VII. Opérateur elliptique

Question : $P : C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, F)$ elliptique.

P est Fredholm ?

↕

pour quel espace Hilbert

Rq : P n'est un op borné de $L^2 \to L^2$.

VII.1. Opérateur non borné abstrait

Def: Si H_1, H_2 sont 2 espaces Hilbert

$(A, \mathrm{Dom}(A))$ est un op non borné de H_1 à H_2 si

1) $\mathrm{Dom}(A) \subseteq H_1$ dense

2) $A : \mathrm{Dom}(A) \to H_2$ linéaire.

Def: on dit que $(A, \mathrm{Dom}(A)) \leq (B, \mathrm{Dom}(B))$ si

- $\mathrm{Dom}(A) \subseteq \mathrm{Dom}(B)$
- $B|_{\mathrm{Dom}(A)} = A$.

Def. $(A, \mathrm{Dom}(A))$ est fermé si

$$\left.\begin{array}{l} \forall x_n \in \mathrm{Dom}(A) \text{ t.q} \\ x_n \xrightarrow{H_1} x \\ A x_n \xrightarrow{H_2} y \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \mathrm{Dom}(A) \text{ et } Ax = y.$$

- $(A, \mathrm{Dom}(A))$ est fermable si $\exists\, (B, \mathrm{Dom}(B))$ fermé t.q $(A, \mathrm{Dom}(A)) \leq (B, \mathrm{Dom}(B))$

- Si $(A, \mathrm{Dom}(A))$ est fermable Alors $(\bar{A}, \mathrm{Dom}(\bar{A}))$ est déf par

  - $\mathrm{Dom}(\bar{A}) = \bigcap_{\substack{(B, \mathrm{Dom}(B)) \text{ fermé} \\ \geq (A, \mathrm{Dom}(A))}} \mathrm{Dom}(B)$

  - si $u \in \mathrm{Dom}(\bar{A})$, $\bar{A}u = Bu$, pour certain B

Rq : si A est fermable, alors

$$\overline{\text{Graph}(A)} = \text{Graph}(\bar{A})$$

$\overline{\text{Graph}(A)} \subseteq H_1 \times H_2$

Def : $(A, \text{Dom}(A))$ est un op non-borné de H_1 à H_2.
On déf $(A^*, \text{Dom}(A^*))$ par

- $\text{Dom}(A^*) = \{ v \in H_2 \text{ t.q } \exists C > 0, \forall u \in \text{Dom}(A), |\langle Au, v \rangle| \leq C \|u\| \}$
- si $v \in \text{Dom}(A^*)$, par $u \in \text{Dom}(A) \to \langle Au, v \rangle$ est une forme linéaire bornée sur $\text{Dom}(A)$, comme $\overline{\text{Dom}(A)} = H_1$
Donc, elle déf une forme linéaire bornée sur H_1.
par le thm de Riesz, $\exists\, v^* \in H_1$ t.q

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, v^* \rangle \quad \forall u \in \text{Dom}(A).$$

On pose $A^* v = v^*$.

Rq : $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle$ pour $u \in \text{Dom}(A)$, $v \in \text{Dom}(A^*)$.

Rq : $(x, y) \perp \text{Graph}(A) \Leftrightarrow \langle (x, y), (u, Au) \rangle_{H_1 \times H_2} = 0 \quad \forall u \in \text{Dom}(A)$

$\Leftrightarrow \langle x, u \rangle_{H_1} + \langle y, Au \rangle_{H_2} = 0 \quad \forall u \in \text{Dom}(A)$

$\Leftrightarrow y \in \text{Dom}(A^*)$ et $x + A^* y = 0$

$\Rightarrow |\langle y, Au \rangle| = |\langle x, u \rangle| \leq \|x\| \|u\|$

$\Leftrightarrow (y, -x) \in \mathrm{Graph}(A^*) \subseteq H_2 \times H_1$

$V : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_2 \times H_1$ isométrie

$(x, y) \longmapsto (-y, x)$

Donc $V\,\mathrm{Graph}(A)^{\perp} = \mathrm{Graph}(A^*)$

question : $(A, \mathrm{Dom}(A))$ non-borné $\rightsquigarrow (A^*, \mathrm{Dom}(A^*))$ est un op non-borné

Prop : Si $(A, \mathrm{Dom}(A))$ est fermé, Alors

1) $\mathrm{Dom}(A^*)$ est dense.
2) $(A^*, \mathrm{Dom}(A^*))$ est fermé
3) $(A^{**}, \mathrm{Dom}(A^{**})) = (A, \mathrm{Dom}(A))$.

Dém : 1) $y \in (\mathrm{Dom}(A^*))^{\perp} \subset H_2$, Il faut que $y = 0$

$(y, u) = 0 \quad \forall\, u \in \mathrm{Dom}(A^*)$

$\langle (y, 0), (u, A^* u) \rangle = \langle y, u \rangle = 0 \qquad \forall\, u \in \mathrm{Dom}(A^*)$

Donc $(y, 0) \in \mathrm{Graph}(A^*)^{\perp} = (V\,\mathrm{Graph}(A)^{\perp})^{\perp}$

$= V\,\mathrm{Graph}(A)^{\perp\perp}$

$= V\,\overline{\mathrm{Graph}(A)}$

$\overline{\text{Graph}(A)}$ $\overset{A \text{ fermé}}{=}$ $\text{Graph}(\bar{A})$

$(0, -y) = V^{-1}(y, 0) \in \text{Graph}(A) = \text{Graph}(\bar{A})$

Donc $-y = \bar{A} \cdot 0 \Rightarrow \quad \Rightarrow y = 0.$

2| $\text{Graph}(A^*) = V\,\text{Graph}(A)^{\perp}$ est fermé

Donc A^* est fermé

3| $\text{Graph}(A^{**}) = V\,\text{Graph}(A^*)^{\perp}$

$= V\left(V\,\text{Graph}(A)^{\perp}\right)^{\perp}$

$(x, y) \xrightarrow{V} (-y, x)$

$\downarrow V$

$(-x, -y)$

$= V \circ V\,\text{Graph}(A)^{\perp\perp}$

$= -\overline{\text{Graph}(A)} = -\text{Graph}(\bar{A})$

$= \text{Graph}(\bar{A})$

Donc $A^{**} = \bar{A} = A$ #

Def : un op non-borné $(A, \text{Dom}(A))$ de H à H est auto-adj si $(A, \text{Dom}(A)) = (A^*, \text{Dom}(A^*))$.