VI. L'opérateur de Fredhlom

E, F sont 2 espace de Hilbert

Def : un op borné $A : E \to F$ est Fredhlom si
- $\dim \ker A < +\infty$
- $\dim \underbrace{\operatorname{coker} A}_{F/\operatorname{Im} A} < +\infty$

- Dans ce cas, $\operatorname{Ind}(A) = \dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A$
$\in \mathbb{Z}$.

Rappel : Thm des applications ouvrets :
$A : E \to F$ borné, surj, Alors A est ouvret
$\left(\text{i.e., } \exists\, \delta > 0 \text{ t.q } A\, B^E(0,1) \supset B^F(0, \delta) \right)$

Cor : $A : E \to F$ borné, bij Alors A^{-1} est borné
$(\|A^{-1}\| \leq \delta^{-1})$

Prop : Si $A : E \to F$ est Fredhelm Als
1) $\operatorname{Im} A$ est fermé
2) $E/\ker A \simeq \operatorname{Im} A$ (comme un espace Hilbert)

Dém : 1) => 2) trivial.

1) $E = \ker A \overset{\perp}{\oplus} (\ker A)^{\perp}$ (car $\ker A$ fermé)

comme $\mathrm{coker}\, A$ est de dim fini

$\exists\, G \subseteq F$ ss-espace t.q $\dim G = \dim \mathrm{coker}\, A$ et

$$F = \mathrm{Im}\, A \overset{alg}{\oplus} G$$

$$\tilde{A} : \begin{array}{rcl} (\ker A)^{\perp} \oplus G & \longrightarrow & F \\ (e, g) & \longmapsto & Ae + g \end{array}$$

Donc : $\tilde{A}$ est borné, car $\|Ae + g\| \leq \|A\| \|e\| + \|g\|$
$\leq C(\|e\| + \|g\|)$

- $\tilde{A}$ est surj car $F = \mathrm{Im}\, A \oplus G$
- $\tilde{A}$ est inj car $Ae + g = 0 \Rightarrow Ae = 0$ et $g = 0$
$\Rightarrow e = 0$ et $g = 0$

Donc $(\tilde{A})^{-1}$ est borné.

$$\mathrm{Im}\, A = \tilde{A}\,(\ker A)^{\perp} = \underbrace{\left((\tilde{A})^{-1}\right)^{-1}}_{\text{conti.}} \underbrace{(\ker A)^{\perp}}_{\text{fermé}} \quad \text{fermé}$$

#

Rq : $\mathrm{coker}\, A = F/\mathrm{Im}\, A \underset{\text{car } \mathrm{Im}\, A \text{ fermé}}{=} (\mathrm{Im}\, A)^{\perp} = \ker A^*$

car $u \in \ker A^* \Leftrightarrow A^* u = 0 \Leftrightarrow \forall v,\ \langle A^* u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \underset{\forall v}{\langle u, Av \rangle = 0}$

$\Leftrightarrow u \perp \mathrm{Im}\, A \Leftrightarrow u \in (\mathrm{Im}\, A)^{\perp}$

Rq : $\mathrm{Ind}(A) = \dim \ker A - \dim \ker A^*$.

<u>Thm principal</u> : E, F, G espaces de Hilbert

1) (Caractérisation)

$$A : E \to F \text{ Fredholm} \iff \exists B : F \to E \text{ borné t.q } \begin{cases} AB = \mathrm{Id}_F + R_1 \\ BA = \mathrm{Id}_E + R_2 \end{cases}$$

avec R_1, R_2 de rg fini

($\dim \mathrm{Im}\, R_i < +\infty$)

2) (propriété algébrique)

- $A : E \to F$ Fredholm $\Rightarrow$ $A^* : F \to E$ Fredholm, $\mathrm{Ind}\, A^* = -\mathrm{Ind}\, A$

- $\left.\begin{array}{l} A : E \to F \\ B : F \to G \end{array}\right\}$ Fredholm $\Rightarrow$ $BA : E \to G$ Fredholm

  $\mathrm{Ind}\, BA = \mathrm{Ind}\, B + \mathrm{Ind}\, A$.

3) (Stabilité) $A : E \to F$ Fredholm

- $B : E \to F$ borné, $\|B\| \ll 1$ Alors $A + B$ Fredholm t.q

  $\mathrm{Ind}(A+B) = \mathrm{Ind}(A)$

- $K : E \to F$ compact, Alors $A + K$ Fredholm t.q

  $\mathrm{Ind}(A+K) = \mathrm{Ind}(A)$

Rq : $K : E \to F$ compact si $\overline{K\, B(0,1)}$ est compact.

Rq • $\mathrm{Fred}(E,F) \subset (\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{op})$ ouvert

• $\mathrm{Ind} : \mathrm{Fred}(E,F) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est localement constant.

Rq : si $\dim E$, $\dim F < +\infty$, on

$$\mathrm{Ind}(A) = \dim E - \dim F$$

$$\left(\Leftrightarrow \; E/\ker A \simeq F \right)$$

<u>Dém</u> : 1 $\Rightarrow$)

$A : E \to F$ Fredholm. $\quad E = \ker A \oplus (\ker A)^{\perp}$

$\quad F = \mathrm{Im} A \oplus (\mathrm{Im} A)^{\perp}$

$$A = \begin{array}{c|c} & \ker A \quad (\ker A)^{\perp} \\ \begin{array}{c}(\mathrm{Im}A)^{\perp} \\ \mathrm{Im}A\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|c} & (\mathrm{Im}A)^{\perp} \quad \mathrm{Im}A \\ \begin{array}{c}\ker A \\ (\ker A)^{\perp}\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & *^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>Donc</u>

$$AB = \begin{array}{c|c} & (\mathrm{Im}A)^{\perp} \quad \mathrm{Im}A \\ \begin{array}{c}(\mathrm{Im}A)^{\perp} \\ \mathrm{Im}A\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_d \end{pmatrix} \end{array} = I_F - \begin{pmatrix} I_{(\mathrm{Im}A)^{\perp}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{array}{c|c} & \ker A \quad (\ker A)^{\perp} \\ \begin{array}{c}\ker A \\ (\ker A)^{\perp}\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_d \end{pmatrix} \end{array} = I_E - \begin{pmatrix} I_{\ker A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{. de rg fini}$$

1 $\Leftarrow$).

$BA = I + R_2 \Rightarrow \ker A \subseteq \ker(I + R_2) \subseteq \mathrm{Im}\, R_2 \to$ dim fini

$u \in \ker(I + R_2) \Rightarrow u = -R_2 u \Rightarrow u \in \mathrm{Im}\, R_2$

$AB = I + R_1 \Rightarrow B^* A^* = I + R_1^* \Rightarrow \ker A^* \subseteq \mathrm{Im}\, R_1^* \to$ dim fini

3) Stabilité par une pertubation petite.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 + A_4 \end{pmatrix}$$

Si $\|B\| << 1$

$A_4 + B_4$ inversible

$$\begin{pmatrix} Id & -B_2(B_4+A_4)^{-1} \\ & Id \end{pmatrix} (A+B) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & B_4 + A_4 \end{pmatrix}$$

matrice de de dim fini

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Id & * \\ 0 & Id \end{pmatrix}}_{\text{inversible}} (A+B) \underbrace{\begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}}_{\text{inversible}} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & \underbrace{B_4 + A_4}_{\text{inversible}} \end{pmatrix}$$

Donc
- $A+B$ est Fredholm.
- $\mathrm{Ind}(A+B) = \mathrm{Ind}(*) = \dim \ker A - \dim (\mathrm{Im}\, A)^{\perp}$
  $= \mathrm{Ind}(A)$

3) Stabilité par une pertubation compacte.

- A Fredholm, K compact
- $\exists\, B$ t.q $BA = I + R$

R ⟵ Rang fini

$$\underline{\text{Donc}} \quad B(A+K) = BA + BK = I + \underbrace{R}_{\text{comp.}} + \underbrace{BK}_{\text{compact}} = I + \overset{\text{compact}}{K_1}$$

- $\ker(A+K) \subseteq \ker B(A+K) \subseteq \ker(I+K_1)$

<u>Donc</u> si $u \in \ker(I+K_1)$ avec $\|u\| \leq 1$

$$\Rightarrow u + K_1 u = 0 \Rightarrow u = -K_1 u \in K_1 \underset{H_1}{B(0,1)}$$

$$\Rightarrow \underset{\ker(I+K_1)}{B(0,1)} \subseteq \underbrace{K\, \underset{H_1}{B(0,1)}}_{\text{précompact}} \Rightarrow \overline{\underset{\ker(I+K_1)}{B(0,1)}} \text{ compact}$$

$$\Rightarrow \dim \ker(I+K_1) < +\infty$$

- $\ker(A+K)^* = \ker(A^* + K^*) \to \dim \text{fini}$ $\Rightarrow$ $A+K$ est Fredholm.

$\left(A + tK\right)_{0 \leq t \leq 1}$ une famille C^0 des op de Fredholm

<u>Donc</u> : $\text{Ind}(A+K) = \text{Ind}(A+tK) = \text{Ind}(A)$

<u>4|</u> $A : E \to F$, $B : F \to G$ Fredholm.

$\ker(BA) \subseteq \ker A \to \dim$ fini

$\ker(BA)^* = \ker A^* B^* \subseteq \ker B^* \to \dim$ fini

Donc, BA est Fredholm.

$$\begin{array}{c|cc} & F & F \\ \hline F & & \\ G & & \end{array}\!\!\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} F \\ F \end{array}\!\!\overset{\quad F \qquad\qquad F}{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \cdot \begin{array}{c} F \\ F \end{array}\!\!\overset{\quad E \qquad F}{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}} = I_\theta$$

__Donc__ : $I_\theta : E \oplus F \longrightarrow F \oplus G$ une famille C^0 des op de Fredholm.

$$\mathrm{Ind}(I_0) = \mathrm{Ind}(I_{\pi/2})$$

- $I_0 = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ind}(I_0) = \mathrm{Ind}\,A + \mathrm{Ind}\,B.$

- $I_{\pi/2} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ BA & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{Ind}(I_{\pi/2}) = \mathrm{Ind}(BA)$ #