VIII. Noyau de la chaleur via la théorie spectrale

Motivation :

- $X = pt$, $\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "P"] \arrow[dr] & & F \arrow[dl] \\ & pt & \end{tikzcd}$ Alors $\begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}$ est une superconn sur $\begin{array}{c} E \oplus F \\ \downarrow \\ pt \end{array}$

- $\mathrm{Trs}\left[e^{-t\begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}^2} \right]$ ne depend pas de t

$\xrightarrow{t \to \infty}$ $\mathrm{Ind}(P)$

$\xrightarrow{t \to 0}$ theorem d'indice.

But 1) def $e^{-t\begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}^2} = e^{-t\begin{pmatrix} P^*P & 0 \\ 0 & PP^* \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-tP^*P} & 0 \\ 0 & e^{-tPP^*} \end{pmatrix}$

2) def $\mathrm{Trs}\left[e^{-t\begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}} \right] = \mathrm{Tr}\big[\underbrace{e^{-tP^*P}}_{C^\infty(X,E)}\big] - \mathrm{Tr}\big[\underbrace{e^{-tPP^*}}_{C^\infty(X,F)}\big]$

3) Mq $\underbrace{\mathrm{Trs}\left[e^{-t\begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}} \right]}$ ne depend pas de t

4) $t \to +\infty$ $\longrightarrow$ $= \mathrm{Ind}(P)$

5) $t \to 0$?

VIII.1. Unicité de l'opérateur de la chaleur

- (X, g^{TX}) variété riem
- (E, h^E) fibré hermitien. $\qquad Q : C^\infty(X, E) \circlearrowleft$ diff

Def : On dit que $(u_t)_{t>0}$ vérifie l'eq de la chaleur avec la condition initiale $u_0 \in L^2(X, E)$ si

$$(*Q)\quad \begin{cases} \bullet\ u_\cdot(\cdot) \in C^\infty(]0, +\infty[\times X, \pi^* E) \\ \qquad\qquad (\pi :]0, +\infty[\times X \to X) \\ \bullet\ \dfrac{\partial}{\partial t} u_t = -Q u_t \text{ sur }]0, +\infty[\times X. \\ \bullet\ \lim\limits_{t \to 0} \| u_t - u_0 \|_{L^2} = 0 \end{cases}$$

Def : si $(*Q)$ admet une unique solution u_t $\forall u_0 \in L^2$, Alors on note

$$e^{-tQ} u_0 = u_t$$

op de la chaleur.

Prop : si ($* Q^*$) admet des solution v_t $\forall v_0 \in C^\infty$

Alors, si ($* Q$) admet une solution u_t pour $u \in L^2$

Alors, cette solution est unique.

Dém : si ($* Q$) admet 2 solutions $u_t^{(1)}, u_t^{(2)}$ pour $u \in L^2$,

Alors $\frac{\partial}{\partial s} \langle u_{t-s}^{(1)} - u_{t-s}^{(2)}, v_s \rangle$

$= \langle Q(u_{t-s}^{(1)} - u_{t-s}^{(2)}), v_s \rangle + \langle u_{t-s}^{(1)} - u_{t-s}^{(2)}, -Q^* v_s \rangle$

$= \langle u_{t-s}^{(1)} - u_{t-s}^{(2)}, Q^* v_s \rangle + \langle u_{t-s}^{(1)} - u_{t-s}^{(2)}, -Q^* v_s \rangle = 0$

$s \longrightarrow \langle u_{t-s}^{(1)} - u_{t-s}^{(2)}, v_s \rangle$ ne dépend pas de $s \in]0, t[$

$s \to 0$, $u_{t-s}^{(1)} - u_{t-s}^{(2)} \xrightarrow{L^2} u_t^{(1)} - u_t^{(2)}$

$v_s \xrightarrow{L^2} v_0$

Donc $\langle u_{t-s}^{(1)} - u_{t-s}^{(2)}, v_s \rangle \xrightarrow{s \to 0} \langle u_t^{(1)} - u_t^{(2)}, v_0 \rangle$

$s \to t$ $\langle u_{t-s}^{(1)} - u_{t-s}^{(2)}, v_s \rangle \xrightarrow{s \to t} \langle 0, v_t \rangle = 0$

Donc $\langle u_t^{(1)} - u_t^{(2)}, v_0 \rangle = 0$ $\forall v_0 \in C^\infty$

Donc $u_t^{(1)} - u_t^{(2)} = 0$ #

Cor : si $(* Q)$ et $(* Q^*)$ admett des soluti

Alors e^{-tQ} existe.

$(Q = Q^*)$.

Cor : si Q est sym, **Alors**

$(* Q)$ admet des soluti $\Rightarrow$ e^{-tQ} existe.

VIII.2. La théorie spectrale

- H = espace Hilbert
- $(A, \mathrm{Dom}(A))$ un op fermé

Def : $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$ si $\lambda - A : \mathrm{Dom}(A) \to \mathcal{H}$ bij et

$\cancel{(\lambda - A)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ est borné}}$.

Rq : $\mathrm{Dom}(A)$ est un espace Hilbert pour la norme

$$\|x\| + \|Ax\| \qquad x \in \mathrm{Dom}(A).$$

$(\lambda - A) : \mathrm{Dom}(A) \to \mathcal{H}$ bij $\Rightarrow (\lambda - A)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathrm{Dom}(A)$ borné

$\mathrm{Dom}(A) \hookrightarrow \mathcal{H}$ contin.

$\Rightarrow (\lambda - A)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ borné

Prop : si $(A, \mathrm{Dom}(A))$ est fermé, Alors

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \mathbb{C} \text{ est fermé}$$

Dém : Il faut que $\mathrm{Sp}(A)^c$ est ouvert

$\lambda_0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Alors $\lambda - A = \lambda - \lambda_0 + \underbrace{\lambda_0 - A}_{\text{inverse de } \mathrm{Dom}(A) \to H}$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{\left(I + (\lambda-\lambda_0)\underbrace{(\lambda_0 - A)^{-1}}_{\text{borné}}\right)}_{\|\cdot\| < 1 \text{ si } |\lambda-\lambda_0| < 1}}_{\text{inversible de } H \to H} (\lambda_0 - A)}_{\text{inversible de } \mathrm{Dom}(A) \to H}$$

$\Rightarrow \lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$ si $|\lambda - \lambda_0| \ll 1$ #

Rappel : $(A, \mathrm{Dom}(A))$ est auto-adj si $(A^*, \mathrm{Dom}(A^*)) = (A, \mathrm{Dom}(A))$.

Prop : $(A, \mathrm{Dom}(A))$ est auto-adj Alors

- $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$.

Dém : 1) $i \notin \mathrm{Sp}(A)$. $A - i$

- $u \in \ker(A - i) \Rightarrow u \in \mathrm{Dom}(A)$, $Au = iu$ $\Rightarrow \underbrace{\langle Au, u\rangle}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{i\langle u, u\rangle}_{\in i\mathbb{R}}$

$$\langle Au, u\rangle = \langle u, A^* u\rangle = \langle u, Au\rangle$$

<u>Donc</u> $u = 0 \Rightarrow \ker(A-i) = 0$

Rq : $\ker(A+i) = 0$

- $\mathrm{Im}(A-i) = \ker(A-i)^* = \ker(A+i) = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(A-i)$ est dense dans H.

- $\mathrm{Im}(A-i)$ est fermé

$$\|(A-i)u\|^2 = \langle (A-i)u, (A-i)u \rangle = \langle Au, Au \rangle$$
$$+ \cancel{\langle -iu, Au \rangle} + \cancel{\langle Au, -iu \rangle}$$
$$+ \langle u, u \rangle$$
$$= \|Au\|^2 + \|u\|^2.$$

<u>Donc</u> si $(A-i)u_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{Im}(A-i)$, <u>Alors</u> u_n est une suite de Cauchy dans $\mathrm{Dom}(A)$.

<u>Donc</u> $u_n \xrightarrow{\mathrm{Dom}(A)} u$ i.e. $u \in \mathrm{Dom}(A)$, $Au_n \xrightarrow{H} Au$

$\Rightarrow (A-i)u_n \xrightarrow{H} Au - iu \Rightarrow \mathrm{Im}(A-i)$ est fermé

$\Rightarrow \mathrm{Im}(A-i) = H.$

2) $a+bi \notin \mathrm{Sp}(A)$ si $b \neq 0$

car $i \notin Sp\left(\underbrace{\frac{A-a}{b}}_{\text{auto-adj}}\right)$

$\Rightarrow Sp(A) \subseteq \mathbb{R}$.

3) Si $Sp(A) = \emptyset$, Alb A^{-1} existe et borné

$\lambda \neq 0$, $\quad \lambda - A^{-1} = \underbrace{\lambda \underbrace{(A - \lambda^{-1})}_{\text{bij de } Dom(A) \to H} \underbrace{A^{-1}}_{\text{bij de } H \to Dom(A)}}_{\text{bij de } H \to H}$

$\Rightarrow Sp(A^{-1}) \subset \{0\}$.

$\|A^{-1}\| = \max_{\lambda \in Sp(A^{-1})} |\lambda| = 0 \Rightarrow A^{-1} = 0$ pas possible

#

Prop : $(A, Dom(A))$ auto-adj et $\langle Au, u\rangle \geq 0$ $\forall u \in Dom(A)$

Alors $Sp(A) \subseteq [0, +\infty[$.

Dém : Il suffit que $-1 \notin Sp(A)$.

- $u \in \ker(I + A) \Rightarrow \begin{cases} u = -Au \\ u \in Dom(A) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\langle Au, u\rangle}_{\geq 0} = \underbrace{-\langle u, u\rangle}_{\leq 0}$

$\Rightarrow |u| = 0 \Rightarrow u = 0$

$I + A$ est inj

- $\overline{\mathrm{Im}(I+A)} = \{\ker(I+A)^*\}^{\perp} = \{\ker(I+A)\}^{\perp}$

$= 0^{\perp} = H$

- $\|(I+A)u\|^2 = \langle u+Au, u+Au\rangle$

$= \|u\|^2 + \|Au\|^2 + \underbrace{\langle u, Au\rangle + \langle Au, u\rangle}_{\geq 0}$

$\geq \|u\|^2 + \|Au\|^2.$

m̂ methode
$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(I+A)$ est fermé

Donc $\mathrm{Im}(I+A) = H$ #

Thm ⊕ $(A, \mathrm{Dom}(A))$ auto-adj. Alors

$\exists!$ morphisme d'algèbres op linéa et borné

$$L^\infty(Sp(A), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$
$$f \longmapsto f(A)$$

t.q
- $\bar{f}(A) = f(A)^*$

- $\dfrac{1}{z-\lambda} \longmapsto (A-\lambda)^{-1}$ si $\lambda \notin Sp(A)$

- $\xi \in H$ avec $\|\xi\| = 1$ Alors

$E \longmapsto \mu_\xi(E) = \langle \mathbb{1}_E \xi, \xi\rangle$ défin une mesure sur $Sp(A)$

Borélie

$$\bullet \ \langle f(A)\xi, \xi \rangle = \int_{\lambda \in Sp(A)} f(\lambda) \, d\mu_\xi(\lambda)$$

Rq : 1) si $f : Sp(A) \to \mathbb{R}$ Alb $f(A)$ est auto-adj

2) si $f : Sp(A) \to \mathbb{R}$, Alb

$$\|f(A)\| = \sup_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \in H}} |\langle f(A)\xi, \xi \rangle| \leq \int_{\lambda \in Sp(A)} |f(\lambda)| \, d\mu_\xi(\lambda)$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty}$$

3) $\langle \mathbb{1}_E \xi, \xi \rangle = \langle \mathbb{1}_E \cdot \mathbb{1}_E \xi, \xi \rangle = \langle \mathbb{1}_E \xi, \mathbb{1}_E \xi \rangle \geq 0$

On va mq notre thm quand.

- $(A, Dom(A))$ est auto-adj, positive $\langle Au, u \rangle \geq 0$ et
- $Dom(A) \circlearrowright\circlearrowright H$ (compact).

Rappel

Thm : $K : H \to H$ compact, auto-adj, positive, $\dim \operatorname{Im} K = +\infty$

Alors. $\exists \ \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \cdots > 0$ t.q $\mu_n \downarrow 0$

- $\exists \ v_1, v_2, v_3, \cdots$ BON de $\overline{\operatorname{Im} K}$

t.q $K v_n = \mu_n \cdot v_n$.

Thm : $(A, \mathrm{Dom}(A))$ est auto-adj, positive, et $\mathrm{Dom}(A) \subset\subset H$

Alors . $\exists\ 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \uparrow +\infty$

. $\exists\ \phi_1, \phi_2 \ldots$ BON de H.

t.q . $\phi_n \in \mathrm{Dom}(A)$ et $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$.

Dém : $(1+A)^{-1} : H \xrightarrow{\text{continuous}} D(A) \xrightarrow{\text{compact}} H$ compact.

. $\overline{\mathrm{Im}(1+A)^{-1}} = \overline{D(A)} = H$.

. $\exists\ \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \downarrow 0$ t

. $\exists\ \phi_1, \phi_2 \ldots$ BON de H

t.q $(1+A)^{-1}\phi_n = \mu_n \phi_n \in \mathrm{Dom}(A)$

$$\phi_n = \mu_n (1+A)\phi_n$$

$$\Rightarrow A\phi_n = \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_n} - 1\right)}_{\lambda_n} \phi_n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle A\phi_1, \phi_1 \rangle}_{\geq 0} = \lambda_1 \underbrace{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}_{\geq 0} \Rightarrow \lambda_1 \geq 0$$

#

Dém du thm ⊕, plus $(A, \mathrm{Dom}(A))$ auto-adj, positive, $\mathrm{Dom}(A) \subset\subset H$.

. $\mathrm{Sp}\, A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$

On pose $f(A)u = \sum f(\lambda_n) \langle u, \phi_n \rangle \phi_n$

- $\|f(A)u\|^2 = \sum_n |f(\lambda_n)|^2 |\langle u, \phi_n \rangle|^2$

$$\leq \|f\|_{L^\infty}^2 \sum_n |\langle u, \phi_n \rangle|^2 = \|f\|_{L^\infty}^2 \|u\|^2$$

$\Rightarrow$ $f(A)$ est borné.

- $\xi \in H$ t.q $\|\xi\| = 1$ Alors

$$\mu_\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \xi, \phi_n \rangle|^2 \, \delta_{\lambda_n}$$

$$\langle f(A)\xi, \xi \rangle = \sum f(\lambda_n) |\langle \xi, \phi_n \rangle|^2$$

$$= \sum_n \int_{Sp(A)} f \; |\langle \xi, \phi_n \rangle| \, \delta_{\lambda_n} = \int_{Sp(A)} f \, d\mu_\xi$$

#

Rq : Si $Sp(A) \subseteq \mathbb{R}_+$ Alors

e^{-tA} peut être déf par le thm (*).

car $e^{-tz} \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$.

t fix, fonction z.