# Introduction à la theorie d'indice d'Atiyah-Singer

## I| Introduction

But : donner l'énoncé du thm d'Atiyah-Singer

### I.1| Rappel : variété et fibré vectoriel.

convention : variété est $C^\infty$ et de dim finie

fibré vectoriel est de rang finie

Def : un espace top $X$ est une variété de dim $m$

si 1) $X$ est Hausdorff

2) $X$ est à base dénombrable

3) $X$ est localement euclidien, i.e.

- $\exists\ X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ recouvrement ouvert
- $\exists\ V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$ ouvert et $\varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow[\sim]{\text{homéo}} V_\alpha$
- si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$\begin{array}{ccc} \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}} & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ \cap\!\! | & & \cap\!\! | \\ \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^m \end{array} \quad \text{est}$$

un difféomorphisme.

Re : 1) $X$ est paracompact, si $\forall\ X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ recouvrement ouvre, $\exists$ un recouvrement ouvert $X = \bigcup_{\beta \in B} U'_\beta$ raffiné, qui est localement finie.

( i.e, $\forall \beta, \exists\ \alpha$ t.q $U'_\beta \subset U_\alpha$ )

2) $\left.\begin{array}{l}\text{Hausdorff} \\ \text{à basé dénombrable} \\ \text{localement compact}\end{array}\right\} \Rightarrow$ paracompact

$\left.\begin{array}{l}\text{Hausdorff} \\ \text{paracompact} \\ \text{localement metrizable}\end{array}\right\} \Leftrightarrow$ metrizable

Prop : $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ recouvrement ouvert, Alors

1) si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est localement fini, Alors $\exists\ \varphi_\alpha \in C^\infty(X, [0,1])$

t.q
- $\operatorname{Supp} \varphi_\alpha \subseteq U_\alpha$
- $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha = 1$

2) En generale, $\exists \left\{ \varphi_\beta \in C^\infty(X, [0,1]) \right\}_{\beta \in B}$ t.q
- $\forall \beta \in B, \exists\ \alpha \in A$ t.q $\operatorname{Supp} \varphi_\beta \subseteq U_\alpha$
- $\sum_{\beta \in B} \varphi_\beta = 1$ ou la somme est localement fini.

Rq 1) $\left.\begin{array}{l}\text{Hausdorff} \\ \text{paracompact}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \exists$ partition d'unité

Rq 2) On utilise la partion d'unité pour construire des obj globales à partir des obj locales.

**Def :** $\pi : E \longrightarrow X$ est un fibré vectoriel complexe de rang $r$

si 1) $E$, $X$ variété, $\pi$ est $C^\infty$

2) $\exists\ X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ recouvrement ouvert t.q

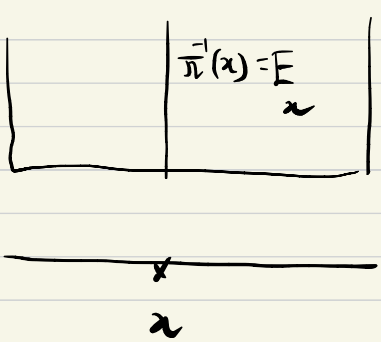
- $\forall \alpha, \exists\ \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\text{diffeo}} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ t.q

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U_\alpha \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

3) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\exists\ \psi_{\beta\alpha} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, GL_r(\mathbb{C}))$

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[dl, "\psi_\alpha"'] \arrow[dr, "\psi_\beta"] & \\ U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^r \arrow[rr, "\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}", "\text{diffeo}"'] & & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^r \end{tikzcd}$$

$$(x, v) \longmapsto (x, \psi_{\beta\alpha}(x) \cdot v)$$

Rq. 1) 

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

On a $E = \bigsqcup_{x \in X} E_x$ un famille d'espace vectoriel.

2) • $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}$ (*)

Rq • Si $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\nu \neq \emptyset$, Alors

$$(**) \quad \psi_{\nu\beta}\circ\psi_{\beta\alpha} = \psi_{\nu\alpha} \quad \text{sur} \quad U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\nu.$$

3) Si on a $\psi_{\alpha\beta}\in C^\infty(U_\alpha\cap U_\beta, GL_r(\mathbb{C}))$ t.q (*)(**), Alors,

$$E = \bigsqcup_\alpha U_\alpha\times\mathbb{C}^r \Big/ \sim \qquad (x,v)\sim(y,w) \iff \begin{cases} \cdot\ x=y \\ \cdot\ \alpha,\beta \text{ t.q } x\in U_\alpha,\ y\in U_\beta,\ w=\psi_{\beta\alpha}(x)v \end{cases}$$

Def : Si E est un fibré vectoriel déf par $\psi_{\beta\alpha}$, Alors

- $E^* = \bigsqcup_{x\in X} E_x^*$ est déf par ${}^t\psi_{\beta\alpha}^{-1}$
- $\bar E = \bigsqcup_{x\in X}\bar E_x$ - - - - - - - $\overline{\psi_{\beta\alpha}}$
- $E^{\otimes k}$ k-tenseur
- $S^k(E), \Lambda^k(E)\subseteq E^{\otimes k}$ tensor sym et anti-Sym.

Si E, F sont 2 fibré vectoriels déf par $\psi^E_{\beta\alpha}$, $\psi^F_{\beta\alpha}$, Alors

- $E\otimes F = \bigsqcup_{x\in X} E_x\otimes F_x$ est déf par $\psi^E_{\beta\alpha}\otimes\psi^F_{\beta\alpha}$
- $Hom(E,F) = E^*\otimes F$ - - - - - - ${}^t(\psi^E_{\beta\alpha})^{-1}\otimes\psi^F_{\beta\alpha}$

Si $f: Y\to X$, $f^*E = \bigsqcup_{y\in Y} E_{f(y)}$ est déf par $\psi_{\beta\alpha}\circ f$.

Def • $C^\infty(X,E) = \{S: X\xrightarrow{C^\infty} E \text{ t.q. } \pi S(x) = x\}$ l'espace des sections


- $S = \{S(x)\}_{x\in X}$ famille des élé dans $\bigsqcup_{x\in X} E_x$.

- $S\in C^\infty(X,E) \iff (S_\alpha)_{\alpha\in A}$ avec $S_\alpha\in C^\infty(U_\alpha,\mathbb{C}^r)$ t.q $\psi_{\beta\alpha}(x)S_\alpha(x) = S_\beta(x)$.

**Def** : • $h^E$ est une metrique hermitienne sur $E$ si

• $h^E \in C^\infty(X, E^* \otimes \overline{E}^*)$

• $h^E = (h^E_x)_{x \in X}$ t.q $\forall x \in X$, $h^E_x$ est une metrique hermitionne sur $E_x$.

• $(E, h^E)$ un fibré vectoriel hermitien.

**Prop** : metrique hermitienne existe toujours

**Dém** • $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, localement finie, $\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow[\sim]{\psi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$

• la metrique hermitienne standard sur $\mathbb{C}^r$ induite une metrique hermitienne $h_\alpha$ sur $\pi^{-1}(U_\alpha)$ par $\psi_\alpha$.

• $h^E = \sum_\alpha \varphi_\alpha h_\alpha$ ( $\varphi_\alpha$ partion d'unité ) #

**Prop** • $E, F$ 2 fibré vectoriel complexe

• $D : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(X, F)$ op $\mathbb{C}$ - linéaire t.q

$\forall f \in C^\infty(X)$, $S \in C^\infty(X, E)$, on a

$$D(fs) = f \cdot Ds \iff [D, f] = 0$$

Alors, $\exists A \in C^\infty(X, \mathrm{Hom}(E, F))$ t.q

$$[DS](x) = A(x) \cdot S(x)$$

**Dém** : Etape 1 : $D$ est localement déf. i.e, $\forall x \in X$

Si $S_1 = S_2$ sur certaine voisinage $U_x$ de $x$.

Alors $DS_1 = DS_2$ sur certaine voisinage $V_x$ de $x$.

On prend $f \in C^\infty_c(U_x, \mathbb{R})$ t.q

$f = 1$ sur $\overline{W_x} \subset U_x$.

Alors $\quad f\, DS_1 = D f s_1 \underset{\uparrow}{=} D f s_2 = f D s_2$

$$f s_1 = f s_2$$

Donc $\quad DS_1 = DS_2$ sur $W_x$.

Etape 2 : Si $D$ est localement déf Alors

$D|_U : C^\infty(U, E) \longrightarrow C^\infty(U, F)$
est bien déf.

$S \in C^\infty(U, E)$, $x \in U$, $f \in C^\infty_c(U_x)$, $f = 1$ sur $\overline{W_x} \subset U_x$.

$$DS(x) \overset{\text{def}}{=\!=} D(\underset{\uparrow \atop \in\, C^\infty(X,E)}{fs})(x)$$

$\to$ ne dépend pas de la choix de $f$.

On suppose que
- $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ $\to$ locale fini
- $E|_{U_\alpha} = U_\alpha \times \mathbb{C}^{r_1}$
- $F|_{U_\alpha} = U_\alpha \times \mathbb{C}^{r_2}$

Etape 3. Mq la prop pour $D|_{U_\alpha}$

$$D|_{U_\alpha} : C^\infty(U_\alpha, \mathbb{C}^{r_1}) \longrightarrow C^\infty(U_\alpha, \mathbb{C}^{r_2}) \quad \text{t.q.}$$

$$[D|_{U_\alpha}, f] \Rightarrow \quad \forall f \in C^\infty(U_\alpha).$$

- Algèbre linéaire $\Rightarrow$ $D|_{U_\alpha}(x) \in Hom(\mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2})$

base constant dans $\mathbb{C}^{r_1}$ et $(\mathbb{C}^{r_2})^*$

- $$A_\alpha = \left( \langle \underbrace{D|_{U_\alpha} e_i}_{C^\infty \text{ en } x}, f^j \rangle \right)_{ij} \in C^\infty(U_\alpha, Hom(\mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2})).$$

Etap 4 : Cas generals

- $\varphi_\alpha$ partition d'unité

- $$DS = D\left(\sum \varphi_\alpha S\right) \overset{\text{localement fini}}{=} \sum_\alpha D(\varphi_\alpha S)$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha D|_{U_\alpha} (\varphi_\alpha S)}_{C_c^\infty(U_\alpha, F) \subseteq C^\infty(X,F)} = \underbrace{\left(\sum_\alpha A_\alpha \cdot \varphi_\alpha\right) S}_{A \in C^\infty(X, \mathrm{Hom}(E,F))}$$

#

## I.2 Rappel : differentiel et intégrale.

- $X$ variété, $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\psi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} V_\alpha$

- $TX$ : fibré vectoriel réel déf par $\psi_{\beta\alpha} = d(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})$
$\in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, GL(\mathbb{R}^m))$

- $\Lambda^\cdot(T^*X)$, $\Omega^\cdot(X) = C^\infty(X, \Lambda^\cdot T^*X)$

**Prop:** $\exists!$ $d : \Omega^\cdot(X) \longrightarrow \Omega^{\cdot+1}(X)$ $\mathbb{R}$-linéaire op such

1) $\forall f \in C^\infty(X)$, $df \in \Omega^1(X)$ est la differentiel classique

2) $d^2|_{C^\infty} = 0$

3) $\forall \alpha, \beta \in \Omega^\cdot(X)$, $d[\alpha \wedge \beta] = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$.

Dém (Unicité)

$$dS = d\left[\sum_\alpha \varphi_\alpha S\right] = \sum_\alpha d[\varphi_\alpha S]$$

(*)
$$= \sum_\alpha \sum_I d(\varphi_\alpha f_I dx^I) = \sum_\alpha \sum_I d(\varphi_\alpha f_I) \wedge dx^I$$

par 1), 2), 3).

(Existence) : vérifie ⊛ ne pend pas de $\varphi_\alpha$ et coordonnées locale $\psi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ #

Rq : $d$ est déterminée par $d|_{\Omega^0}$ et $d|_{\Omega^1}$.

**Prop** : $d^2|_{\Omega^\cdot} = 0$

Dém : par $*$. #

Def. $H^p(X) = \ker d|_{\Omega^p} / \operatorname{Im} d|_{\Omega^{p-1}}$ : cohomology de de Rham

- $H^p_c(X) = \ker d|_{\Omega^p_c} / \operatorname{Im} d|_{\Omega^{p-1}_c}$ : cohomology de de Rham à support compact.

Intégration :

- $\dim X = m$, $S \in \Omega^m(X) \Leftrightarrow S = (S_\alpha)$ $S_\alpha \in \Omega^m(U_\alpha)$
- $S_\alpha = f_\alpha \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$
- On peut identifier $S_\alpha$ avec une mesure signée sur $U_\alpha$.

$$\underline{S_\alpha} = f_\alpha \, dx^1 \cdots dx^m$$

mais $(\underline{S_\alpha})_\alpha$ ne definit pas une mesure car

- $$\varphi_{\beta\alpha} \bullet S_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \det \varphi_{\beta\alpha} \cdot S_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

- pour une mesure $(dv_\alpha)_\alpha$, il faut

$$\varphi_{\beta\alpha} \cdot dv_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = |\det \varphi_{\beta\alpha}| \cdot dv_\alpha.$$

**Def** : un fibré vectoriel réel est orientable s'il défini par $\varphi_{\beta\alpha} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, GL^+(\mathbb{R}))$.

**Def** : $X$ est orientable si $TX$ est orientable.

**Rq** : Si $X$ est orientable, Alors $S \in \Omega^m(x)$ définit une measure signée sur $X$.

**Def** : Si $X$ est compact et orientable, $S \in \Omega^\cdot(x)$

$$\int_X S = \int_X S^{[m]}$$

**Thm** : si $X$ est compact et orientable, Alors

$$\int_X dS = 0$$

**Prop** : Si $X$ est compact et orientable, Alors

$$H^k(X) \times H^{m-k}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$([\alpha], [\beta]) \longmapsto \int \alpha\beta$$

est bien défini.

**Dém** :

$$\int (\alpha + d\alpha')(\beta + d\beta') = \int \alpha\beta + \underbrace{\int \alpha\, d\beta'}_{\pm \int d\alpha \wedge \beta' = 0} + \underbrace{\int d\alpha' (\beta + d\beta')}_{\int \alpha' \underbrace{d(\beta + d\beta')}_{= 0}}$$

$$= \int \alpha\beta \qquad \#$$

## I.3 | L'op différentiel

$E, F$ 2 fibrés vectoriel sur $X$

**Def** : $P : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(X, F)$ est un op diff d'ordre $k$

si $\cdot \exists\, X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $E|_{U_\alpha} \simeq V_\alpha \times \mathbb{C}^{r_1}$, $F|_{U_\alpha} \simeq V_\alpha \times \mathbb{C}^{r_2}$

$\cdot \exists\, P_\alpha = \sum_{|I| \leq k} a_\alpha^I \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^I : C^\infty(\underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{V_\alpha}}, \mathbb{C}^{r_1}) \to C^\infty(\underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{V_\alpha}}, \mathbb{C}^{r_2})$

avec $a_\alpha^I \in C^\infty(V_\alpha, \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{r_1}, \mathbb{C}^{r_2}))$

t.q. pour $S = (S_\alpha)_{\alpha \in A} \in C^\infty(X, E)$, $(P_\alpha S_\alpha)_{\alpha \in A}$ défini

une section $PS \in C^\infty(X, F)$.

**Example** • $C^\infty(X, \mathrm{Hom}(X, F))$ est un op diff d'ordre 0.

• $d^X : \Omega^i(X) \to \Omega^{i+1}(X)$ est un op diff d'ordre 1

défini par $(d^{U_\alpha})_{\alpha \in A}$

**Prop (Charactésation)** $\forall f \in C^\infty(X)$, si $[P, f]$ est un op diff d'ordre $k-1$, Alors $P$ est diff d'ordre $k$.

**Dém** : Etape 1. $P$ est localement défini. $x \in X$

Si $S_1 = S_2$ sur $U_x \ni x$, $f \in C_c^\infty(U_x)$, $f = 1$ sur $\overline{W_x} \subset U_x$

$$f P S_1 = P \underbrace{f S_1}_{= f S_2} + \underbrace{[P, f]}_{\text{locale}} S_1 = P f S_2 + [P, f] S_2 = f P S_2 \quad \text{près de } x.$$

Donc, $PS_1 = PS_2$ près de $x$.

Par l'argument précédant, $P|_U$ est bien déf.

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \quad , \quad E|_{V_\alpha} = V_\alpha \times \mathbb{C}^{r_1} \quad . \quad F|_{V_\alpha} = V_\alpha \times \mathbb{C}^{r_2}$$

Etape 2 - Mq : $P|_{U_\alpha}$ est un op diff classique.

$$P|_{U_\alpha} : C^\infty(V_\alpha, \mathbb{C}^{r_1}) \longrightarrow C^\infty(V_\alpha, \mathbb{C}^{r_2})$$

$$x_0 \in U_\alpha \quad , \quad S \in C^\infty(V_\alpha, \mathbb{C}^{r_1})$$

$$P|_{U_\alpha} S = P|_{U_\alpha}\left( \sum_{|I| \leq k} (x - x_0)^I \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^I S(x_0) + \sum_{|I| = k+1} (x - x_0)^I \cdot S_I(x) \right)$$

- Si $|I| = k+1$, $I = (i_1, \dots, i_m)$, $i_1 \geq 1$. $I' = (i_1 - 1, \dots, i_m)$

$$P|_{U_\alpha} (x - x_0)^I S_I = P|_{U_\alpha} (x^1 - x_0^1) \cdot (x - I_0)^{I'} S_I$$

$$= (x^1 - x_0^1)\, P|_{U_\alpha} (x - I_0)^{I'} S_I \qquad \text{=0 si } x = x_0$$

$$+ \left[ P|_{U_\alpha}, x^1 - x_0^1 \right] (x - I_0)^{I'} S_I$$

$$\Rightarrow \left[ P|_{U_\alpha} (x - x_0)^I S_I \right]_{|x_0} = 0$$

=0 si $x = x_0$ car ordre $[P, x^1 - x_0^1] \leq k-1$, $|I'| = k$.

- $$P|_{U_\alpha} S \, (x_0) = \sum_{|I| \leq k} \left( P|_{U_\alpha} \cdot (x - x_0)^I \right)(x_0) \times \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^I S(x_0)$$

<u>Donc</u> $$a_\alpha^I(x_0) = \left( P|_{U_\alpha} (x - x_0)^I \right)(x_0)$$

$$P_{|U_\alpha} \cdot (x - x_0)^I = \sum_{I' \subseteq I} C_{I'} \, x_0^{I'} \underbrace{\left( P_{|U_\alpha} \, x^{I \setminus I'} \right) (x_0)}_{C^\infty \text{ en } x_0}$$

**Donc** $a_\alpha^I \in C^\infty$. #

Symbole

$$\sigma_{\text{totale}} (P_{|U_\alpha}) = \sum_{|I| \leq k} a_I(x) \, (i\xi)^I \in C^\infty(U_\alpha, \mathrm{Poly}^{\leq k}(T^*X) \otimes E^* \otimes F)$$

mais $\left( \sigma_{\text{totale}}(P_{|U_\alpha}) \right)_{\alpha \in A}$ ne definit pas une section globale sur $X$.

**Prop** : $\sigma(P_{|U_\alpha}) = \sum_{|I| = k} a_I(x) (i\xi)^I \in C^\infty(U_\alpha, \mathrm{Ploy}^k(T^*X) \otimes E^* \otimes F)$

définit une section gobal dans $C^\infty(X, \mathrm{Ploy}^k(T^*X) \otimes E^* \otimes F)$

$\mathrm{Ploy}^k(T^*X) = \bigsqcup_{x \in X} \mathrm{Poly}^k(T^*_x X)$ fibré vectoriel

$\simeq S^k(TX)$.

Dém : $f \in C^\infty(X)$

$e^{-itf} \, P \, e^{itf}$ est l'op differentiel

$$e^{-itf} \, P \, e^{itf}{}_{|U_\alpha} = e^{-itf} \, P_{|U_\alpha} \, e^{itf}$$

$$= e^{-itf} \sum_{|I| \leq k} a_I \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^I e^{itf} = \sum_{|I| \leq k} a_I \left( \frac{\partial}{\partial x} + it \, df \right)^I$$

Poly en $t$

$$= t^k \sum_{|I| = k} a_I(x) \left( i \, df \right)^I$$

Donc $\sigma(P) \in C^\infty(X, \mathrm{Poly}^k(T^*X) \otimes E^* \otimes F)$ est déf par.

$$\sigma(P)(df) = \left[ e^{-itf} P e^{itf} \right]^{[k]}$$

Rq : $e^{-itf} P e^{itf} = \mathrm{Ad}(e^{-itf}) P = e^{-it\,\mathrm{ad}(f)} P \Rightarrow \sigma(P)(df) = \frac{[i\,\mathrm{ad}(f), ]^k P}{k!}$ #

Prop : On a suite exact

$$0 \longrightarrow \mathrm{Diff}_X^{k-1}(E,F) \xrightarrow{i} \mathrm{Diff}_X^k(E,F) \xrightarrow{\sigma} C^\infty(X, \mathrm{Poly}^k(T^*X) \otimes E^* \otimes F) \to 0$$

Dém 1) $i$ est inj Évident

2) $\sigma \circ i = 0$ Évident

3) $\sigma(P) \Rightarrow \Rightarrow P$ est de gre $k-1$ evident ! $\Big\} \Rightarrow \mathrm{Im}\, i = \ker \sigma$.

4) $\sigma$ est surjective.

Soit $a \in C^\infty(X, \mathrm{Poly}^k(T^*X) \otimes E^* \otimes F)$

$a = (a_\alpha)_{\alpha \in A}$.

$\exists P_\alpha$ l'op diff sur $U_\alpha$ t.q. $\sigma_{\text{totale}}(P_\alpha) = a_\alpha$.

On pose locale finie

$$PS = \sum_\alpha \underbrace{P_\alpha \psi_\alpha S}_{\in C_c^\infty(U_\alpha, F) \subseteq C^\infty(X, F)}$$

$$\sigma(P) = \sum_\alpha \sigma(P_\alpha) \psi_\alpha = \sum_\alpha a_\alpha \psi_\alpha = \sum_\alpha a|_{U_\alpha} \cdot \psi_\alpha$$

$$= \sum_\alpha a \psi_\alpha = a$$

#

**Def** : un operateur différentiel $P : C^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$ est elliptique si $\sigma(P)(x,\xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$

**Rq** : $P : C^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$ elliptique $\Rightarrow$ $rg E = rg F$.

## I.4 | Enoncé du thm de Atiyah-Singer.

**Thm** • Soit $X$ une variété compact, $E, F$ 2 fibré vectoriel
• $P : C^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$ l'op diff elliptique

**Alors** 1) $\ker P$, $\operatorname{coker} P$ sont de dim finie, t.q

$$\operatorname{Ind}(P) = \dim \ker P - \dim \operatorname{coker} P$$

est bien déf.

2) Si $\dim X$ est impaire,

$$\operatorname{Ind}(P) = 0$$

3) si $\dim X$ est paire, on a

$$(*) \qquad \operatorname{Ind}(P) = \int_{T^*X} ch(\sigma(P)) \, \pi^*\left(\hat{A}(TX)^2\right)$$

$T^*X$ ← orienté

où • $ch(\sigma(P)) \in \Omega^\cdot(T^*X)$ intégrable

• $\hat{A}(TX) = 1 + \cdots \in \Omega^\cdot(X)$

**Dém** : Etape 1 : construire un op de Dirac tordu déf sur une nouvelle variété t.q $\operatorname{Ind}(P) = \operatorname{Ind}(D)$

Etape 2 : Mq le thm pour l'op de Dirac #

Contenu de ce cours

1) construire $\hat{A}(TX)$, $ch(\sigma(p))$, ---

2) construire l'op de Dirac

3) Mq le thm de AS pour l'op de Dirac

4) Application geometrique du thm de AS pour l'op de Dirac :

Thm (Gauss-Bonnet-Chern) $X$ compact, dim paire, orientable

$$\sum_i (-1)^i \dim H^i(X) = \int_X \text{classe d'Euler}$$

Thm (Hirzebruch) : $X$ compact orientable, dim $= 4k$.

la form bilinéaire Sym

$$\eta : \begin{array}{c} H^{2k}(X) \times H^{2k}(X) \longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) \longmapsto \int \alpha \wedge \beta \end{array}$$

est non-degenérée (Poincaré), de signature

$$\text{sign}(\eta) = \int_X \text{classe-}L$$

Thm (Riemann-Roch-Hirzebruch) : $X$ compact complexe

$$\sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{O}_X) = \int_X \text{classe de Todd.}$$

pf : Trouver l'op de Dirac tordue correspondant, et Appliquer le thm de AS.