\Delta)^m u, u \rangle$. On a $df(u)v = 2\langle (-\Delta)^m u, v \rangle$ et $d^2 f(u)(e_s, e_s) = 2\langle (-\Delta)^m e_s, e_s \rangle = (2\pi s)^{2m} \langle e_s, e_s \rangle = (2\pi s)^{2m}$, donc (7.1) s'écrit comme

$$(7.3) \quad \frac{d}{dt} \mathbb{E}[\|u\|_m^2] = -\mathbb{E}[\langle (-\Delta)^m u, \partial_x u^2 \rangle] - 2\nu \mathbb{E}[\langle (-\Delta)^m u, (-\Delta) u \rangle] + B'_m,$$

où $B'_m = (2\pi)^{2m} B_m = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} b_s^2 (2\pi s)^{2m}$.

Par le lemme 3.3 (avec $q = \infty$), et le fait que $|u|_\infty \leq |u_x|_1$, nous avons

$$(7.4) \quad |\mathbb{E}[\langle (-\Delta)^m u, \partial_x u^2 \rangle]| \leq C_m \mathbb{E}[\|u\|_{m+1}^{\alpha+1} |u_x|_1^{2-\alpha}], \quad \alpha = \frac{2m-1}{2m+1}.$$

L'inégalité de Hölder appliquée au membre à droite avec $p = \frac{2m+1}{2m}$, et le corollaire 4.1 impliquent que pour tout $\theta' := \frac{\theta}{2} \leq t \leq T$:

$$\mathbb{E}[\|u_x\|_1^{2-\alpha} \|u\|_{m+1}^{\alpha+1}] \leq \left(\mathbb{E}[\|u_x\|_1^{(2-\alpha)q_m}] \right)^{\frac{1}{q_m}} \left(\mathbb{E}[\|u\|_{m+1}^2] \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_m \left(\mathbb{E}[\|u\|_{m+1}^2] \right)^{\frac{2m}{2m+1}}.$$

³Dans le sens où la relation (7.1) est l'espérance de la formule d'Itô.

On pose $X_j(t) = \mathbb{E}[|u|_j^2]$, $j \in \mathbb{N}^*$. Par les dernières estimations, la relation (7.3) s'écrit

$$(7.5) \quad \frac{d}{dt} X_m(t) \leq B'_m - 2\nu X_{m+1}(t) + C_m X_{m+1}(t)^{\frac{2m}{2m+1}}, \quad \theta' \leq t \leq T.$$

Comme précédemment, l'inégalité (3.2) (avec $\theta(m, \infty, 2, m+1)$), celle de Hölder et le corollaire 4.1 impliquent que :

$$X_m(t) \leq C_{m1} X_{m+1}(t)^{\frac{2m-1}{2m+1}} (\mathbb{E}[|u_x|_1^a])^b \leq C_{m2} X_{m+1}(t)^{\frac{2m-1}{2m+1}},$$

pour des constantes convenables $a, b > 0$, si $\theta' \leq t \leq T$. Alors

$$(7.6) \quad X_{m+1}(t) \geq C_{m3} X_m(t)^{\frac{2m+1}{2m-1}}, \quad \theta' \leq t \leq T.$$

La relation (7.5) s'écrit pour tout $\theta' \leq t \leq T$:

$$(7.7) \quad \frac{d}{dt} X_m(t) \leq B'_m - X_{m+1}(t)^{\frac{2m}{2m+1}} \left(2\nu X_{m+1}(t)^{\frac{1}{2m+1}} - C_m \right).$$

Fixons $\beta > 1$ et supposons que

$$(7.8) \quad \exists t_* \in (2\theta', T] \text{ tel que } X_m(t_*) > \beta \nu^{-(2m-1)} =: Y.$$

Soit $s = t_* - t$, $s \in [0, t_*]$. Alors, nous avons de (7.7) :

$$(7.9) \quad \frac{d}{ds} X_m(s) \geq -B'_m + X_{m+1}(s)^{\frac{2m}{2m+1}} \left(2\nu X_{m+1}(s)^{\frac{1}{2m+1}} - C_m \right).$$

Si $X_m(s) > Y$, alors par (7.6)

$$\begin{aligned} 2\nu X_{m+1}(s)^{\frac{1}{2m+1}} - C_m &\geq 2\nu \left(C_{m3} X_m(s)^{\frac{2m+1}{2m-1}} \right)^{\frac{1}{2m+1}} - C_m \\ &\geq 2C_{m3}^{\frac{1}{2m+1}} \beta^{\frac{1}{2m-1}} - C_m := K_m(\beta). \end{aligned}$$

Choisissons $\beta_0 \gg 1$ tel que $K_m(\beta) > 1$ pour tout $\beta > \beta_0$. D'ici, de (7.6) et de (7.9), si $X_m(s) > Y$ alors nous obtenons

$$(7.10) \quad \frac{d}{dt} X_m(s) \geq -B'_m + X_{m+1}(s)^{\frac{2m}{2m+1}} K_m(\beta) \geq -B'_m + C_{m3}^{\frac{2m}{2m+1}} X_m(s)^{\frac{2m}{2m-1}} K_m(\beta) > 0,$$

où la dernière inégalité est valide si $\beta_0 \gg 1$. D'ici et de (7.8), nous obtenons que

$$(7.11) \quad \text{la fonction } s \mapsto X_m(s) \text{ est croissante sur } [0, t_*] \text{ et est minorée par } Y.$$

En effet, supposons que la fonction n'est pas minorée par Y partout, et trouvons le premier temps s_1 tel que que $X_m(s_1) = Y$. Par (7.8), $s_1 > 0$. Donc $\frac{d}{ds} X_m(s)|_{s=s_1} \leq 0$, et ceci contredit (7.10). Comme $X_m > Y$, alors $s \mapsto X_m(s)$ est croissante par (7.10).

Par (7.11), (7.9) et (7.10), nous avons pour tout $s \in [0, t_*]$:

$$\frac{d}{dt} X_m(s) \geq -B'_m + C_{m3}^{\frac{2m}{2m+1}} X_m(s)^{\frac{2m}{2m-1}} K_m(\beta) \geq \frac{1}{2} C_{m3}^{\frac{2m}{2m+1}} X_m(s)^{\frac{2m}{2m-1}} K_m(\beta),$$

si $\beta_0 \gg 1$. Cette dernière inégalité implique que

$$\frac{d}{dt} \left(X_m(s)^{\frac{-1}{2m-1}} \right) \leq -\frac{C_{m3}^{\frac{2m}{2m+1}}}{2(2m-1)} K_m(\beta) =: -C_{m4} K_m(\beta).$$

En intégrant cette dernière relation en temps entre 0 et s et de (7.11), on a

$$X_m(s)^{\frac{-1}{2m-1}} \leq -C_{m4} K_m(\beta) s + X_m(0)^{\frac{-1}{2m-1}} \leq -C_{m4} K_m(\beta) s + \beta^{\frac{-1}{2m-1}} \nu.$$

Comme $\nu \leq 1$, d'ici, nous pouvons trouver un $s' \in (0, t_*]$ tel que $X_m(s')^{\frac{-1}{2m-1}} = 0$, si $\beta_0 \gg 1$. D'où la contradiction, car $X_m(s')^{\frac{-1}{2m-1}} > 0$. Donc, (7.8) est fautive si β est suffisamment grand. D'ici nous obtenons (7.2) avec $C_m = \beta$, si $u_0 \in H^m$.

ii) Supposons que $u_0 \in H^1$. Alors il existe une suite $\{u_0^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset H^m$ qui converge fortement vers u_0 dans H^1 . Par le théorème 3.3, la solution $u(t, u_0^j)$ converge fortement dans H^1 vers la

solution $u(t; u_0)$ pour tout $0 \leq t \leq T$. Par i), la relation (7.2) est déjà vérifiée pour les solution $u(t, u_0^j)$. Pour $N \in \mathbb{N}$, notons par Π_N le *projecteur de Galerkin* tel que

$$\Pi_N(u(x)) = \sum_{|s| \leq N} u_s e_s(x),$$

et considérons la fonction $f_N(u) = f(\Pi_N(u)) \wedge N$, $f(u) = \|u\|_m^2$. Alors :

- a) $f_N \in \mathcal{C}_b(H^1)$ et $f_N \geq 0$,
- b) $f_N(u) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(u) \leq \infty$, pour tout $u \in H^1$.

Par i), a) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\mathbb{E}[f_N(u(t; u_0))] = \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f_N(u(t; u_0^j))] \leq c'_m \nu^{-(2m-1)}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

De cette relation, de b) et le lemme de Fatou, nous obtenons

$$\mathbb{E}[\|u(t; u_0)\|_m^2] \leq \liminf_N \mathbb{E}[f_N(u(t; u_0))] \leq c'_m \nu^{-(2m-1)}.$$

iii) La démonstration du théorème est complète, si $m \in \mathbb{N}^*$. Maintenant, on suppose que $m \geq 1$ et $m \notin \mathbb{N}^*$. Alors, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ et $s \in (0, 1)$ tel que $m = j + s$ et $\lceil m \rceil = j + 1$. Par l'inégalité d'interpolation et celle de Hölder, nous avons

$$\mathbb{E}[\|u\|_m^2] \leq \mathbb{E}[\|u\|_{j+1}^2]^s \mathbb{E}[\|u\|_j^{2(1-s)}].$$

Comme (7.2) est établie pour $m = j$ et $m = j + 1$, alors le terme de droite de cette inégalité est majoré par $C_m \nu^{-((2[j+1]-1)s + [2j-1](1-s))} = C_m \nu^{-(2m-1)}$.

iv) Il reste à justifier l'application de la formule de Itô (7.1). D'abord, soit $u_0 \in H^{m+2}$ et $B_{m+2} < \infty$. Soit $\{u^N, N \geq 1\}$ les approximations de Galerkin pour u . Elles convergent faiblement vers u dans l'espace X_{m+2}^T et fortement dans X_{m+1}^T , pour chaque ω (cf. preuve du théorème 3.1). Considérons l'équation satisfaite par u^N :

$$(7.12) \quad \partial_t u^N + \Pi_N(u^N u_x^N) - \nu u_{xx} = \partial_t \Pi_N \xi^\omega.$$

C'est une équation stochastique dans \mathbb{R}^{2N} telle que l'équation libre qui lui est associée possède une fonction de Lyapunov quadratique $\|u^N\|^2$. Alors, la formule d'Itô appliquée à (7.12) avec la fonctionnelle quadratique $f(u) = \|u\|_m^2$ implique la relation (7.3) avec $u = u^N$ et B'_m remplacé par $\sum_{|s| \leq N} b_s^2 (2\pi s)^{2m}$, voir [18].

Utilisant le lemme de Fatou, nous passons à la limite dans (7.12) et obtenons (7.2) si $u_0 \in H^{m+2}$ et $B_{m+2} < \infty$.

Finalement, si $u_0 \in H^1$ et $B_m < \infty$ alors, nous approchons u_0 par $\{u_0^j\} \subset H^{m+2}$, et la suite $\{b_s\}$ par les suites $\{b_s^j\}$ de sorte que $B_{m+2} < \infty$, obtenant ainsi la relation (7.2) pour les solutions $u(t; u_0^j)$, puis nous passons à la limite $j \rightarrow +\infty$ (cf. ii)) pour obtenir le résultat. \square

Par le théorème 7.1,

$$(7.13) \quad \text{si } B_4, B_{\lceil m \rceil} < \infty, m \geq 1, u_0 \in H^1 \text{ et } t > 0, \text{ alors } \mathbb{P}(u(t, u_0) \in H^m) = 1.$$

Corollaire 7.1. *Dans les conditions du théorème 7.1, pour tout $m, k \geq 1$, il existe $C(k, m, \theta) > 0$ tel que*

$$(7.14) \quad \mathbb{E}[\|u(t)\|_m^k] \leq C \nu^{-\frac{k}{2}(2m-1)}, \quad \forall t \geq \theta.$$

Démonstration. i) Fixons d'abord $m, s \in \mathbb{N}^*$ tel que $s > m$, et $k \geq 1$. Du lemme 3.2, nous avons

$$\mathbb{E}[\|u(t)\|_m^k] \leq C \mathbb{E} \left[\|u(t)\|_s^{k\lambda_m(s)} |u(t)|_\infty^{k(1-\lambda_m(s))} \right],$$

où $C = C(m, k, s) > 0$ et $\lambda_m(s) < 1$. Par l'inégalité de Hölder, le terme de droite est borné par

$$C' \mathbb{E}[\|u(t)\|_s^{2k\lambda_m(s)}] \mathbb{E}[|u(t)|_\infty^a]^b,$$

avec $C'(m, k, s), a(m, k, s), b(m, k, s) > 0$. D'ici et utilisant (7.2), nous obtenons (7.14).

ii) Si m n'est pas un entier, alors nous raisonnons comme dans l'étape iii) de la démonstration du théorème 7.1.

□

8. BALANCE DE L'ÉNERGIE ET ESTIMATIONS AU-DESSOUS

Si dans l'identité d'Itô (7.1) on prend $f(u(t)) = \frac{1}{2} \|u(t)\|^2$, alors pour tout $t \geq 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbb{E}[\|u(t)\|^2] + \nu \mathbb{E}[\|u(t)\|_1^2] = \frac{1}{2} B_0.$$

On intègre cette égalité entre $T \geq 1$ et $T + \sigma$ ($\sigma > 0$) :

$$(8.1) \quad \frac{1}{2} \mathbb{E}[\|u(T + \sigma)\|^2] - \frac{1}{2} \mathbb{E}[\|u(T)\|^2] + \nu \int_T^{T+\sigma} \mathbb{E}[\|u(s)\|_1^2] ds = \frac{\sigma}{2} B_0$$

La relation (8.1) est appelée *balance de l'énergie*. Le terme $\frac{1}{2} \mathbb{E}[\|u(t)\|^2]$ est appelé *l'énergie* de $u(t)$, et $\mathbb{E}[\|u(s)\|_1^2]$ est *le taux de dissipation de l'énergie*.

Le théorème suivant nous donne un encadrement du taux de dissipation de l'énergie.

Théorème 8.1. *Soit $B_4 < \infty$ et $u(t) = u(t; u_0)$, $u_0 \in H^1$. Alors, il existe $\sigma_0(B_0, B_4) > 0$ tel que pour tout $\sigma \geq \sigma_0$ et $T \geq 1$:*

$$\frac{1}{4} B_0 \leq \frac{\nu}{\sigma} \int_T^{T+\sigma} \mathbb{E}[\|u(s)\|_1^2] ds \leq \frac{3}{4} B_0,$$

uniformément en $0 < \nu \leq 1$.

Démonstration. Par la relation de Kolmogorov-Chapman (5.9) (avec $f(u) = \|u\|^2$) et le corollaire 4.1 avec $T = \theta = 1$ et $p = 2$, et en écrivant $t \geq 1$ comme $t = \tau + 1$, $\tau \geq 0$, nous avons

$$(8.2) \quad \mathbb{E}[\|u(t)\|^2] = \int_{H^1} f(u) \Sigma_{\tau+1}(u_0)(du) = \int_{H^1} \underbrace{\langle f(u), \Sigma_1(w) \rangle}_{= \mathbb{E}[\|u(1; w)\|^2]} \Sigma_{\tau}(u_0)(dw) \leq C(B_4).$$

Soit $\sigma \geq \frac{2C(B_4)}{B_0} =: \sigma_0$. Alors de (8.2), on obtient

$$\frac{1}{2\sigma} \mathbb{E}[\|u(T)\|^2] \leq \frac{1}{4} B_0, \quad \frac{1}{2\sigma} \mathbb{E}[\|u(T + \sigma)\|^2] \leq \frac{1}{4} B_0.$$

D'où le résultat par (8.1). □

Notation 8.1. *Soit $T \geq 1$ et $\sigma \geq \sigma_0$. Si $\xi^\omega(t)$ est un processus aléatoire réel, on pose*

$$\langle\langle \xi^\omega \rangle\rangle = \langle\langle \xi^\omega \rangle\rangle_{T, \sigma} = \frac{1}{\sigma} \int_T^{T+\sigma} \mathbb{E}[\xi^\omega(t)] dt.$$

Avec cette notation, l'inégalité du théorème 8.1 a pour expression

$$\frac{1}{4} B_0 \nu^{-1} \leq \langle\langle \|u\|_1^2 \rangle\rangle \leq \frac{3}{4} B_0 \nu^{-1}.$$

Le théorème suivant fournit un encadrement pour $\langle\langle \|u\|_m^2 \rangle\rangle$.

Théorème 8.2. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $B_m < \infty$, $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $T \geq 1$ et $u_0 \in H^1$. Il existe $C_m(\sigma_0) > 1$ tel que la solution $u = u(t; u_0)$ satisfait :*

$$(8.3) \quad C_m^{-1} \nu^{-(2m-1)} \leq \langle\langle \|u\|_m^2 \rangle\rangle \leq C_m \nu^{-(2m-1)},$$

uniformément en $0 < \nu \leq 1$.

Démonstration. L'inégalité à droite de (8.3) suit du théorème 7.1, et pour $m = 1$, l'inégalité à gauche est déjà établie. Maintenant, soit $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$. Par l'inégalité (3.2), on a

$$\|u_x\| \leq c \|u_x\|_{\frac{2m-1}{m-1}}^{\frac{1}{2m-1}} \|u_x\|_1^{\frac{2m-2}{2m-1}}, \quad c > 0.$$

D'ici et l'inégalité de Hölder (appliquée à l'intégrale $\frac{1}{\sigma} \int_\Omega \int_T^{T+\sigma} \dots dt \mathbb{P}(d\omega)$) et le corollaire 4.1, nous avons

$$\langle\langle \|u\|_1^2 \rangle\rangle \leq c \langle\langle \|u\|_m^2 \rangle\rangle^{\frac{1}{2m-1}} \langle\langle \|u_x\|_1^2 \rangle\rangle^{\frac{2m-2}{2m-1}} \leq C_m \langle\langle \|u\|_m^2 \rangle\rangle^{\frac{1}{2m-1}}.$$

Le :

$$\langle\langle \|u\|_m^2 \rangle\rangle \geq C_m^{1-2m} \langle\langle \|u\|_1^2 \rangle\rangle^{2m-1}.$$

D'ici et des théorèmes 7.1 et 8.1, on obtient (8.3). \square

Corollaire 8.1. *Dans les conditions du théorème précédent, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \geq 1$, il existe $C(k, m, \sigma_0) > 0$ tel que*

$$(8.4) \quad C^{-1} \nu^{-m+\frac{1}{2}} \leq \langle\langle \|u\|_m^k \rangle\rangle^{\frac{1}{k}} \leq C \nu^{-m+\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Après moyennisation de (7.14), l'inégalité à droite de (8.4) est immédiate. Si $k \geq 2$, alors l'inégalité à gauche est une conséquence de l'inégalité de Hölder et de (8.3). Maintenant, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\langle\langle \|u\|_m^2 \rangle\rangle = \langle\langle \|u\|_m^{\frac{2}{3}} \|u\|_m^{\frac{4}{3}} \rangle\rangle \leq \langle\langle \|u\|_m \rangle\rangle^{\frac{2}{3}} \langle\langle \|u\|_m^4 \rangle\rangle^{\frac{1}{3}}.$$

Alors, par (8.4) avec $k = 2$ et $k = 4$,

$$\langle\langle \|u\|_m \rangle\rangle \geq \langle\langle \|u\|_m^2 \rangle\rangle^{\frac{3}{2}} \langle\langle \|u\|_m^4 \rangle\rangle^{-\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{\nu^{-m+\frac{1}{2}}}{C(2, m, \sigma_0)} \right)^3 \left(C(4, m, \sigma_0) \nu^{-m+\frac{1}{2}} \right)^{-2} =: C^{-1} \nu^{-m+\frac{1}{2}},$$

et (8.4) est établi pour $k = 1$. Finalement, pour $k \in (1, 2)$, l'inégalité à gauche de (8.4) est une conséquence de celle avec $k = 1$ et l'inégalité de Hölder. \square

Considérons l'espace de probabilité

$$(Q, \mathcal{T}, \rho) := \left([T, T + \sigma] \times \Omega, \mathcal{L} \times \mathcal{F}, \frac{dt}{\sigma} \times \mathbb{P} \right),$$

où $\sigma \geq \sigma_0$, $T \geq 1$, et \mathcal{L} est la tribu Borélienne sur $[T, T + \sigma]$. Avec cette notation, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 8.2. *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha(m, \sigma_0), C(m, \sigma_0) > 0$ tel que*

$$(8.5) \quad \rho_{\nu, m} := \rho \left(\alpha \nu^{-m+\frac{1}{2}} \leq \|u^\omega(t)\|_m \leq \alpha^{-1} \nu^{-m+\frac{1}{2}} \right) \geq C(m, \sigma_0),$$

uniformément en $0 < \nu \leq 1$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $Y_\varepsilon = \{(t, \omega) \in Q : \|u^\omega(t)\|_m \leq \varepsilon\}$. Le corollaire 8.1 (avec $k = 1$ et $k = 2$) implique que

$$\begin{aligned} C(1, m, \sigma_0)^{-1} \nu^{-m+\frac{1}{2}} &\leq \int_{Y_\varepsilon} \|u^\omega(t)\|_m d\rho + \int_{Q \setminus Y_\varepsilon} \|u^\omega(t)\|_m d\rho \\ &\leq \varepsilon + \left(\int_Q \|u^\omega(t)\|_m^2 d\rho \right)^{\frac{1}{2}} (\rho(Q \setminus Y_\varepsilon))^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon + C(2, m, \sigma_0) \nu^{-m+\frac{1}{2}} (\rho(Q \setminus Y_\varepsilon))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon = \varepsilon_\nu = \frac{1}{2} C(1, m, \sigma_0)^{-1} \nu^{-m+\frac{1}{2}}$, et on note par $Y = Y_{\varepsilon_\nu}$. Alors

$$(8.6) \quad \rho(\|u^\omega(t)\|_m > \varepsilon_\nu) = \rho(Q \setminus Y) \geq \left(\frac{1}{2} (C(1, m, \sigma_0) C(2, m, \sigma_0))^{-1} \right)^2 := C'_m.$$

Soit $\alpha^{-1} \geq 2C(1, m, \sigma_0)$. De (8.6), (8.4) (avec $k = 1$) et de l'inégalité de Tchebychev, nous avons

$$\rho_{\nu, m} = \rho \left(\|u^\omega(t)\|_m \geq \alpha \nu^{-m+\frac{1}{2}} \right) - \rho \left(\|u^\omega(t)\|_m \geq \alpha^{-1} \nu^{-m+\frac{1}{2}} \right) \geq C'_m - \alpha C(1, m, \sigma_0).$$

Maintenant, on choisit α de sorte que le membre de droite soit strictement positif, ce qui implique (8.5). \square

9. ÉCHELLE D'ESPACE

Soit u^ν une fonction dérivable sur \mathbb{S}^1 de moyenne nulle, dépendant du paramètre $\nu \in (0, 1]$. Notons par $M := |u^\nu|_\infty$. Soit $\gamma \geq 0$. En physique, on dit que l'échelle d'espace de u^ν est égale à ν^γ , s'il existe des points $y \in \mathbb{S}^1$, tels que les incréments $u(y + \nu^\gamma) - u(y)$ de u sont de l'ordre de M , et pour tout $\gamma' > \gamma$, $u(y + \nu^{\gamma'}) - u(y)$ est toujours très petit par rapport à M .

Soit v une fonction tel que $v(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} \widehat{v}_s e^{2i\pi s x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$, non identiquement nulle. On considère la fonction périodique $u^\nu(x) = v(x \lceil \nu^{-\gamma} \rceil)$, $\gamma \geq 0$, où $\lceil \cdot \rceil$ est la fonction *partie entière par excès*. Il est facile de vérifier que l'échelle d'espace de u^ν est égale à ν^γ . Notons par \widehat{u}_s^ν , $s \in \mathbb{Z}^*$, les coefficient de Fourier de u^ν dans l'écriture exponentielle, et soit $k_s := \frac{s}{\lceil \nu^{-\gamma} \rceil}$. Alors, pour tout $s \in \mathbb{Z}^*$: $\widehat{u}_s^\nu = \widehat{v}_{k_s} \chi_{\{k_s \in \mathbb{Z}^*\}}$, où $\chi_{\{k_s \in \mathbb{Z}^*\}}$ est la fonction indicatrice de $\{k_s \in \mathbb{Z}^*\}$.

Écrivons le *nombre d'onde* s pour $u^\nu(x)$ en utilisant l'échelle logarithmique à base ν^{-1} :

$$s = s_\nu(\alpha) = \lceil \nu^{-\alpha} \rceil, \quad \alpha > 0,$$

alors $\alpha = \alpha(s)$ est de l'ordre $\frac{\ln s}{\ln \nu^{-1}}$. Soit $\gamma_0 > \gamma$. Comme $v \in \mathcal{C}^\infty$, alors il est facile de vérifier que

$$(9.1) \quad \text{si } \alpha \geq \gamma_0 \text{ et } s = s_\nu(\alpha), \text{ alors } \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists C_N > 0 \text{ tel que } |\widehat{u}_{s_\nu(\alpha)}^\nu| \leq C_N |s_\nu(\alpha)|^{-N},$$

pour chaque ν , et C_N ne dépend pas de ν (mais dépend a priori de γ_0).

De plus, nous avons aussi

$$(9.2) \quad \text{si } \gamma_0 < \gamma \text{ alors (9.1) n'est pas valide pour tout } 0 < \nu \leq 1.$$

Pour vérifier (9.2), on peut choisir $\alpha = \gamma$.

Cette discussion motive la définition suivante

Définition 9.1. *Soit $0 < \nu \leq 1$ et*

$$(9.3) \quad u^\nu(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^*} \widehat{u}_s^\nu e^{2i\pi s x} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1).$$

- (1) *Alors, l'échelle d'espace de u^ν est égale à ν^γ , $\gamma \geq 0$, si*
 - i) *(9.1) est satisfaite pour tout $\gamma_0 > \gamma$.*
 - ii) *(9.2) est satisfaite pour tout $\gamma_0 \in [0, \gamma)$, si $\gamma > 0$.*
- (2) *Soit $t \geq 0$, $x \in \mathbb{S}^1$, $\omega \in \Omega$ et $u^{\nu\omega}(t, x)$ un champ aléatoire continue en temps t , \mathcal{C}^1 en espace x , et de valeur moyenne nulle. On représente $u^{\nu\omega}$ comme dans (9.3) avec $\widehat{u}_s^\nu = \widehat{u}_s^{\nu\omega}(t)$. Alors l'échelle d'espace de $u^{\nu\omega}$ est égale à ν^γ , $\gamma \geq 0$, si les conditions i) et ii) sont vérifiées avec $|\widehat{u}_s^\nu|$ remplacé par $\langle\langle |\widehat{u}_s^\nu|^2 \rangle\rangle^{\frac{1}{2}}$.*

Soit $u(t, x)$ une solution de (B) représentée par sa série de Fourier (9.3) avec $\widehat{u}_s = \widehat{u}_s^{\nu\omega}(t)$, cf. (1.2). Par conséquent,

$$\|u\|_m^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{u}_k(t)|^2 k^{2m}.$$

Comme $\widehat{u}_k = \int_{\mathbb{S}^1} u(x) e^{-2i\pi k x}$, alors par une intégration par partie, nous trouvons que

$$|\widehat{u}_k(t)| \leq \frac{1}{2\pi k} |u_x|_1, \quad k \geq 1.$$

D'ici et le corollaire 4.1, on a

$$(9.4) \quad \mathbb{E}[|\widehat{u}_k(t)|^2] \leq C k^{-2}, \quad t \geq 1.$$

Théorème 9.1. *Supposons que $B_m < \infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour chaque $u_0 \in H^1$, l'échelle d'espace de $u = u(t; u_0)$ est égale à ν . C'est à dire, que pour tout $\gamma_0 > 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$:*

$$(9.5) \quad \langle\langle |\widehat{u}_k|^2 \rangle\rangle \leq C_N k^{-N}, \quad \text{si } k = \lceil \nu^{-\gamma} \rceil, \quad \gamma > \gamma_0, \quad \nu \in (0, 1],$$

où $C_N = C_N(\gamma_0) > 0$ ne dépend pas de ν . Par contre, si $\gamma_0 < 1$, alors (9.5) n'est pas vrai pour tout $\gamma \geq \gamma_0$ et $\nu \in (0, 1]$, avec une certaine constante $C_N = C_N(\gamma_0) > 0$.

Démonstration. Par le théorème 8.2 on peut écrire

$$\langle\langle |\widehat{u}_k|^2 \rangle\rangle \leq C_m \nu (k\nu)^{-2m}.$$

Si $k = k_\nu = \lceil \nu^{-\gamma} \rceil$, $\gamma \geq \gamma_0 > 1$, nous obtenons que

$$\langle\langle |\widehat{u}_k|^2 \rangle\rangle \leq C_m \nu (\nu^{1-\gamma})^{-2m} \leq C_m k^{-2m \frac{\gamma_0-1}{\gamma_0}}, \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*,$$

d'où (9.5). Maintenant, supposons (9.5) avec $\gamma_0 < 1$ et écrivons $\langle\langle \|u\|_m^2 \rangle\rangle$ comme :

$$\langle\langle \|u\|_m^2 \rangle\rangle = 2 \underbrace{\sum_{1 \leq k \leq \nu^{-\gamma_0}} \langle\langle |\widehat{u}_k|^2 \rangle\rangle k^{2m}}_{=:J} + 2 \underbrace{\sum_{k > \nu^{-\gamma_0}} \langle\langle |\widehat{u}_k|^2 \rangle\rangle k^{2m}}_{=:L}.$$

Majorons les deux termes du membre à droite. Soit $k > \nu^{-\gamma_0}$. Alors, nous pouvons écrire $k = \lceil \nu^{-\gamma} \rceil$, $\gamma \geq \gamma_0$. La relation (9.5) implique $\langle\langle |\widehat{u}_k|^2 \rangle\rangle \leq C_N(\gamma_0) k^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Choisissons, $N = 2m + 2$, nous avons

$$L \leq C(\gamma_0) \sum_{k > \nu^{-\gamma_0}} k^{-2} \leq C'(\gamma_0) \nu^{\gamma_0}.$$

Aussi, par le théorème 8.2 :

$$J \leq \nu^{-2\gamma_0} \sum_{1 \leq k < \nu^{-\gamma_0}} (k)^{2m-2} \langle\langle |\widehat{u}_k|^2 \rangle\rangle \leq \nu^{-2\gamma_0} \langle\langle \|u\|_{m-1}^2 \rangle\rangle \leq c \nu^{-2m-2\gamma_0+3}.$$

D'ici,

$$(9.6) \quad \langle\langle \|u\|_m^2 \rangle\rangle \leq C_m(\gamma_0) \nu^{-2m-2\gamma_0+3}, \quad \nu \in (0, 1].$$

Par le théorème 8.2 et la relation (9.6) on a pour tout $1 \geq \nu > 0$: $c_m \nu^{-(2m-1)} \leq C_m(\gamma_0) \nu^{-2m-2\gamma_0+3}$, ceci implique que $\gamma_0 \geq 1$. La contradiction implique que $\gamma_0 \geq 1$. \square

10. LEMMES DE RÉCURRENCE ET L^1 -CONTRACTION

On rappelle que nous supposons $B_4 < \infty$.

Lemme 10.1. *Soit $B_m < \infty$, $m \geq 1$ et $T > 0$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\gamma_{\epsilon, T} > 0$ tel que $\mathbb{P}(\|\xi\|_{X_m^T} < \epsilon) \geq \gamma_{\epsilon, T}$.*

C'est un résultat classique des mesures Gaussiennes dans les espaces de Banach [6, théorème 3.6.1], [20, section 2, corollaire 1.1].

Lemme 10.2. *Soit u_0 dans H^1 . Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T_\epsilon = T_\epsilon(\|u_0\|_1) > 0$ et $\delta_\epsilon = \delta_\epsilon(\|u_0\|_1) > 0$ tel que*

$$(10.1) \quad \mathbb{P}(\|u(T_\epsilon; u_0)\| < \epsilon) \geq \delta_\epsilon.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\xi = 0$, $u_0 \in H^1$ et notons $u^0(t)$ la solution correspondante. On multiplie par u^0 l'équation dans (B) et on intègre par parties en espace, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^0(t)\|^2 = -\nu \|u_x^0(t)\|^2 \leq -\nu \|u^0(t)\|^2.$$

D'ici et le lemme de Gronwall, nous obtenons que $\|u^0(t)\|^2 \leq e^{-2\nu t} \|u_0\|^2$. Donc il existe un $T_\epsilon = T_\epsilon(\|u_0\|) > 0$ tel que $\|u^0(T_\epsilon)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Par la proposition 3.1, l'application \mathcal{M} est Lipschitzienne sur les sous ensembles bornés de $H^1 \times X_1^{T_\epsilon}$. Par conséquent, il existe $\gamma_\epsilon = \gamma_\epsilon(\|u_0\|_1) > 0$ tel que si $\|\xi\|_{X_1^T} \leq \gamma_\epsilon$ alors $\|u^0(T_\epsilon) - \mathcal{M}(u_0, \xi)(T_\epsilon)\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$. Ceci implique que si $\|\xi\|_{X_1^T} \leq \gamma_\epsilon$ alors $\|\mathcal{M}(u_0, \xi)(T_\epsilon)\| < \epsilon$, et par le lemme 10.1 avec $m = 1$, on a $\mathbb{P}(\|\xi\|_{X_1^T} \leq \gamma_\epsilon) =: \delta_\epsilon > 0$. D'où (10.1). \square

Lemme 10.3. *(Récurrence)*

Pour tout u_0 dans H^1 et $\epsilon > 0$, on a

$$(10.2) \quad \pi(T, \epsilon) := \mathbb{P}\left(\inf_{t \in [0, T[} \|u(t; u_0)\| \geq \epsilon\right) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0,$$

où la convergence est uniforme en u_0 .

Dans la suite on note par $B_m^R(v) = \{u : \|u - v\|_m \leq R\}$.

Démonstration. Par l'inégalité de Tchebychev et le corollaire 4.1, on a pour une constante $c_0 > 0$ et pour tout $R > 0$: $\mathbb{P}(\|u(1; u_0)\| \geq R) \leq c_0^{-1}R$. Si $R = 2c_0$, alors $\mathbb{P}(\|u(1; u_0)\| \leq R) \geq \frac{1}{2}$.

Par la relation de Kolmogorov-Chapman (5.8) appliquée à la fonction caractéristique de $B_0^\varepsilon(0)$, et par (10.1), nous avons que

$$\mathbb{P}(\|u(1 + T_\varepsilon; u_0)\| < \varepsilon) \geq \int_{B_0^R(0)} \mathbb{P}(\|u(T_\varepsilon; v)\| < \varepsilon) \Sigma_1(u_0)(dv) \geq \frac{1}{2} \delta_\varepsilon, \quad \forall u_0 \in H^1.$$

Alors

$$(10.3) \quad \mathbb{P}(\|u(1 + T_\varepsilon; u_0)\| \geq \varepsilon) \leq 1 - \frac{1}{2} \delta_\varepsilon, \quad \forall u_0 \in H^1.$$

On note par $T^j = j(1 + T_\varepsilon)$, par Q_j l'évènement $\{\|u(T^j)\| \geq \varepsilon\}$ et par $Q^N = \bigcap_{i=1}^N Q_i$. Nous avons que $Q^N = \{\omega \in Q^{N-1} : \|u(T^N)\| \geq \varepsilon\}$. Utilisant la relation de Kolmogorov-Chapman sous la forme (5.10), et par (10.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Q^N) &= \mathbb{E}[\chi_{\{u(\tau; u_0)|_{\tau \in [0, T^{N-1}]} \in Q^{N-1}\}} \mathbb{P}(\|u(1 + T_\varepsilon; u(T^{N-1}; u_0)\| \geq \varepsilon)] \\ &\leq (1 - \frac{1}{2} \delta_\varepsilon) \mathbb{E}[\chi_{\{u(\tau; u_0)|_{\tau \in [0, T^{N-1}]} \in Q^{N-1}\}}] = (1 - \frac{1}{2} \delta_\varepsilon) \mathbb{P}(Q^{N-1}). \end{aligned}$$

D'ici, nous avons par récurrence que $\mathbb{P}(Q^N) \leq (1 - \frac{1}{2} \delta_\varepsilon)^N$. Finalement, comme $\pi(T, \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Q^N)$ si $T \geq T^N$, nous obtenons (10.2) en passant à la limite $N \rightarrow +\infty$. \square

Lemme 10.4. (*L₁-contraction*)

Pour $j = 1, 2$, fixons $u_j(0) \in H^1$, et soit $\xi \in X_1^T$. Considérons la solution $u_j(t) = u(t; u_j(0)) \in H^1$ correspondante à ξ . Alors

$$|u_1(t) - u_2(t)|_1 \leq |u_1(0) - u_2(0)|_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Soit $w = u_1 - u_2$. Alors w vérifie

$$(10.4) \quad \begin{cases} w_t + \frac{1}{2}(w(u_1 + u_2))_x - \nu w_{xx} = 0, \\ w(0) = u_1(0) - u_2(0) =: w_0. \end{cases}$$

Soit le problème de Cauchy conjugué :

$$(10.5) \quad \begin{cases} \phi_t + \frac{1}{2}(u_1 + u_2)\phi_x + \nu\phi_{xx} = 0, \\ \xi(T, x) = \xi_T(x), \end{cases}$$

où $t \in [0, T]$, $\phi_T(x) \in \mathcal{C}^0$ et $|\phi_T|_\infty = 1$. La théorie des équations parabolique implique qu'il existe une unique solution ϕ au problème (10.5), et cette solution satisfait le principe du maximum : $|\phi(t)|_\infty \leq 1$ pour tout $t \geq 0$ [12].

Après avoir multiplié par ϕ l'équation en w dans (10.4), intégré par parties sur $[0, T] \times \mathbb{S}^1$ puis en utilisant l'équation en ϕ dans (10.5), on obtient que $|\langle w(T), \phi_T \rangle| = |\langle w_0, \phi(0) \rangle|$. D'ici, et car $|\phi(0)|_\infty \leq 1$, nous avons

$$(10.6) \quad |\langle w(T), \phi_T \rangle| \leq |w_0|_1 =: K.$$

Si χ_ε est la fonction définie par

$$\chi_\varepsilon(t) = \begin{cases} -1, & t \leq -\varepsilon, \\ \frac{1}{\varepsilon}t, & -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon, \\ 1, & t \geq \varepsilon, \end{cases}$$

alors $\chi_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \text{sgn}(t)$ pour chaque t , et si $\phi_T^\varepsilon = \chi_\varepsilon(w(T, x))$, alors ϕ_T^ε est continue et $|\phi_T^\varepsilon|_\infty = 1$.

Donc, de (10.6) et du théorème de convergence dominé, nous avons

$$|w(T)|_1 = \left| \int w(T, x) \text{sgn}(w(T, x)) dx \right| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int w(T, x) \phi_T^\varepsilon(x) dx \right| \leq K.$$

\square

11. LES MESURES STATIONNAIRES ET LA MÉTHODE DE BOGOLIUBOV-KRYLOV

On rappelle que nous supposons $B_4 < \infty$.

Définition 11.1. Soit $\mu \in \mathcal{P}(H^m)$, $m \geq 1$.

- (1) μ est dite mesure stationnaire de (B) si pour tout $t \geq 0$: $S_t^* \mu = \mu$. I.e si $\mathcal{D}(u_0) = \mu$ alors $\mathcal{D}(u(t; u_0)) \equiv \mu$.
- (2) Une solution $u(t)$ de (B) telle que $\mathcal{D}(u(t; u_0)) \equiv \mu$ est dite solution stationnaire.

Le but de cette section est de démontrer l'existence d'une mesure stationnaire de (B), (1.3), (3.1) par la méthode de Bogoliubov-Krylov.

Théorème 11.1. Il existe une mesure stationnaire $\mu \in \mathcal{P}(H^1)$.

Démonstration. On note par $u(t) = u(t; 0)$ la solution de (B) issue de $u_0 = 0$, et par $\mu(t) := \mathcal{D}(u(t))$. Notons que $S_\theta^*(\mu(t)) = \mathcal{D}(u(t + \theta)) = \mu(t + \theta)$ pour tout $t, \theta \geq 0$.

Considérons l'ansatz de Bogoliubov-Krylov. I.e, pour tout $T \geq 1$ définissons $m_T \in \mathcal{P}(H^2)$ par

$$m_T(\cdot) = \frac{1}{T} \int_1^{1+T} \mu(s)(\cdot) ds.$$

Par le théorème 7.1 (avec $m = 2$), on sait qu'il existe une constante $C > 0$ tel que $\mathbb{E}[\|u(t)\|_2^2] < C$ pour chaque $t \geq 1$. L'inégalité de Tchebychev implique que $\mu(t)(B_2^R(0)) = \mathbb{P}(\|u(t)\|_2 \leq R) \geq 1 - CR^{-1}$ si $t \geq 1$. D'ici, nous avons

$$(11.1) \quad m_T(B_2^R(0)) = \frac{1}{T} \int_1^{1+T} \mu(s)(B_2^R(0)) ds \geq 1 - \frac{C}{R}, \quad \forall R > 0.$$

De plus, par le théorème de Rellich-Kondrachev, $B_2^R(0)$ est compact dans H^1 . D'ici et de (11.1), nous obtenons que l'ensemble $M = \{m_T\}$ est tendu dans $\mathcal{P}(H^1)$. Par le théorème 6.3, cet ensemble est faiblement relativement compact. Donc la suite $\{m_1, m_2, \dots\} \subset M$ admet une sous suite $\{m_{j_k}\}$ qui converge faiblement vers une limite $\mu \in \mathcal{P}(H^1)$.

Il reste à prouver que μ est stationnaire. Calculons $S_\theta^*(m_{j_k})$, pour tout $\theta > 0$. Comme S_t^* est linéaire et vérifie $S_\theta^*(\mu(t)) = \mu(t + \theta)$, nous avons

$$\begin{aligned} S_\theta^*(m_{j_k}) &= \frac{1}{j_k} \int_1^{1+j_k} S_\theta^*(\mu(t)) dt = \frac{1}{j_k} \int_1^{1+j_k} \mu(t + \theta) dt = \frac{1}{j_k} \int_{1+\theta}^{1+j_k+\theta} \mu(t) dt \\ &= \underbrace{-\frac{1}{j_k} \int_1^{1+\theta} \mu(t) dt}_{:=I} + \underbrace{\frac{1}{j_k} \int_1^{j_k+1} \mu(t) dt}_{:=m_{j_k}} + \underbrace{\frac{1}{j_k} \int_{j_k+1}^{1+j_k+\theta} \mu(t) dt}_{:=K}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(H^1)$, les termes $|\langle K, f \rangle|$ et $|\langle I, f \rangle|$ sont bornés par $\frac{1}{j_k} |f|_\infty \theta$ et $\lim_{j_k \rightarrow +\infty} |\langle I, f \rangle| = \lim_{j_k \rightarrow +\infty} |\langle K, f \rangle| = 0$. De plus, comme $m_{j_k} \rightharpoonup \mu$ et S_θ^* est faiblement continue (cf. théorème 6.2), passant à la limite dans l'égalité ci dessus, on a finalement $S_\theta^* \mu = \mu$. \square

La mesure stationnaire du théorème 11.1, est aussi lisse que la force η^ω dans (B) :

Proposition 11.1. Soit $B_m < \infty$, $m \geq 1$. Alors la mesure stationnaire μ est supportée par l'espace H^m : $\mu(H^m) = 1$.

Démonstration. Si $B_m < \infty$ alors par (7.13), $\mu(s)(H^m) = 1$ pour tout $s > 0$, et $m_T(H^m) = 1$ pour tout $T \geq 1$. Comme H^m est un sous ensemble fermé de H^1 et $m_{j_k} \rightharpoonup \mu$ dans H^1 , alors $\mu(H^m) = 1$ (cf. (6.1)). \square

Plus particulièrement, nous avons aussi le

Corollaire 11.1. Si $B_m < \infty$ pour tout $m \geq 1$, alors $\mu(\mathcal{C}^\infty) = 1$.

12. L'UNICITÉ D'UNE MESURE STATIONNAIRE ET LA PROPRIÉTÉ DE MÉLANGE

On renvoie à [23, p.101-103], pour le cadre classique du *couplage de Döblin*. Il est remarquable que le couplage de Döblin s'applique à l'équation de Burgers avec des modifications minimales; nous expliquerons cela dans cette section. Par contre, pour les équations aux dérivées partielles stochastiques plus complexes, l'idée de Döblin est plus délicate à appliquer; elle s'emploie avec des modifications plus profonde [23, Section 3].

Nous supposons toujours que $B_4 < \infty$. Considérons deux copies d'équation de Burgers de conditions initiales $u', u'' \in H^1$. I.e

$$(12.1) \quad \begin{cases} (u_1)_t + u_1(u_1)_x - \nu(u_1)_{xx} = \eta^1, & u_1(0) = u', \\ (u_2)_t + u_2(u_2)_x - \nu(u_2)_{xx} = \eta^2, & u_2(0) = u'', \end{cases}$$

avec η^1, η^2 des bruits blanc indépendants et de même loi que η . Supposons que u' et u'' sont des variables aléatoires indépendantes et indépendantes de η^1 et η^2 . Comme $u_1 = M(u', \eta^1)$ et $u_2 = M(u'', \eta^2)$ alors $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont des processus aléatoires indépendantes. Posons

$$(12.2) \quad U(t) = (u_1(t), u_2(t))$$

et $U(0) = (u', u'') =: U_0$. Alors, $\mathcal{D}(U(t)) = \mathcal{D}(u_1(t)) \times \mathcal{D}(u_2(t))$. On dit que la mesure $\mathcal{D}(U(t)) \in \mathcal{P}(H^1 \times H^1)$ est un *couplage indépendant* des mesures $\mathcal{D}(u_i(t)) \in \mathcal{P}(H^1)$, $i = 1, 2$.

En répétant le schéma de la démonstration du lemme 10.3, nous avons le

Lemme 12.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et $U_0 \in H^1 \times H^1$: $\mathbb{P}(\inf_{t \in [0, T]} \|U(t)\| \geq \varepsilon) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, uniformément en U_0 .*

Lemme 12.2. *Soit $m \geq 1$. Il existe $C(\nu) > 0$ telle que si $u', u'' \in H^1$ et $|u'|_1, |u''|_1 \leq \frac{1}{m}$, alors pour tout $t \geq 1$, on a : $\|\Sigma_t(u') - \Sigma_t(u'')\|_{L(H^1)}^* \leq Cm^{-\frac{2}{5}}$.*

Démonstration. Par l'inégalité (3.2), nous avons pour tout $j = 1, 2$:

$$\|u_j(t)\|_1 \leq c|u_j(t)|_1^\theta \|u_j(t)\|_2^{1-\theta}, \quad \theta = \frac{2}{5}, \quad c > 0.$$

Donc, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(H^1)$ tel que $\|f\|_{L(H^1)} \leq 1$, on a

$$(12.3) \quad \begin{aligned} \left| \langle \Sigma_t(u'), f \rangle - \langle \Sigma_t(u''), f \rangle \right| &\leq \mathbb{E}[|u_1(t) - u_2(t)|_1] \\ &\leq c\mathbb{E}[|u_1(t) - u_2(t)|_1^\theta \|u_1(t) - u_2(t)\|_2^{1-\theta}]. \end{aligned}$$

Comme $|u_1(0) - u_2(0)|_1 \leq \frac{2}{m}$, alors $|u_1^\omega(t) - u_2^\omega(t)|_1 \leq \frac{2}{m}$ pour tout ω (voir lemme 10.4). De plus, $(\alpha - \beta)^{1-\theta} \leq \alpha^{1-\theta} + \beta^{1-\theta}$ pour tout $\alpha, \beta \geq 0$, alors le membre de droite de (12.3) est borné par

$$c\left(\frac{2}{m}\right)^\theta (\mathbb{E}[|u_1(t)|_2^{1-\theta}] + \mathbb{E}[|u_2(t)|_2^{1-\theta}]).$$

Par le théorème 7.1 et l'inégalité de Hölder, on a $\mathbb{E}[|u_j(t)|_2^{1-\theta}] \leq C_2(\nu^{-3})^{\frac{1-\theta}{2}}$, $j = 1, 2$ et $C_2 > 0$. Donc

$$|\langle \Sigma_t(u'), f \rangle - \langle \Sigma_t(u''), f \rangle| \leq C\nu^{-\frac{3}{2}(1-\theta)} m^{-\theta}, \quad \text{si } \|f\|_{L(H^1)} \leq 1,$$

et on obtient le résultat énoncé. \square

Proposition 12.1. *Pour tout $u', u'' \in H^1$,*

$$\|\Sigma_t(u') - \Sigma_t(u'')\|_{L(H^1)}^* \leq d_t^0, \quad \forall t \geq 0,$$

où $t \mapsto d_t^0$ est une fonction positive indépendante de u' et u'' , telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} d_t^0 = 0$.

Démonstration. On note $d_t(u', u'') = \|\Sigma_t(u') - \Sigma_t(u'')\|_{L(H^1)}^* = \sup_{\|f\|_{L^1} \leq 1} \langle \Sigma_t(u'), f \rangle - \langle \Sigma_t(u''), f \rangle$.

On a pour tout $f \in \mathcal{C}_b(H^1)$

$$\langle \Sigma_t(u'), f \rangle - \langle \Sigma_t(u''), f \rangle = \mathbb{E}[f(u_1(t)) - f(u_2(t))] = \mathbb{E}[F(U(t))] =: g(t; U_0).$$

où on a noté $f(u_1) - f(u_2)$ par $F(U)$, $U = (u_1, u_2)$. Donc d_t s'écrit comme $\sup_{\|f\|_L \leq 1} g(t; U_0)$ et $g(t; U_0) \leq d_t$. Soit $m \geq 1$ et $O_m = \{u \in H^1 : |u|_1 \leq \frac{1}{m}\}$. Considérons le temps d'atteinte pour $U^\omega(t)$ dans l'ensemble $O_m \times O_m$:

$$\tau_{m,t}^\omega = \inf\{s \in [0, t] : U^\omega(s) \in O_m \times O_m\} \quad (\text{cf. appendice B}).$$

i) Comme $|u_j|_1 \leq \|u_j\|$ pour tout $j = 1, 2$, le lemme 12.1 implique que $\mathbb{P}(\tau_{m,t} \geq t - 1)$ tend vers 0, uniformément en U_0 , quand t tend vers $+\infty$.

ii) Si $\tau_{m,t} < t$ alors $U(\tau_{m,t}) \in O_m \times O_m$.

iii) Comme $g(t; U_0) \leq d_t$, et utilisant le lemme 12.2, on a que si $U_0 \in O_m \times O_m$ alors $g(t; U_0) \leq Cm^{-\frac{2}{5}}$, $t \geq 1$. Par la propriété de Markov forte (16.1), $\mathbb{E}[F(U(t))] = \mathbb{E}[g(t - \tau_{m,t}; U(\tau_{m,t}))]$. D'ici

$$(12.4) \quad \mathbb{E}[F(U(t))] = \mathbb{E}[1_{\tau_{m,t} \leq t-1} g(t - \tau_{m,t}; U(\tau_{m,t}))] + \mathbb{E}[1_{\tau_{m,t} > t-1} g(t - \tau_{m,t}; U(\tau_{m,t}))].$$

Par ii) et iii), si $\tau_{m,t} \leq t - 1$ alors $U(\tau_{m,t}) \in O_m \times O_m$ et $g(t - \tau_{m,t}; U(\tau_{m,t})) \leq Cm^{-\frac{2}{5}}$. Comme $|F(U(t))| \leq 2$, alors (12.4) implique que

$$|\mathbb{E}[F(U(t))]| \leq Cm^{-\frac{2}{5}} + 2\mathbb{P}\{\tau_{m,t} > t - 1\} =: d_t^0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $m = m_\varepsilon$ de sorte que $Cm_\varepsilon^{-\frac{2}{5}} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Par i), nous avons $2\mathbb{P}\{\tau_{m,t} > t - 1\} \leq \frac{1}{4}\varepsilon$, si $t \geq t_{m_\varepsilon, \varepsilon}$. Finalement, $\mathbb{E}[F(U(t))] \leq \varepsilon$, pour tout $t \geq t_{m_\varepsilon, \varepsilon}$, et $d_t(u', u'') \leq d_t^0 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. \square

Théorème 12.1. *La mesure stationnaire μ donnée par le théorème 11.1 est unique. De plus, pour tout λ dans $\mathcal{P}(H^1)$:*

$$(12.5) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|S_t^* \lambda - \mu\|_{L(H^1)}^* \rightarrow 0,$$

uniformément en λ . En particulier, $\forall u_0 \in H^1$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Sigma_t(u_0) - \mu\|_{L(H^1)}^* = 0$ uniformément en u_0 .

La propriété (12.5) est dite de *mélange* et $u(t)$ est dit *processus mélangeant*.

Démonstration. Soit μ la mesure stationnaire construite par l'ansatz de Bogoliubov-Krylov (Théorème 11.1) et μ_1 une autre mesure stationnaire. Si la relation (12.5) est vraie alors $\|\mu_1 - \mu\|_{L(H^1)}^* = \|S_t^* \mu_1 - \mu\|_{L(H^1)}^* \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ et par conséquent $\mu_1 = \mu$. À présent, démontrons la relation (12.5). Soit $f \in \mathcal{C}_b(H^1)$ tel que $\|f\|_L \leq 1$ et $X_t := |\langle f, S_t^* \lambda \rangle - \langle f, \mu \rangle| = |\langle f, S_t^* \lambda \rangle - \langle f, S_t^* \mu \rangle|$. Nous avons

$$\langle f, S_t^* \lambda \rangle = \langle S_t f, \lambda \rangle = \int_{H^1} S_t f(u) \lambda(du) = \int_{H^1} \int_{H^1} S_t f(u) \lambda(du) \mu(du').$$

De même,

$$\langle f, S_t^* \mu \rangle = \int_{H^1} \int_{H^1} S_t f(u') \mu(du') \lambda(du).$$

Ainsi,

$$X_t \leq \int_{H^1} \int_{H^1} |S_t f(u) - S_t f(u')| \lambda(du) \mu(du').$$

Par la proposition 12.1, l'intégrande $|S_t f(u) - S_t f(u')| = |\langle \Sigma_t(u') - \Sigma_t(u''), f \rangle|$ est bornée par d_t^0 . Donc $X_t \leq d_t^0$. D'ici, nous avons (12.5) dans la limite $t \rightarrow +\infty$. \square

L'analyse de la proposition 12.1 implique que

$$\|\Sigma_t(u') - \Sigma_t(u'')\|_{L(L_1)}^* \leq Ct^{-\frac{1}{13}}, \quad \forall t \geq 0,$$

voir [7], [8]. Alors la solution $u(t)$ est un processus *algébriquement mélangeant*. Or, si la force η définie dans (1.3) est *non-dégénéré* :

$$(12.6) \quad b_s \neq 0, \quad \text{si } |s| \leq n_*, \quad n_* \in \mathbb{N}^*,$$

alors $u(t)$ est un processus *exponentiellement mélangeant* :

$$(12.7) \quad \|\Sigma_t(u') - \Sigma_t(u'')\|_{L(L_1)}^* \leq Ce^{-ct}, \quad \forall t \geq 0.$$

Le théorème 3.1.7 de [23]. implique (12.7) si $n_* = n_*(\nu)$ est suffisamment grand (par exemple, si $b_s \neq 0, \forall s$), et la méthode développée dans [15] implique (12.7), si (12.6) est valide avec un certain n_* qui ne dépend pas de ν . La relation (12.7) entraîne que le processus $u^\omega(t)$ est "bien ergodique". Pour illustrer, prenons $f \in \mathcal{C}_b(H^1)$ et considérons le processus $f(u(t))$. On peut démontrer que $f(u(t))$ satisfait *la loi forte des grands nombres et le théorème central limite* [23, Section 4]. Le problème reste ouvert si la relation (12.7) est vraie avec des constantes c et C qui ne dépendent pas de $\nu \in (0, 1]$.

13. FONCTION DE STRUCTURE

La *fonction de structure* est l'un des objets principaux de la théorie de la turbulence hydrodynamique [13]. Pour un "fluide unidimensionnel" qui est décrit par l'équation de Burgers, la fonction de structure est définie comme suit :

Définition 13.1. *Si u désigne la solution de l'équation de Burgers alors sa fonction de structure de degré $p > 0$ est*

$$(13.1) \quad S_p(l) = \langle\langle \int_{\mathbb{S}^1} |u(x+l) - u(x)|^p dx \rangle\rangle, \quad l \in (0, 1].$$

Théorème 13.1. *Soit $B_m < \infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\nu \in (0, c_*]$, où $c_* \leq 1$ une constante qui dépend seulement de B_1, B_2, \dots*

(1) *Soit $p > 0$. Il existe $c_p > 0$ tel que*

$$(13.2) \quad S_p(l) \leq \begin{cases} c_p l^p, & \text{si } p \in (0, 1), \\ c_p l^p \nu^{1-p}, & \text{si } p \geq 1, \end{cases} \quad \text{pour tout } l \in (0, 1] \text{ et } \nu \in (0, c_*].$$

(2) *Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$, et pour chaque $p > 0$, il existe $c'_p(c_1, c_2) > 0$ tel que*

$$(13.3) \quad S_p(l) \geq \begin{cases} c'_p l^p, & \text{si } p \in (0, 1), \\ c'_p l, & \text{si } p \geq 1, \end{cases} \quad \text{pour tout } l \in [c_1 \nu, c_2] \text{ et } \nu \in (0, c_*].$$

Démonstration. 1) Si $p \geq 1$, alors

$$S_p(l) \leq \langle\langle \int |u(x+l) - u(x)| dx \cdot \max_x |u(x+l) - u(x)|^{p-1} \rangle\rangle.$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$S_p(l) \leq \underbrace{\langle\langle \left(\int |u(x+l) - u(x)| dx \right)^p \rangle\rangle}_{=: I}^{1/p} \underbrace{\langle\langle \max_x |u(x+l) - u(x)|^p \rangle\rangle}_{=: J}^{(p-1)/p}$$

D'une part, remarquons que la moyenne de $x \mapsto u(x+l) - u(x)$ est nulle, donc par le lemme 4.1

$$\int |u(x+l) - u(x)| dx \leq 2 \int (u(x+l) - u(x))^+ dx \leq 2 \sup_x (u_x)^+ \cdot l,$$

et $I \leq 2l \langle\langle [\sup_x (u_x)^+]^p \rangle\rangle^{1/p}$. D'ici et le corollaire 4.1, on obtient que $I \leq c_p l$. D'autre part,

$$J \leq \langle\langle |u_x|_\infty^p \rangle\rangle^{(p-1)/p}.$$

De l'inégalité (3.2) (avec $\theta(0, 1, \infty, m-1)$) et celle de Hölder, on obtient

$$\langle\langle |u_x|_\infty^p \rangle\rangle^{\frac{p-1}{p}} \leq \left[c l^p \langle\langle |u|_{\frac{2m-1}{m}}^{\frac{2p}{m-1}} |u_x|_1^a \rangle\rangle \right]^{\frac{p-1}{p}} \leq c l^{p-1} \langle\langle |u|_m^2 \rangle\rangle^{\frac{p-1}{2m-1}} \langle\langle |u_x|_1^b \rangle\rangle^c,$$

pour certaines constantes $a, b, c > 0$. Maintenant, utilisant le corollaire 4.1 et le théorème 8.2, on obtient que

$$J \leq c' l^{p-1} \nu^{-(p-1)}.$$

Finalement $S_p(l) \leq c_p l^p \nu^{1-p}$, si $p \geq 1$.

Si $p \in (0, 1)$, alors nous obtenons par l'inégalité de Hölder et par (13.2) avec $p = 1$:

$$S_p(l) \leq \langle\langle \int |u(x+l) - u(x)| dx \rangle\rangle^p = S_1(l)^p \leq (c_1 l)^p.$$

Ceci achève la preuve de (13.2).

2) Notons par Q_1 l'événement dans (8.5) avec $m = 1$. Alors $\rho(Q_1) \geq C(1, \sigma_0)$. Soit $M > 0$ et

$$Q_2 = \{(t, \omega) \in Q_1 : |u_x^{\omega+}(t)|_\infty + |u_x^\omega(t)|_1 + \nu^{\frac{3}{2}} \|u^\omega(t)\|_2 + \nu^{\frac{5}{2}} \|u^\omega(t)\|_3\} \leq M\}.$$

Par le corollaire 4.1, (8.4) et l'inégalité de Tchebychev :

$$\rho(Q_2) \geq C(1, \sigma_0) - C_1 M^{-1} \geq \frac{1}{2} C(1, \sigma_0),$$

pour tout $\nu \in (0, c_*)$ et si M est suffisamment grand.

Soit $(t, \omega) \in Q_2$ et notons $v(x) := u^\omega(t, x)$. Pour établir (13.3), nous montrons que v satisfait

$$(13.4) \quad \int |v(x+l) - v(x)|^p dx \geq C l^{\min(1,p)}, \quad l \in [c_1 \nu, c_2], \quad p > 0$$

uniformément en $\nu \in (0, 1]$, où $C = C(c_1, c_2, p) > 0$.

D'abord, supposons que $p \geq 1$. Notons que

$$\alpha \nu^{-1} \leq \int |v_x|^2 dx \leq |v_x|_\infty |v_x|_1 \leq M |v_x|_\infty,$$

où α est définie dans le corollaire 8.2. Donc

$$(13.5) \quad |v_x|_\infty \geq \alpha M^{-1} \nu^{-1} =: \alpha_2 \nu^{-1},$$

uniformément en ν . Comme $|v_x^+|_\infty \leq M$, alors $|v_x^+|_\infty \leq \frac{1}{2} \alpha_2 \nu^{-1}$, si $\nu \leq \frac{1}{2} \alpha_2 M^{-1} =: c_*$. Donc, par (13.5), on a

$$|v_x^+|_\infty \leq \frac{1}{2} \alpha_2 \nu^{-1}, \quad \text{et } |v_x^-|_\infty \geq \alpha_2 \nu^{-1}, \quad \text{si } \nu \in [0, c_*].$$

Notons par $z = z(t, \omega) = \min\{x \in [0, 1] : v_x^-(x) \geq \alpha_2 \nu^{-1}\}$. z est une fonction mesurable bien définie sur Q_2 , si $\nu \in [0, c_*]$.

Nous avons

$$(13.6) \quad \int |v(x+l) - v(x)|^p dx \geq \int_{z-\frac{l}{2}}^z \left| \int_x^{x+l} v_x^-(y) dy - \int_x^{x+l} v_x^+(y) dy \right|^p dx.$$

Par le lemme 3.2, on a $|u_{xx}|_\infty \leq C_2 \|u\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}$, ce qui implique que $|v_{xx}|_\infty \leq C_2 M \nu^{-2}$. Donc, dans l'intervalle $[x, x + \alpha_3 \nu]$, $\alpha_3 > 0$, nous avons

$$v_x^- \geq \alpha_2 \nu^{-1} - \alpha_3 C_2 M \nu^{-1} = \frac{3}{4} \alpha_2 \nu^{-1},$$

si $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{4C_1 M}$. Supposons que $l \geq \alpha_3 \nu$. Comme $v_x^+ \leq M$, alors

$$\int_x^{x+l} v_x^-(y) dy \geq \int_x^{x+\alpha_3 \nu} v_x^-(y) dy \geq \frac{3}{4} \alpha_2 \alpha_3, \quad \text{et } \int_x^{x+l} v_x^+(y) dy \leq Ml.$$

D'ici et de (13.6), nous obtenons que

$$\int |v(x+l) - v(x)|^p dx \geq \int_{z-\frac{l}{2}}^z \left| \frac{3}{4} \alpha_2 \alpha_3 - Ml \right|^p dx \geq \frac{l}{2} \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \alpha_3 \right)^p, \quad p \geq 1.$$

pourvu que $l \in [\alpha_3 \nu, \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4M}]$ et $\nu \in [0, c_*]$. Ainsi, la relation (13.3) est établie avec $c_* = \frac{1}{2} \alpha_2 M^{-1}$, $c_1 = \alpha_3$ et $c_2 = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{4M}$.

Maintenant, supposons que $p \in (0, 1)$. Soit f fonction arbitraire positive. Nous pouvons l'écrire comme $f = f^{\frac{2-2p}{2-p}} f^{\frac{p}{2-p}}$. D'ici et l'inégalité de Hölder, nous avons $(f f)^{2-p} \leq (f f^2)^{1-p} (f f^p)$. Donc,

$$\begin{aligned} \int |v(x+l) - v(x)|^p dx &\geq \int \left((v(x+l) - v(x))^+ \right)^p dx \\ &\geq \left(\int \left((v(x+l) - v(x))^+ \right)^2 dx \right)^{p-1} \left(\int \left((v(x+l) - v(x))^+ \right) dx \right)^{2-p}. \end{aligned}$$

Comme $v_x^+ \leq M$, alors $(v(x+l) - v(x))^+ \leq Ml$. De plus, $p-1 < 0$, donc le premier terme du membre de droite de cette dernière inégalité est minoré par $(M^2 l^2)^{p-1}$.

Remarquons que la fonction $v(\cdot + l) - v(\cdot)$ est de moyenne nulle. Par conséquent

$$\int (v(x+l) - v(x))^+ dx = \frac{1}{2} \int |v(x+l) - v(x)| dx,$$

et utilisant (13.4) avec $p = 1$, nous obtenons que le second terme est minoré par Cl^{2-p} . Finalement, (13.4) est établi pour $p \in (0, 1)$. \square

14. SPECTRE DE L'ÉNERGIE

Définition 14.1. On appelle l'énergie de nombre d'onde k correspondant à la solution u de l'équation de Burgers, la grandeur :

$$(14.1) \quad E_k = \frac{1}{2k(M - M^{-1})} \sum_{M^{-1}k \leq |n| \leq Mk} \frac{1}{2} \langle\langle |u_n|^2 \rangle\rangle.$$

où M est une constante positive indépendante de ν . La fonction $k \mapsto E_k$ est le spectre de l'énergie.

Le théorème 9.1 dit que si k est supérieur au seuil critique, égale à ν^{-1} alors le spectre de l'énergie décroît plus vite que n'importe quelle puissance négative de k , et que cela n'est pas valide si k est inférieur à ce seuil.

Dans cette partie, nous continuons l'étude du spectre de l'énergie E_k quand $k \lesssim \nu^{-1}$.

Théorème 14.1. Soit M dans (14.1) suffisamment grand, et $c_1, c_2 > 0$ les constantes du théorème 13.1, alors il existe $c_3, c_4 > 0$ tel que pour tout k satisfaisant la condition

$$(14.2) \quad c_2^{-1} \leq k \leq (c_1 \nu)^{-1},$$

nous avons

$$(14.3) \quad c_3 k^{-2} \leq E_k \leq c_4 k^{-2}.$$

Démonstration. On précise que les constantes C, C_k, \dots etc, de cette preuve ne dépendent pas de M . La relation (9.4) implique que $\langle\langle |u_k|^2 \rangle\rangle \leq Ck^{-2}$. Notons que cette relation entraîne la seconde inégalité de (14.3). Maintenant, nous vérifions la première. Comme $\langle\langle |u_k|^2 \rangle\rangle \leq Ck^{-2}$, alors

$$(14.4) \quad \sum_{|n| \leq M^{-1}k} |n|^2 \langle\langle |u_n(t)|^2 \rangle\rangle \leq CM^{-1}k,$$

et

$$(14.5) \quad \sum_{|n| \geq Mk} \langle\langle |u_n(t)|^2 \rangle\rangle \leq C'M^{-1}k^{-1},$$

Posons $S = \sum_{|n| \leq Mk} |n|^2 \langle\langle |u_n(t)|^2 \rangle\rangle$. Comme $|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$, alors

$$(14.6) \quad S \geq \frac{k^2}{\pi^2} \sum_{|n| \leq Mk} \sin^2\left(\frac{n\pi}{k}\right) \langle\langle |u_n|^2 \rangle\rangle = \frac{k^2}{\pi^2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \sin^2\left(\frac{n\pi}{k}\right) \langle\langle |u_n|^2 \rangle\rangle - \sum_{|n| > Mk} \sin^2\left(\frac{n\pi}{k}\right) \langle\langle |u_n|^2 \rangle\rangle \right).$$

Notons que par l'identité de Parseval, nous avons

$$\|u(\cdot + y) - u(\cdot)\|^2 = 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \sin^2(n\pi y) |u_n|^2.$$

D'ici, de (14.6) et (14.5), on trouve que

$$(14.7) \quad S \geq \frac{k^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{4} \langle\langle \|u(\cdot + \frac{1}{k}) - u(\cdot)\|^2 \rangle\rangle - \sum_{|n| > Mk} \langle\langle |u_n|^2 \rangle\rangle \right) \geq k^2 C_1 S_2 \left(\frac{1}{k}\right) - CM^{-1}k.$$

Comme k satisfait (14.2), alors par (14.7) et (13.3) ($p = 2, l = \frac{1}{k}$), nous avons

$$(14.8) \quad S \geq k^2 C_1 c_2' k^{-1} - C' M^{-1}k = k(C'' - C' M^{-1}).$$

Notons que

$$E_k \geq E_k^- = \frac{1}{4k^3 M^3} \sum_{M^{-1}k \leq |n| \leq Mk} |n|^2 \langle\langle |u_n(t)|^2 \rangle\rangle.$$

D'ici, de (14.8) et de (14.4), on a

$$E_k \geq \frac{1}{4k^3 M^3} \left(S - \sum_{|n| \leq M^{-1}k} |n|^2 \langle\langle |u_n|^2 \rangle\rangle \right) \geq \frac{C'' - C' M^{-1} - C M^{-1}}{4k^2 M^3} > k^{-2} M^{-3} C_3, \quad C_3 > 0$$

si $M \gg 1$. D'où la première inégalité de (14.3). \square

En ignorant les constantes multiplicatives en les puissances de ν , les physiciens écrivent le segment $[c_2^{-1}, c_1^{-1} \nu^{-1}]$ comme $[\nu^0, \nu^{-1}]$ et l'appellent la *zone inertielle*. Alors, le théorème 14.1 dit que dans la zone inertielle l'énergie E_k se comporte comme k^{-2} . De même, on appelle le segment $[\nu^{-1}, +\infty)$ la *zone dissipative*, et dans ce cas, le théorème 13.1 se traduit par le fait que dans cette zone, l'énergie décroît plus vite que toute puissance négative de k . En renvoi à [7] pour une assertion plus forte, qui justifie plus rigoureusement la définition de cette zone.

15. APPENDICE A : LE PROCESSUS DE WIENER STANDARD

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, muni de la distance :

$$d(u, v) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{\max_{0 \leq t \leq n} |u(t) - v(t)|}{1 + \max_{0 \leq t \leq n} |u(t) - v(t)|},$$

$(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+), d)$ est un espace métrique complet et séparable. Soit \mathcal{B} la tribu Borélienne de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé standard [11]. Par exemple, $\Omega = [0, 1]$ muni de la tribu Borélienne \mathcal{F} et de la mesure de Lebesgue.

Considérons l'application mesurable $w : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{C}(\mathbb{R}^+), \mathcal{B})$, $\omega \mapsto w^\omega$, telle que $w^\omega(0) = 0$ et :

- (1) pour tout $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N$, la variable aléatoire $\omega \mapsto (w^\omega(t_1), \dots, w^\omega(t_N)) \in \mathbb{R}^N$ est Gaussienne,
- (2) pour chaque $t \geq 0$, $\mathbb{E}[w^\omega(t)] = 0$ et $\mathbb{E}[w^\omega(t)^2] = t$.
- (3) Si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, alors les variables aléatoires $w(t_4) - w(t_3)$ et $w(t_2) - w(t_1)$ sont indépendantes.

On appelle une telle application mesurable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un *processus de Wiener standard*. Notons que si on pose $\tilde{w}(t) = w(\tilde{t} + t) - w(\tilde{t})$ pour $\tilde{t} \geq 0$ fixé, alors \tilde{w} définit aussi un processus de Wiener standard. C'est connu qu'on peut construire une famille dénombrable w_1, w_2, \dots de processus de Wiener standard indépendants [14], [20].

La célèbre inégalité maximale de Doob [14], [17], [28], appliquée à un processus de Wiener standard $w(t)$ dit que

$$(15.1) \quad \mathbb{E} \left[\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |w(t)|^2 \right)^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [(|w(T)|^2)^p], \quad \forall p > 1.$$

L'inégalité (15.1) reste vraie si $|w(t)| = (w_1(t)^2 + \dots + w_N(t)^2)^{1/2}$, et w_1, \dots, w_N sont des processus de Wiener standard indépendants.

16. APPENDICE B : LES TEMPS D'ATTEINTE ET D'ARRÊT, ET LA PROPRIÉTÉ DE MARKOV FORTE

Soit $t, m \geq 0$, $B_m < \infty$ et $u(t) \in H^m$, une solution de (B). Soit $Q \subset H^m$ un sous ensemble fermé, et une constante $T > 0$. Notons

$$\tau = \tau_{Q, T}^\omega = \inf\{0 \leq t \leq T : u^\omega(t) \in Q\}.$$

Ici, $\tau = T$ si $u^\omega(t) \notin Q$ pour $t \leq T$. On appelle τ le *temps d'atteinte* (dans l'ensemble fermé Q). C'est un cas particulier du *temps d'arrêt* [14], [26], [17]. Notons que $\tau = 0$ si $Q = H^m$, et que $\tau = T$ si $Q = \emptyset$.

L'importance de ces concepts vient de la propriété des processus de Markov, qu'on appelle : *propriété de Markov forte*. Nous la formulons pour une solution $u(t) = u^\omega(t; u_0^\omega)$ de (B), où u_0 est une variable aléatoire dans H^1 indépendante de ξ^ω et telle que $\mathbb{E}[\|u_0\|_1] < \infty$. Soit $T_1 \geq T$ et $f \in \mathcal{C}_b(H^m)$, alors

$$(16.1) \quad \mathbb{E}[f(u(T_1))] = \mathbb{E}[S_{T_1 - \tau_{Q,T}^\omega} f(u(\tau_{Q,T}^\omega))].$$

Ici, l'opérateur $S_t f(v)$ est défini dans (5.4) où nous avons remplacé t par $T_1 - \tau_{Q,T}^\omega$, et v par $u^\omega(\tau_{Q,T}^\omega)$. Notons que si $\tau = T$ et $u(0) = \text{const}$, alors (16.1) coïncide avec la propriété de Kolmogorov-Chapman (5.9).

17. NOTATION

Soit $x \in \mathbb{S}^1$, $p \in [1, \infty]$ et $m \in \mathbb{R}$. Pour une fonction $u(x)$, nous notons par $\|u\|_p$ sa norme dans l'espace de Lebesgue $L_p(\mathbb{S}^1)$, et par $\|u\|_m$ sa norme de Sobolev homogène d'ordre m . Si $m = 0$, nous écrivons $\|u\| := \|u\|_0 = \|u\|_2$.

Soit $\lambda > 0$. Nous désignons par $\lambda \gg 1$ (resp. $\lambda \ll 1$) si λ est suffisamment grand (resp. λ est suffisamment petit).

RÉFÉRENCES

- [1] Aurell, E., Frisch, U., Lutsko, J., Vergassola, M., 1992. On the multifractal properties of the energy dissipation derived from turbulence data. *Journal of Fluid Mechanics* 238, 467–486.
- [2] Bec, J., Khanin, K., 2007. Burgers turbulence. *Physics Reports* 447, 1–66.
- [3] Billingsley, P., 1995. *Probability and measure*, Wiley series in probability and mathematical statistics. Probability and mathematical statistics. New York, Etats-Unis, Royaume-Uni, Australie.
- [4] Biryuk A., 2001. Spectral Properties of Solutions of Burgers Equation with Small Dissipation. *Functional Analysis and Its Applications*. Vol. 35., No 1.
- [5] Biryuk, A., 2001. Estimates for Spatial Derivatives of Solutions for Quasilinear Parabolic Equations with Small Viscosity (PhD thesis). Heriot-Watt University, Edinburgh, Scotland.
- [6] Bogachev, V.I., 1998. *Gaussian Measures*, Mathematical Surveys and Monographs. AMS, Providence.
- [7] Boritchev, A., 2012. Sharp Estimates for Turbulence in White-Forced Generalised Burgers Equation, *Geometric and Functional Analysis*, 23.
- [8] Boritchev, A., 2012. Equation de Burgers généralisée à force aléatoire et à viscosité petite (Thèse de doctorat). École polytechnique, Palaiseau, Essonne, France.
- [9] Bourbaki, N., 2007. *Intégration*, (Éléments de mathématique). Berlin, Allemagne.
- [10] Cartan, H., Takahashi, R., 1961. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, Paris, France.
- [11] Dudley, R.M., 2002. *Real analysis and probability*, Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, New York.
- [12] Evans, L.C., 2010. *Partial differential equations*, 2nd ed. ed, Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, Providence, R.I.
- [13] Frisch, U., 1995. *Turbulence : the Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [14] Gall, J.-F.L., 2013. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Mathématiques et Applications. Springer Berlin Heidelberg.
- [15] Hairer, M., Mattingly, J., 2006. Ergodicity of the 2D Navier–Stokes equations with degenerate stochastic forcing. *Annals of Mathematics* 164, 993–1032.
- [16] Kappeler, T., Pöschel, J., 2003. *KdV & KAM*. Springer, Berlin ; New York.
- [17] Karatzas, I., Shreve, S., 1991. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin.
- [18] Khasminskii, R., 2012. *Stochastic Stability of Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin.
- [19] Kružkov, S.N., 1964. The Cauchy problem in the large for non-linear equations and for certain first-order quasilinear systems with several variables. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 155, 743–746.
- [20] Kuo, H.-H., 1975. *Gaussian Measures in Banach Spaces*. Springer-Verlag, Berlin.
- [21] Kuksin, S.B., 1997. On turbulence in nonlinear Schrödinger equation. *Geometric and Functional Analysis* 7, 338–363.

- [22] Kuksin, S.B., 1999. Spectral properties of solutions for nonlinear PDEs in the turbulent regime. *Geometric and Functional Analysis* 9, 141–184.
- [23] Kuksin, S., Shirikyan, A., 2012. *Mathematics of Two-Dimensional Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge
- [24] Lions, J.-L., 1969. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*. Gauthier-Villars, Paris.
- [25] Lions, J.-L., Magenes, E., 1968. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, Travaux et recherches mathématiques*. Dunod, Paris, France.
- [26] Øksendal, B., 2003. *Stochastic Differential Equations. An introduction with applications*. Springer-Verlag, Berlin.
- [27] Poschel, J., Trubowitz, E., 1987. *Inverse Spectral Theory*. Academic Press, Boston.
- [28] Shiryaev, A.N., 1996. *Probability, Graduate texts in mathematics*. Springer series in Soviet mathematics. - New York : Springer, cop. 1984-. Springer, New York, Etats-Unis.
- [29] Taylor, M.E., 2011. *Partial differential equations III, Nonlinear equations, Applied mathematical sciences*. Springer, New York, Etats-Unis.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU-PARIS RIVE GAUCHE, UMR 7586, UNIV. PARIS DIDEROT, SORBONNE PARIS CITÉ, SORBONNE UNIVERSITÉS, UPMC UNIV. PARIS 06, F-75013, PARIS, FRANCE

E-mail address: `takfarinas.kelai@imj-prg.fr`

CNRS, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU-PARIS RIVE GAUCHE, UMR 7586, UNIV. PARIS DIDEROT, SORBONNE PARIS CITÉ, SORBONNE UNIVERSITÉS, UPMC UNIV. PARIS 06, F-75013, PARIS, FRANCE

E-mail address: `sergei.kuksin@imj-prg.fr`