Rappel :. $C_1^0 : E_{x_0} \longrightarrow E_{x_1}$ transport parallèle pour ∇^E

. $R^E \in \Omega^2(X, \underline{End}(E))$ courbure pour ∇^E

Prop : (E, R^E) hermitien

. ∇^E metrique.

∇^E metrique $\Leftrightarrow 0$ $\nabla^{Hom(E, \bar{E}^*)}(h^E) = 0$

$\Rightarrow$ $R^{Hom(E, \bar{E}^*)}(h^E) = 0$

$\Leftrightarrow$ $R^{\bar{E}^*} \circ h^E - h^E \circ R^E = 0$

$\Leftarrow 0$ $\langle R^{\bar{E}^*} \circ h^E s_1, \bar{s}_2 \rangle_{\bar{E}^* \times \bar{E}} - \langle h^E \circ R^E s_1, \bar{s}_2 \rangle_{\bar{E}^* \times \bar{E}} = 0$

$R^{\bar{E}^*} = {}^t R^{\bar{E}}$

$\Leftarrow 0$ $- \langle s_1, R^E s_2 \rangle_{h^E} - \langle R^E s_1, s_2 \rangle_{h^E} = 0$ #

II.4 | courbure et transport parallèle

. (E, ∇^E) sur X.

. $x_\cdot : [0,1] \xrightarrow{C^\infty} X$ une courbe sur X.

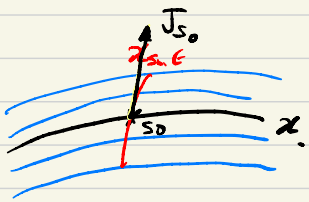
. $x_{\cdot,\cdot} : [0,1] \times]-\delta, \delta[\xrightarrow{C^\infty} X$ est une variation de $x_\cdot$ si

$(s, \epsilon) \longmapsto x_{s,\epsilon}$

$x_{\cdot,0} = x_\cdot$

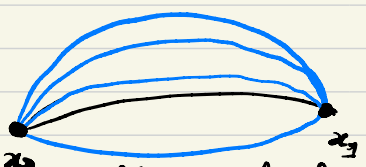
• si $s_0 \in [0,1]$, $(x_{s_0,\epsilon})_{-\delta<\epsilon<\delta}$ def $J_{s_0} \in T_{x_{s_0}} X$.

$J_\cdot = (J_{s_0})_{s_0 \in [0,1]} \in C^\infty([0,1], x_\cdot^*(TX))$ un champs de vecteur le long $x_\cdot$.



On prend une variation $x_{\cdot,\epsilon}$ de $x_\cdot$ à extrémités fixés.

càd. $x_{0,\epsilon} = x_0$, $x_{1,\epsilon} = x_1$.



Donc $J_0 = 0$, $J_1 = 0$

• $\tau_1^0(\epsilon) : E_{x_0} \longrightarrow E_{x_1}$ transport parallèle le long $x_{\cdot,\epsilon}$

• $\tau_1^0 = \tau_1^0(0)$

Prop : $$\frac{d}{d\epsilon}_{\epsilon=0} \tau_1^0(\epsilon) = \int_0^1 \tau_1^s \underbrace{R^E(\dot{x}_s, J_s)}_{\in End(E_{x_s})} \tau_s^0 \, ds.$$

$\in Hom(E_{x_0}, E_{x_1})$

Dém. •

$$\begin{array}{ccc} x_\cdot^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ (s, \epsilon) & \longmapsto & x_{s,\epsilon} \\ [0,1] \times]-\delta, \delta[& \xrightarrow{x_{\cdot,\cdot}} & X \end{array}$$

On note $\frac{D}{Ds} = \nabla^{x_\cdot^*(F)}_{\frac{\partial}{\partial s}}$, $\frac{D}{D\epsilon} = \nabla^{x_\cdot^*(F)}_{\frac{\partial}{\partial \epsilon}}$.

• $u \in E_{x_0}$

$$\frac{D}{Ds}\circ\frac{D}{D\epsilon}\left(\tau_s^0(\epsilon)\,u\right)=\frac{D}{D\epsilon}\underbrace{\frac{D}{Ds}\left(\tau_s^0(\epsilon)\,u\right)}_{=0\ \forall\varepsilon}+\overbrace{\nabla^{\dot{x}}_{\left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right]}}^{=0}$$

$$+R^E\left(\frac{\partial}{\partial\epsilon},\frac{\partial}{\partial\epsilon}\right)\tau_s^0(\epsilon)\,u$$

$$\frac{D}{Ds}\left\{\left\{\frac{D}{D\epsilon}\left(\tau_s^0(\epsilon)\,u\right)\right\}_{\epsilon=0}\right\}=R^E\left(\dot{x}_s,J_s\right)\tau_s^0\,u$$

$$\frac{D}{Ds}\;\tau_s^0\;\tau_0^s\left\{\frac{D}{D\epsilon}\tau_s^0(\epsilon)\,v\right\}_{\epsilon=0}$$

$$\tau_s^0\left\{\frac{d}{ds}\;\tau_0^s\left\{\frac{D}{D\epsilon}\tau_s^0(\epsilon)\,v\right\}_{\epsilon=0}\right\}=R^E(\dot{x}_s,J_s)\,\tau_s^0\,u$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{C^\infty([0,1],\,E_{x_0})}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\qquad\qquad\right)=\tau_0^s\,R^E(\dot{x}_s,J_s)\,\tau_s^0\,u$$

$$\tau_0^1\left\{\frac{D}{D\epsilon}\tau_1^0(\epsilon)\,v\right\}_{\epsilon=0}=\int_0^1\tau_0^s\,R^E(\dot{x}_0,J_s)\,\tau_s^0\,u\,ds$$

$$+\underbrace{\frac{D}{D\epsilon}\underbrace{\left\{\tau_0^0(\epsilon)\,v\right\}}_{=id}}_{=0}$$

$$\frac{D}{D\epsilon}\Big\{\tau_1^\circ(\epsilon)\,u\Big\}_{|\epsilon=0} = \int_0^1 \tau_1^s\, R^E(\dot{x}_s, J_s)\,\tau_s^\circ u\, ds$$

$$\Big\{\frac{d}{d\epsilon} + \underbrace{\Gamma(J_1)}_{=0}\Big\}\Big\{\tau_1^\circ(\epsilon)\,u\Big\}_{|\epsilon=0}$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\Big\{\tau_1^\circ(\epsilon)\,u\Big\}_{|\epsilon=0} = \int_0^1 \tau_1^s\, R^E(\dot{x}_s, J_s)\,\tau_s^\circ u\, ds$$

#

Cor : si $R^E = 0$, $\tau_1^\circ : E_{x_0} \to E_{x_1}$ dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes de x.

II.5 ∇^{TX} et sa torsion.

connexion induite

- ∇^{TX} connexion sur TX.
- $C^\infty(x, \overset{*}{T}_x) \xrightarrow{\nabla} C^\infty(x, \overset{*}{T}_x \otimes \overset{*}{T}_x) \xrightarrow{\alpha\otimes\beta \,\longmapsto\, \alpha\wedge\beta} \Omega^2(x, \mathbb{R})$

  $\Omega^1(x, \mathbb{R})$ — $e^i \wedge \nabla^{\overset{*}{T}_x}_{e_i}$
- $\{e_1, e_2, \dots e_m\}$ base de TX

- $\{e^1, e^2, \dots, e^m\}$ base dual de T^*X

$$\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$$

- $\alpha_1\left(e^i \wedge \nabla^{T^*X}_{e_i}\right) = i\xi \wedge$

Donc $d^X_1 - e^i \wedge \nabla^{T^*X}_{e_i}$ est un op d'ordre 0 $\Omega^\cdot(X,\mathbb{R})$

et est donné par $T \in C^\infty\left(X, \mathrm{Hom}(T^*X, \Lambda^2 T^*X)\right)$

$$= \Omega^2(X, TX).$$

Def : $T \in \Omega^2(X, TX)$ est dite la torsion de ∇^{TX}.

si $i_T = \sum_{i<j} e^i \wedge e^j \, i_{T(e_i,e_j)}$, alors

$$d^X_{\Omega^1(X,\mathbb{R})} = \sum_i e^i \wedge \nabla^{T^*X}_{e_i} + i_T$$

connexion induite sur $\Lambda^\cdot(T^*X)$

Prop (Bismut) : $d^X = \sum_i e^i \wedge \nabla_{e_i} + i_T$

Dém : $d^X_{\Omega^0 \oplus \Omega^1} = \left(\sum_i e^i \wedge \nabla^{\Lambda^\cdot T^*X}_{e_i} + i_T\right)_{\Omega^0 \oplus \Omega^1}$

$$e^i \wedge \nabla^{\wedge^\cdot T^*X}_{e_i} (\alpha \wedge \beta) = e^i \wedge \left(\nabla^{\wedge^\cdot T^*X}_{e_i} \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla^{\wedge^\cdot T^*X}_{e_i} \beta \right)$$

$$\nabla^{\wedge^\cdot T^*X} = \nabla^{(T^*X)^{\otimes k}}$$

$$= \left(e^i \wedge \nabla^{\wedge^\cdot T^*X}_{e_i} \alpha \right) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge e^i \wedge \nabla^{\wedge^\cdot T^*X}_{e_i} \beta .$$

$V \in C^\infty(X, TX)$

$$i_V(\alpha \wedge \beta) = i_V \alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i_V \beta \qquad \#$$

Prop : $U, V \in C^\infty(X, TX)$, alors

$$T(U,V) = \nabla^{TX}_U V - \nabla^{TX}_V U - [U,V].$$

Dém :

$$d^X_1 = e^i \wedge \nabla^{T^*X}_{e_i} + \frac{i}{T}$$

$$\Omega^1$$

$f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$,

$$0 = d^X(d^X f) = e^i \wedge \nabla^{T^*X}_{e_i} d^X f + \langle T, d^X f \rangle$$

$$= e^i e^j \wedge \langle \underbrace{\nabla^{T^*X}_{e_i} d^X f}_{\in T^*X}, \underbrace{e_j}_{TX} \rangle + \langle T, d^X f \rangle$$

$$0 = \langle \nabla^{T^*X}_U d^X f, V \rangle - \langle \nabla^{T^*X}_V d^X f, U \rangle + \langle T(U,V), d^X f \rangle$$

$$= U \underbrace{\langle d^X f, V \rangle}_{U \cdot (V \cdot f)} - \langle d^X f, \nabla^{TX}_U V \rangle - V \underbrace{\langle d^X f, U \rangle}_{V \cdot (U \cdot f)} + \langle d^X f, \nabla^{TX}_V U \rangle$$

$+ \langle T(U,V), d^x f \rangle$

$= \langle \underbrace{[U,V] - \nabla^{TX}_U V + \nabla^{TY}_V U}_{=0} + T(U,V), d^x f \rangle$ #

Rq : $L_U = \nabla^{TX}_U - \underbrace{\nabla^{TX}_{\cdot} U - T(U,\cdot)}_{C^\infty(X, End(TX))}$ #

Thm : Soit g^{TX} metrique sur TX, soit $T \in \Omega^2(X, TX)$.

$\exists !$ ∇^{TX} connexion metrique t.q la torsion $= T$.

Dém : $U, V, W \in C^\infty(X, TX)$

unicité (on va utiliser $\nabla = \nabla^{TX}$, $\langle \cdot,\cdot \rangle = \langle \cdot,\cdot \rangle_{g^{TX}}$)

$\langle \nabla^{TX}_U V, W \rangle = U \langle V, W \rangle - \langle V, \nabla_U W \rangle$

$= U\langle V,W\rangle - \langle V, \nabla_W U \rangle - \langle V, [U,W] \rangle$
$- \langle V, T(U,W) \rangle$

$-\langle V, \nabla_W U \rangle = -W\langle V, U\rangle + \langle \nabla_W V, U \rangle$

$= -W\langle V,U\rangle + \langle \nabla_V W, U\rangle + \langle [W,V], U\rangle$
$+ \langle T(W,V), U \rangle$

$\langle \nabla_V W, U \rangle = V\langle W, U\rangle - \langle W, \nabla_V U \rangle$

$$= V\langle W, U\rangle - \langle W, \nabla_U V\rangle - \langle W, [V,U]\rangle$$
$$- \langle W, T(V,U)\rangle$$

+1

$$2\langle \nabla^{TX}_U V, W\rangle = \langle [U,V], W\rangle - \langle [V,W], U\rangle + \langle [W,U], V\rangle$$

$$+ U\langle V, W\rangle + V\langle W, U\rangle - W\langle U, V\rangle$$

$$\langle T(U,V), W\rangle - \langle T(V,W), U\rangle + \langle T(W,U), V\rangle$$

Donc, ∇^{TX} est unique.

Existence : on déf. ∇^{TX} par $\oplus$.

On peut vérifier que ∇^{TX} est une connexion, càd

$$\nabla^{TX}_U(fV) = f\nabla^{TX}_U V + (U\cdot f)\,V.$$

$$2\langle \nabla^{TX}_U V, W\rangle + 2\langle \nabla^{TX}_U W, V\rangle = \big(\langle [U,V], W\rangle - \langle [U,W], V\rangle + \dots\big) \quad (=0)$$

$$2U\langle V, W\rangle$$

$$+ \big(V\langle W, U\rangle - W\langle V, U\rangle + \cdots\big) \quad (=0)$$

$$+ \big(\langle T(U,V), W\rangle - \langle T(U,W), V\rangle + \cdots\big) \quad (=0)$$

$\Downarrow$

∇^{TX} est metrique.

$$2\langle \nabla^{TX}_U V - \nabla^{TX}_V U,\ W\rangle = 2\langle [U,V], W\rangle + \Big(\langle [W,U], U\rangle + \langle [W,U], V\rangle + \dots\Big) = 0$$

$2\langle T(U,V), W\rangle$

$$+\Big(\langle T(W,V), U\rangle + \langle T(W,U), V\rangle - \dots\Big) = 0$$

$$\nabla^{TX}_U V - \nabla^{TX}_V U - [U,V] = T(U,V) \qquad \#$$

II.6 connexion et courbure sur (X, g^{TX})

(X, g^{TX}) variété Riemannienne.

Déf : la connexion de Levi-Civita $\nabla^{TX,LC}$ est unique connexion metrique t.q. $T = 0$.

Déf : $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$

- $\nabla^{TX} f \in C^\infty(X, TX)$ gradient est déf par

$$\langle \nabla^{TX} f, \cdot \rangle = d^X f$$

- $\mathrm{Hess}(f) = \langle \nabla^{*_{TX,LC}}_{\cdot} d^X f, \cdot \rangle^{g^{TX}} \in C^\infty(X, T^*X \otimes T^*X)$

Prop : $U, V \in C^\infty(X, TX)$

- $\mathrm{Hess}(f)(U,V) = U \cdot (V \cdot f) - \left(\nabla^{TX,LC}_U V\right) \cdot f$
- $\mathrm{Hess}(f) \in C^\infty(X, S^2(T^*X))$.

Dém : $\mathrm{Hess}(f)(U,V) = \langle \nabla^{T^*X,LC}_U d^X f, V \rangle$

$= U \langle d^X f, V \rangle - \langle d^X f, \nabla^{TX,LC}_U V \rangle$

$= U \cdot (V \cdot f) - \nabla^{TX,LC}_U V \cdot f$

- $\mathrm{Hess}(f)(U,V) - \mathrm{Hess}(f)(V,U) = [U,V] f - \left(\nabla^{TX,LC}_U V - \nabla^{TX,LC}_V U\right) f$

$= -T(U,V) \cdot f = 0$ #.

Cor : $d = e^i \wedge \nabla^{\wedge T^*X,LC}_{e_i}$

Déf : $R^{TX,LC} = \left(\nabla^{TX,LC}\right)^2$ la courbure de Riemann.

$R^{TX,LC} \in \Omega^2(X, \mathrm{End}^{anti}(TX))$

si $A, B \in TX$, $U, V \in TX$, on a

- $R^{TX,LC}(A,B) = -R^{TX,LC}(B,A)$
- $\langle R^{TX,LC} U, V \rangle = -\langle R^{TX,LC} V, U \rangle$

Prop (Bianchi) $A, B, C \in TX$

1) $R^{TX,LC}(A,B)C + R^{TX,LC}(B,C)A + R^{TX,LC}(C,A)B = 0$

2) $\langle R^{TX,LC}(A,B)U, V \rangle_{g^{TX}} = \langle R^{TX,LC}(U,V)A, B \rangle_{g^{TX}}$

Dém : $\nabla = \nabla^{TX,LC}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{g^{TX}}$

$$R(A,B)C = \nabla_A \nabla_B C - \nabla_B \nabla_A C - \nabla_{[A,B]} C$$

$$R(B,C)A = \nabla_B \nabla_C A - \nabla_C \nabla_B A - \nabla_{[B,C]} A$$

$$+ R(C,A)B = \nabla_C \nabla_A B - \nabla_A \nabla_C B - \nabla_{[C,A]} B$$

$$= \nabla_A [B,C] + \nabla_B [C,A] + \nabla_C [A,B] \quad (T=0)$$

$$= [A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] \quad (T=0)$$

$$= 0$$

mq : 1) $\Rightarrow$ 2).

$$\langle R(A,B)U,V\rangle \overset{1)}{=} -\langle R(B,U)A,V\rangle - \langle R(U,A)B,V\rangle$$

$$= \langle R(B,U)V,A\rangle + \langle R(U,A)V,B\rangle$$

$$\overset{1)}{=} -\langle R(U,V)B,A\rangle - \langle R(V,B)U,A\rangle$$

$$-\langle R(A,V)U,B\rangle - \langle R(V,U)A,B\rangle$$

$$= 2\langle R(U,V)A,B\rangle + \langle R(V,B)A,U\rangle$$

$$+ \langle R(A,V)B,U\rangle$$

$$\overset{1)}{=} -R(B,A)V$$

$$= 2\langle R(U,V)A,B\rangle - \langle R(A,B)U,V\rangle$$

Def : $\langle \overset{TX}{R}{}^{LC}(\cdot,\cdot)\cdot,\cdot\rangle_{g^{TX}}$ est dit $(0,4)$-tenseur de Riemann.

Prop : $\langle \overset{TX}{R}{}^{LC}(\cdot,\cdot)\cdot,\cdot\rangle_{g^{TX}}$ est déterminé par

(*)
$$TX \times TX \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(U,V) \longmapsto \langle \overset{TX}{R}{}^{LC}(U,V)V,U\rangle_{g^{TX}}$$

Def $\langle R(v,\cdot)\cdot, v\rangle$ est sym.

car $\langle R(v,A)B, v\rangle = \langle R(B,v)v, A\rangle$

$= \langle R(v,B)A, v\rangle$

Donc, $\langle R(v,A)B, v\rangle$ est déterminé par

$\langle R(v,v)v, v\rangle$

$\langle R(\cdot,A)B,\cdot\rangle + \langle R(\cdot,B)A,\cdot\rangle$ est sym.

car $\langle R(v,A)B, V\rangle + \langle R(v,B)A, V\rangle$

$= \langle R(B,V)v, A\rangle + \langle R(A,V)v, B\rangle$

$= \langle R(V,B)A, v\rangle + \langle R(V,A)B, v\rangle$

Donc $\langle R(v,A)B, V\rangle + \langle R(v,B)A, V\rangle$ est déterminé

par $\langle R(v,A)B, v\rangle + \langle R(v,B)A, v\rangle$

$2\langle R(v,A)B, v\rangle$

Donc, déterminé par (*)

$\langle R(v,A)B + R(v,B)A, V\rangle$

$= \langle -R(A,B)v - R(B,v)A + R(v,B)A, V\rangle$

Donc $\langle -R(A,B)U + 2R(U,B)A, V\rangle$ est determiné par $\circledast$.

$\langle -R(U,B)A + 2R(A,B)U, V\rangle$ est determiné par $\circledast$.

Donc $3\langle R(A,B)U, V\rangle$ est determiné par $\circledast$ #

$x \in X$, $P_x \subset T_xX$ plan. $\quad \cos\theta\, U + \sin\theta\, V$, $-\sin\theta\, U + \cos\theta\, V$

$\{U, V\}$ B.O.N. P_x.

$\kappa(P_x) = \langle R^{TX,LC}(U,V)V, U\rangle_{g^{TX}}$ ne dépend pas de $\{U,V\}$

Def : $\kappa(P_x)$ est la courbure sectionnelle en P_x.

- $Gr_2(T_xX) = \{P_x \subset T_xX : \text{plan}\}$
- $Gr_2(TX) = \bigsqcup_{x\in X} Gr_2(T_xX)$ forme une fibration sur X.

Def : κ : $Gr_2(TX) \longrightarrow \mathbb{R}$, $P_x \longmapsto \kappa(P_x)$ est la courbure sectionnelle de (X, g^{TX})

$\{e_i\}$ BON de (TX, g^{TX})

Def. la courbure de Ricci $Ric \in C^\infty(X, S^2(T^*X))$

est donné par $Ric(\cdot,\cdot) = \sum_i \langle R^{TX,LC}(\cdot, e_i)e_i, \cdot \rangle_{g^{TX}}$

. la courbure scalaire $\underline{scal} \in C^\infty(X, \mathbb{R})$

est donné par $Scal = \sum_{i,j} \langle R^{TX,LC}(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle_{g^{TX}}$