Rappel : • E fibré vectoriel sur X

• $\nabla^E : C^\infty(X, E) \to \Omega^1(X, E)$ connexion

(op diff d'ordre 1, $\sigma(\nabla^E)(x, \xi) = \underbrace{i\xi \otimes}_{\in \mathrm{Hom}(E_x, T_x^* X \otimes E_x)}$)

• h^E : metrique hermitienne.

Def : la connexion adj $\nabla^{E'}$ pour h^E est une connexion sur E déf par

$$\text{(*)} \quad d^X \underset{h^E}{\langle} s_1, s_2 \underset{h^E}{\rangle} = \underset{h^E}{\langle} \nabla^{E'} s_1, s_2 \underset{h^E}{\rangle} + \underset{h^E}{\langle} s_1, \nabla^E s_2 \underset{h^E}{\rangle}$$

où $s_1, s_2 \in C^\infty(X, E)$.

Rq : $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $E_{|U_\alpha} = U_\alpha \times \mathbb{C}^r$

• $\nabla^E_{|U_\alpha} = d + \Gamma^E_\alpha$, $\nabla^{E'}_{|U_\alpha} = d + \Gamma^{E'}_\alpha$

• $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, \mathrm{End}(\mathbb{C}^r))$ auto > 0

$$\text{(*)}_{|U_\alpha} : \quad d^X \langle h^E_\alpha s_1, s_2 \rangle = \langle h^E_\alpha (d + \Gamma^{E'}_\alpha) s_1, s_2 \rangle + \langle h^E_\alpha s_1, (d + \Gamma^E_\alpha) s_2 \rangle$$

$\| \qquad \uparrow$ sur $\mathbb{C}^r$

$\langle d^X(h^E_\alpha s_1), s_2 \rangle + \langle h^E_\alpha s_1, d^X s_2 \rangle$

$\langle (d^X h^E_\alpha) s_2, s_2 \rangle + \langle h^E_\alpha d s_1, s_2 \rangle$

On a $d^X h^E_\alpha = h^E_\alpha \Gamma^{E'}_\alpha + {}^t\Gamma^E_\alpha h^E_\alpha$

Donc $$\boxed{\Gamma^{E'}_\alpha = (h^E_\alpha)^{-1}(d^X h^E_\alpha) - (R^E_\alpha)^{-1} \cdot {}^t\Gamma^E_\alpha \cdot R^E_\alpha}$$ #

. $h^E \in C^\infty(X, \bar{E}^* \otimes \bar{E}^*) = C^\infty(X, \mathrm{Hom}(E, \bar{E}^*))$

. $\nabla^{\mathrm{Hom}(E,\bar{E}^*)} h^E \in \Omega^1(X, \mathrm{Hom}(E, \bar{E}^*))$

. $\omega^E = (h^E)^{-1} \cdot \nabla^{\mathrm{Hom}(E,\bar{E}^*)} h^E \in \Omega^1(X, \mathrm{End}(E))$

Prop : 1) $\nabla^{E'} = (h^E)^{-1} \circ \nabla^{\bar{E}^*} \circ h^E$

2) $\omega^E \in \Omega^1(X, \underset{\text{auto}}{\mathrm{End}}(E))$

3) $\nabla^{E'} = \nabla^E + \omega^E$

Dém : 1)

$\Leftrightarrow$ $d^X \underbrace{\langle h^E s_1, \bar{s}_2 \rangle}_{\bar{E}^* \times \bar{E}} = \langle h^E \nabla^{E'} s_1, s_2 \rangle + \langle h^E s_1, \nabla^E s_2 \rangle$

$\langle \nabla^{\bar{E}^*}(h^E s_1), \bar{s}_2 \rangle + \langle h^E s_1, \overline{\nabla^E \bar{s}_2} \rangle$

$\overline{\nabla^E \bar{s}_2} = \nabla^E s_2$

Donc, $h^E \cdot \nabla^{E'} = \nabla^{\bar{E}^*} \cdot h^E \quad \Rightarrow 1)$.

3). $\nabla^{E'} = \underbrace{\left(h^E \right)^{-1} \circ \underbrace{\left(\nabla^{\bar{E}^*} \cdot h^E - h^E \circ \nabla^E \right)}_{\nabla^{\mathrm{Hom}(E, \bar{E}^*)} h^E}}_{\omega^E} + \nabla^E \quad \Rightarrow 3)$

2) $\circledast \Leftrightarrow d^X \langle s_1, s_2 \rangle_{h^E} = \langle \omega^E s_1, s_2 \rangle_{h^E} + \langle \nabla^E s_1, s_2 \rangle_{h^E} + \langle s_1, \nabla^E s_2 \rangle_{h^E}$

$$\langle s_1, \omega^E s_2 \rangle_{h^E} = \overline{\langle \omega^E s_2, s_1 \rangle_{h^E}}$$

$$= \overline{d^X \langle s_2, s_1 \rangle - \langle \nabla^E s_2, s_1 \rangle_{h^E} - \langle s_2, \nabla^E s_1 \rangle_{h^E}}$$

$$= d^X \underbrace{\overline{\langle s_2, s_1 \rangle}}_{\langle s_1, s_2 \rangle_{h^E}} - \langle s_1, \nabla^E s_2 \rangle_{h^E} - \langle \nabla^E s_1, s_2 \rangle_{h^E}$$

$$= \langle \omega^E s_1, s_2 \rangle_{h^E} \qquad \#$$

Def : ∇^E est une connexion métrique (hermitienne, unitaire) pour h^E si $\nabla^{E'} = \nabla^E$.

$$\left(\Leftrightarrow \quad d^X \langle s_1, s_2 \rangle_{h^E} = \langle \nabla^E s_1, s_2 \rangle + \langle s_1, \nabla^E s_2 \rangle \right)$$

Ex : si ∇^E, ∇^F sont métriques, toutes les connexions induites ∇^{E^*}, $\nabla^{\bar{E}}$, $\nabla^{E^{\otimes k}}$, $\nabla^{\Lambda^k E}$, $\nabla^{S^k E}$ --- sont métriques

$\nabla^{E \oplus F}$, $\nabla^{E \otimes F}$, $\nabla^{\mathrm{Hom}(E,F)}$ ---.

$\nabla^{f^* E}$

Prop : $\forall (E, h^E)$ $\exists$ ∇^E connexion métrique

si $\tilde{\nabla}^E$, ∇^E sont 2 connexions métriques alors

$$\tilde{\nabla}^E - \nabla^E \in \Omega^1(X, \mathrm{End}^{\mathrm{anti}}(E))$$

Dém : $\forall$ connexion ∇^E, $\nabla^E + \frac{1}{2}\omega^E$ est conn. métrique

car $d^X \langle s_1, s_2 \rangle_{h^E} = \underbrace{\langle \omega^E s_1, s_2 \rangle_{h^E}} + \langle \nabla^E s_1, s_2 \rangle_{h^E} + \langle s_1, \nabla^E s_2 \rangle_{h^E}$

$$\langle \tfrac{1}{2}\omega^E s_1, s_2 \rangle_{h^E} + \langle s_1, \tfrac{1}{2}\omega^E s_2 \rangle_{h^E}$$

$$= \langle (\nabla^E + \tfrac{1}{2}\omega^E) s_1, s_2 \rangle_{h^E} + \langle s_1, (\nabla^E + \tfrac{1}{2}\omega^E) s_2 \rangle_{h^E}$$

- $\circledast$ pr $\tilde{\nabla}^E$ − $\circledast$ pour ∇^E

$$0 = \langle (\tilde{\nabla}^E - \nabla^E) s_1, s_2 \rangle_{h^E} + \langle s_1, (\tilde{\nabla}^E - \nabla^E) s_2 \rangle_{h^E}$$

#

II.2| Transport parallèle.

(E, ∇^E) fibré vectoriel muni une connexion.

Def: $\dot{x} : [0,1] \xrightarrow{C^\infty} X$ une courbe C^∞

(i.e. $\exists \delta > 0$, $]-\delta, 1+\delta[\xrightarrow{C^\infty} X$)

- $u \in C^\infty([0,1], \dot{x}^*(E))$ une section C^∞ le long $\dot{x}$

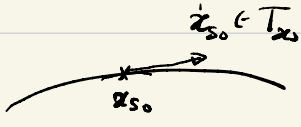
($\forall s \in [0,1]$, $u_s \in E_{x_s}$, $u = (u_s)_{s \in [0,1]}$ est une "famille C^∞" de vecteur dans $\bigsqcup_{s \in [0,1]} E_{x_s}$)

- $\dot{u} = \nabla^{\dot{x}^*(E)}_{\frac{\partial}{\partial s}} u \in C^\infty([0,1], \dot{x}^* E)$

($= $ formellement $\nabla^E_{\dot{x}} u$)

Ex: - $\forall s_0 \in [0,1]$, $(x_s)_{s_0 - \delta < s < s_0 + \delta}$ def $\dot{x}_{s_0} \in T_{x_{s_0}} X$

$\dot{x} = (\dot{x}_{s_0})_{s_0 \in [0,1]} \in C^\infty([0,1], \dot{x}^* TX)$ champ de vecteurs C^∞ le long $\dot{x}$.



$x_\cdot : [0,1] \longrightarrow X$

$x_* \left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = \dot{x}$

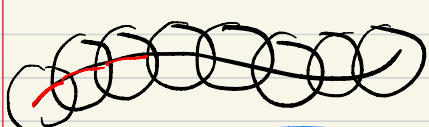
Def : $u_\cdot \in C^\infty([0,1], x^*E)$ est dite parallèle pour ∇^E si $\dot{u} = 0$

Rq : $x_\cdot \in U_\alpha$, $\dot{u}_s = \left(\frac{\partial}{\partial s} + \left\{\Gamma_\alpha^E(\dot{x})\right\}_{x_s}\right) u_s$

Prop : $\forall u_0 \in E_{x_0}$, $\exists !$ $u_\cdot \in C^\infty([0,1], x^*E)$ section parallèle t.q. $u_s|_{s=0} = u_0$

Dém : si $x_\cdot \in U_\alpha$, alors par l'EDO, $\exists !$ $u_\cdot \in C^\infty([0,1], \mathbb{C}^r)$ t.q.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial s} + \left\{\Gamma_\alpha^E(\dot{x})\right\}_s\right) u_s = 0 \\ u_s|_{s=0} = u_0 \end{cases}$$



#

$\left[\frac{\partial}{\partial s} + (\Gamma_\alpha^E|_{x_s})\right] v_s = 0$

$v_s|_{s=0} = v_0$

Donc $u_s + v_s$ est une section parallèle $(u_s+v_s)|_{s=0} = u_0 + v_0$

Def : $\tau_1^0 : E_{x_0} \longrightarrow E_{x_1}$ est un transport parallèle si

$\exists\, u \in C^\infty([0,1], \dot{x}^* E)$ parallèle t.q $\tau_1^0 u_0 = u_1$.

- $\tau_{s'}^{s} : E_{x_s} \longrightarrow E_{x_{s'}}$, $0 \leq s, s' \leq 1$.

Rq : $\tau_1^0 \in \mathrm{Hom}(E_{x_0}, E_{x_1})$

Rq : si $v_s \in C^\infty([0,1], E_{x_0})$, $(\tau_s^0 v_s)_{s \in [0,1]} \in C^\infty([0,1], \dot{x}^* E)$.

$$\nabla^E_{\frac{\partial}{\partial s}} (\tau_s^0 v_s) = \tau_s^0 \dot{v}_s$$

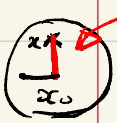
(si $x \in U_\alpha$, $\nabla^E_{\dot{x}} (\tau_s^0 v_s) = \left(\frac{\partial}{\partial s} + \Gamma^E(\dot{x})\right)(\tau_s^0 v_s)$

$= \underbrace{\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s} + \Gamma^E(\dot{x})\right)\tau_s^0\right\}}_{=0} \cdot v_s + \tau_s^0 \left(\frac{\partial}{\partial s} v_s\right)$

$= \tau_s^0 \dot{v}_s$)

Rq : le transport parallèle trivialise "canoniquement" E.

$x_0 \in X$, $B_{x_0}(\epsilon_0)$: boule euclidienne



$$B_{x_0}(\epsilon_0) \times E_{x_0} \longrightarrow E_{|B_{x_0}(\epsilon)}$$

$$(x, v) \longmapsto (x, \tau_x^{x_0} v)$$

Prop : (E, h^E) fibré hermitien

. ∇^E : connexion metrique

Alors $\tau_1^\circ : E_{x_0} \longrightarrow E_{x_1}$ est isométrique.

Dém : $u_0, v_0 \in E_{x_0}$

$$\frac{d}{ds} \langle \tau_s^\circ u_0 , \tau_s^\circ v_0 \rangle = \langle \underbrace{\nabla^{x^*F}_{\frac{\partial}{\partial s}} \tau_s^\circ u_0}_{=0}, \tau_s^\circ v_0 \rangle + \langle \tau_s^\circ u_0, \underbrace{\nabla^{x^*F}_{\frac{\partial}{\partial s}} \tau_s^\circ v_0}_{=0} \rangle$$

$$= 0$$

Donc $\langle \tau_1^\circ u_0 , \tau_1^\circ v_0 \rangle = \langle u_0, v_0 \rangle$ #

II.3| courbures

$\nabla^E : C^\infty(X, E) \longrightarrow \Omega^1(X, E)$ s'étend à

$$\nabla^E : \Omega^\cdot(X, E) \longrightarrow \Omega^{\cdot+1}(X, E)$$

t.q. $\nabla^E(\alpha \wedge s) = d^X\alpha \wedge s + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge \nabla^E s$

où $\alpha \in \Omega^\cdot(X, \mathbb{R})$, $s \in \Omega^\cdot(X, E)$,

$\nabla^E_{|U_\alpha} = d + \Gamma_\alpha : C^\infty(X, \mathbb{C}^r) \longrightarrow \Omega^1(X, \mathbb{C}^r)$

$$\Omega^\cdot(x, \mathbb{C}^r) \longrightarrow \Omega^{\cdot+1}(x, \mathbb{C}^r)$$

$$d + \Gamma_\alpha : \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ds_1 \\ \vdots \\ ds_r \end{pmatrix} + \Gamma_\alpha \wedge \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix}$$

Donc $\nabla^E = (d + \Gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ est bien def sur $\Omega^\cdot(x, E)$.

Rq : $(\nabla^E)^2 : \Omega^\cdot(x, E) \longrightarrow \Omega^{\cdot+2}(x, E)$

$$\sigma_2\left((\nabla^E)^2\right) = \sigma_1(\nabla^E)\,\sigma_1(\nabla^E) = i\xi \wedge i\xi = 0$$

Donc $(\nabla^E)^2 \in Diff^1$

Prop : $(\nabla^E)^2$ est d'ordre 0

Dém : $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$, $s \in \Omega^\cdot(x, E)$.

$$(\nabla^E)^2(fs) = \nabla^E\left(df \wedge s + f \nabla^E s\right)$$

$$= \underbrace{(d\,df)}_{=0} \wedge s - df \wedge \nabla^E s + df \wedge \nabla^E s + f \nabla^E \nabla^E s$$

$$= f (\nabla^E)^2 s$$

Donc $[(\nabla^E)^2, f] = 0$ #

Rq 1) $(\nabla^E)^2_{|U_\alpha} = (d + \Gamma^E_\alpha) \circ (d + \Gamma^E_\alpha)$

$= \underbrace{d\,d}_{=0} + \underbrace{d \circ \Gamma^E_\alpha + \Gamma^E_\alpha \cdot d}_{d\Gamma^E_\alpha} + \Gamma^E_\alpha \wedge \Gamma^E_\alpha$

$= d\Gamma^E_\alpha + \Gamma^E_\alpha \wedge \Gamma^E_\alpha$

$\left((d\Gamma^E_\alpha + \Gamma^E_\alpha d)(s) = d(\Gamma^E_\alpha s) + \Gamma^E_\alpha ds \right.$

$\left. = (d\Gamma^E_\alpha)s - \Gamma^E_\alpha ds + \Gamma^E_\alpha ds \right)$

2) $(\nabla^E)^2 : C^\infty(X, E) \longrightarrow \Omega^2(X, E)$

$s \longmapsto R^E s$

$R^E \in \Omega^2(X, End(E))$

3) $(\nabla^E)^2 : \Omega^\cdot(X, E) \longrightarrow \Omega^{\cdot+2}(X, E)$

$s \longmapsto R^E \wedge s$

Def : $R^E \in \Omega^2(X, End(E))$ est dite la courbure de ∇^E.

Prop : Si $U, V \in C^\infty(X, TX)$, Si $s \in C^\infty(X, E)$

$R^E(U, V)s = \nabla^E_U \nabla^E_V s - \nabla^E_V \nabla^E_U s - \nabla^E_{[U,V]} s$.

Dém : $\nabla^E_U \nabla^E_{V|U_\alpha} = (U \cdot + \Gamma^E(U))(V \cdot + \Gamma^E(V))$

$: C^\infty(U_\alpha, \mathbb{C}^r)$ $\nearrow$

$$= U \cdot V \cdot + U \circ \Gamma^E(V) + \Gamma^E(U) V \cdot + \Gamma^E(U)\Gamma^E(V)$$

$$\left(\nabla^E_U \nabla^E_V\right) - \left(\nabla^E_V \nabla^E_U\right) = [U,V] + U \circ \Gamma^E(V) - V \circ \Gamma^E(U)$$

$$+ \Gamma^E(U) V - \Gamma^E(V) U$$

$$+ \Gamma^E(U)\Gamma^E(V) - \Gamma^E(V)\Gamma^E(U)$$

$$= [U,V] + \left(U \cdot \Gamma^E(V)\right) - \left(V \cdot \Gamma^E(U)\right) + \Gamma^E(U)\Gamma^E(V) - \Gamma^E(V)\Gamma^E(U)$$

$$\left(\nabla^E_U \nabla^E_V - \nabla^E_V \nabla^E_U - \nabla^E_{[U,V]}\right)$$

$$= [U,V] + \left(U \cdot \Gamma^E(V)\right) - \left(V \cdot \Gamma^E(U)\right) + \Gamma^E(U)\Gamma^E(V) - \Gamma^E(V)\Gamma^E(U)$$

$$- \left([U,V] + \Gamma^E([U,V])\right)$$

$$= \left(U \cdot \Gamma^E(V) - V \cdot \Gamma^E(U) - \Gamma^E([U,V])\right) + \Gamma^E \wedge \Gamma^E(U,V)$$

$$= d\Gamma^E(U,V) + \Gamma^E \wedge \Gamma^E(U,V) = \left(d\Gamma^E + \Gamma^E \wedge \Gamma^E\right)(U,V)$$

#

Prop (Bianchi)

$$\left[\nabla^E, R^E\right] = 0$$

Ex (E, ∇^E, R^E) $\qquad \nabla^{E^*} = (d - {}^t\Gamma^E_\alpha)_{\alpha \in A}$

- R^{E^*} : la courbure pour conn induite est donnée par $-{}^tR^E$
- $R^{\bar{E}}$ — — — — — — — $\bar{R}^E$
- $R^{E^{\otimes k}}$ — — — — — — $R^E \otimes id \otimes \cdots + id \otimes R^E \otimes \cdots$

$$\nabla^E(s_1 \otimes s_2) = \nabla^E s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^E s_2$$

$$(\nabla^E)^2(s_1 \otimes s_2) = \nabla^E(\nabla^E s_1 \otimes s_2) + \nabla^E(s_1 \otimes \nabla^E s_2)$$

$$= R^E s_1 \otimes s_2 - \nabla^E s_1 \otimes \nabla^E s_2 + \nabla^E s_1 \otimes \nabla^E s_2 + s_1 \otimes R^E s_2 .$$

- $R^{S^k E}$, $R^{\Lambda^k E}$, $R^{E^{\otimes k}}$: $S^k E \longrightarrow S^k E$, $\Lambda^k E \longrightarrow \Lambda^k E$
- (F, ∇^F, R^F)

$R^{E \oplus F} = R^E \oplus R^F$, $R^{E \otimes F} = R^E \otimes id + id \otimes R^F$

$R^{Hom(E,F)} =$ ——

- $f : Y \longrightarrow X$, $R^{f^*E} = f^* R^E$ (car $\nabla^{f^*E} = (d + f^* \Gamma^E_\alpha)_{\alpha \in A}$)

Prop - (E, h^E) fibré hermitien

- ∇^E conn. metrique

Alg . $R^E \in \Omega^2(X, \underset{\text{anti}}{\text{End}}(E))$

Dém : $0 = d^X d^X \langle s_1, s_2 \rangle_{h^E} = d^X \langle \nabla^E s_1, s_2 \rangle + d^X \langle s_1, \nabla^E s_2 \rangle$

On va mq $d^X \langle \nabla^E s_1, s_2 \rangle = \langle R^E s_1, s_2 \rangle - \langle \nabla^E s_1, \nabla^E s_2 \rangle$

$$d^X \langle \nabla^E s_1, s_2 \rangle = \sum_i d^X \Big\{ \underbrace{\alpha_i}_{\in \Omega^1_c(X)} \langle \nabla^E_{U_i} s_1, s_2 \rangle \Big\}$$

$$= \sum_i (d^X \alpha_i) \langle \nabla^E_{U_i} s_1, s_2 \rangle - \alpha_i \underbrace{d^X \langle \nabla^E_{U_i} s_1, s_2 \rangle}_{\langle \nabla^E \nabla^E_{U_i} s_1, s_2 \rangle + \langle \nabla^E_{U_i} s_1, \nabla^E s_2 \rangle}$$

$$= \sum_i \Big\{ \underbrace{d^X \alpha_i \wedge \nabla^E_{U_i} s_1 - \alpha_i \nabla^E \nabla^E_{U_i} s_1}_{\nabla^E(\alpha_i \wedge \nabla^E_{U_i} s_1)}, s_2 \rangle - \langle \nabla^E s_1, \nabla^E s_2 \rangle$$

$$= \langle \nabla^E \nabla^E s_1, s_2 \rangle - \langle \nabla^E s_1, \nabla^E s_2 \rangle$$

$$= \langle R^E s_1, s_2 \rangle - \langle \nabla^E s_1, \nabla^E s_2 \rangle$$

$$d^{\nabla}\langle s_1, \nabla^E s_2\rangle = \langle \nabla^E s_1, \nabla^E s_2\rangle + \langle s_1, R^E s_2\rangle$$

Donc $\underbrace{\langle R^E s_1, s_2\rangle}_{h^E} + \underbrace{\langle s_1, R^E s_2\rangle}_{h^E} = 0$ #

$\nabla^E + \frac{1}{2}\omega^E$