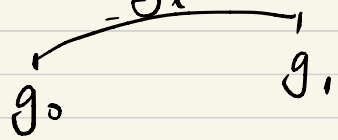
2) Soit (∇_0^E, g_0^E), (∇_1^E, g_1^E) 2 paire.

(∇_t^E, g_t^E) une famille des metriques et connexion metrique t.q.

$$(\nabla_t^E, g_t^E)_{t=0} = (\nabla_0^E, g_0^E), \quad (\nabla_t^E, g_t^E)_{t=1} = (\nabla_1^E, g_1^E)$$

construction : $(g_t)_{0 \le t \le 1}$ t.q

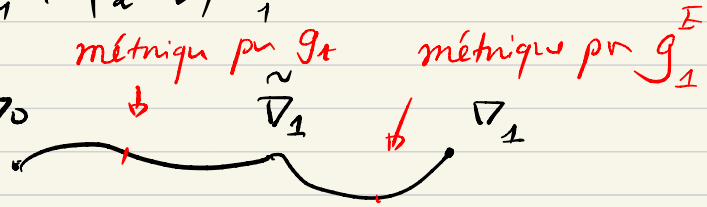


$$\tilde{\nabla}_t^E = \frac{1}{2}\left(\nabla_0^E + (\nabla_0^E)^{*,t} \right)$$

↑ adjoint pour g_t

Donc $\tilde{\nabla}_1^E$ metrique pour g_1 mais $\tilde{\nabla}_1^E \neq \nabla_1^E$

On pose $\tilde{\nabla}_t^E = (t-1)\nabla_1^E + (2-t)\tilde{\nabla}_1^E$



$$\begin{array}{ccc} \pi^*TE & & TE \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times [0,1] & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

- $g^{\pi^*E}_{(x,t)} = g^E_{t,x}$
- $\nabla^{\pi^*E} = \nabla^E_t + \frac{1}{2}\left(dt\frac{\partial}{\partial t} + (dt\frac{\partial}{\partial t})^{*,g^E_t} \right)$

$$= \nabla^E_t + dt\left(\frac{\partial}{\partial t} + A_t\right)$$

- $R^{\pi^*E} = R^E_t + dt \wedge B_t$

Donc, $(g^{\pi^*E}, \nabla^{\pi^*E})$ est une metrique et une connexion métrique.

$$e(\pi^*E, g^{\pi^*E}, \nabla^{\pi^*E}) = dt \wedge \beta_t + e(\pi^*E, g^{\pi^*E}_t, \nabla^{\pi^*E}_t)$$

$d^{X \times [0,1]}$ fermé $\Rightarrow$ $- d^X \beta_t + \frac{\partial}{\partial t} e(\pi^*E, g^{\pi^*E}_t, \nabla^{\pi^*E}_t)$

$$\Rightarrow e(\pi^*E, g^{\pi^*E}_1, \nabla^{\pi^*E}_1) - e(\pi^*E, g^{\pi^*E}_0, \nabla^{\pi^*E}_0)$$

$$= d(\cdots)$$

3) $E \to X$ fibré vectoriel orienté de dim paire.

$\exists\, \Pi \xrightarrow{\pi} X$ tq. • $\pi^* : H^i(X) \to H^i(\Pi)$ inj

• $\pi^* E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$

avec $\operatorname{rg} E_1 = 2$ orienté d.

Donc $\pi^* e(E, g^E, \nabla^E) = e(\pi^*E, g^{\pi^*E}, \nabla^{\pi^*E})$

$$\underset{\text{cohomologie}}{\simeq} e(E_1 \oplus \cdots \oplus E_n, g^{E_1} \oplus \cdots \oplus g^{E_n}, \nabla^{E_1} \oplus \cdots \oplus \nabla^{E_n})$$

$$\simeq \prod_{i=1}^{n} e(E_i, g^{E_i}, \nabla^{E_i}) \underset{i=1}{\overset{n}{\sim}} \prod c_1(L_i)$$

- comme $\operatorname{rg} E_i = 2$, & orienté, $\exists$ Rotation sur E_i

J_i : Rotation par $\pi/2$, $J_i^2 = -Id$, J_i est une structure complexe sur E_i. $E_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = L_i \oplus \bar{L}_i$, i.e. on a une façon de choisir L_i canoniquement.

(L_i : espace propre pour $\sqrt{-1}$)

- Soit e_1, e_2 base orientée, Rotation pour J : $e_1 \to e_2$, $e_2 \to -e_1$ $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{R^{E_i}}{\partial \Pi} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta_i \\ -\Theta_i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{J}{\partial \Pi} R^{E_i} = \Theta_i$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{-1}}{\partial \pi} R^{L_i} = \Theta_i$$

#

III | Super-Connexion de Quillen

Thm de Atigah-Singer :

$$\mathrm{Ind}(P) = \int_{T^*X} ch(\sigma(P)) \; \pi^* \left[\hat{A}(TX) \right]^2$$

Rq : • $\mathrm{Ind}(P)$ est déf par la théorie des op

• ch et $\hat{A}$ est déf par la théorie des connexion

Question : ∃ ? une théorie qui traite à la fois l'op et la connexion, t.q. $\mathrm{Ind}(P)$ est certain "form caractéristique"

Oui, c'est la théorie de Quillen.

III.1 | Super-Connexion

- $E = E^+ \oplus E^-$ un super-fibré.
- $\Omega^\cdot(X, E) = C^\infty(X, \Lambda^\cdot T^*X \hat{\otimes} E)$

Rq : Dans la section précédente, $E = E \oplus 0$ et

- $\nabla : \Omega^\cdot(X, E) \to \Omega^{\cdot+1}(X, E)$ est impair.

Def : $A : \Omega^\cdot(X, E) \to \Omega^\cdot(X, E)$ est une Super Connexion si

1) A l'op diff impair
2) $A(\alpha \wedge s) = d\alpha \wedge s + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge As$.

Rq : on peut déf A d'abord : $A : C^\infty(X, E) \to \Omega^i(X, E)$ un op diff d'ordre 1, impaire, $\sigma(A)(x, \xi) = \sqrt{-1}\,\xi\wedge$. Ensuite on pose.

$$A[\alpha s] = d\alpha \wedge s + (-1)^{|\alpha|}\,\alpha \wedge As \qquad \alpha \in \Omega^i(X),\ s \in C^\infty(X, E)$$

Rq : $A = A_0 + \nabla + A_2 + A_3 + \cdots$

avec . $\nabla^E = \nabla^{E^+} \oplus E^-$ connexion classique.

. $A_{2i} \in \Omega^{2i}\left(X,\ \underset{\text{impaire}}{End(E)}\right)$ $\quad A_{2i+1} \in \Omega^{2i+1}\left(X,\ \underset{\text{paire}}{End(E)}\right)$

Def : $F = A^2$ courbure de A.

Rq :
$$\begin{aligned} A^2[fs] &= A\left[df \wedge s + f \wedge As\right] \\ &= d^2 f \wedge s - df \wedge As + df \wedge As + f A^2 s \\ &= f\, A^2 s \end{aligned}$$

Donc, $A^2 \in \Omega^i(X, End(E))$ paire.

Prop (Bianchi). $[A, F] = 0$

$$\varphi : \Omega^{even}(X) \longrightarrow \Omega^{even}(X)$$
$$\alpha \longmapsto \frac{1}{(2\pi i)^{\frac{N}{2}}}\,\alpha$$

Thm : $E = E^+ \oplus E^-$ super fibré vectoriel complexe.

- A une super connexion

Alors $\varphi\, Tr_s[f(-A^2)] \in \Omega^{even}(X)$ est fermé

- la classe ne perds pas de A t.q

$$\left\{\varphi\, Tr_s[f(-A^2)]\right\}_{dR} = f_a(E^+) - f_a(E^-) \in H^*(X)$$

Dém : • $d\,\mathrm{Tr_s}[f(A^2)] = \mathrm{Tr_s}[[A, f(A^2)]] = 0$

• $\varphi\,\mathrm{Tr_s}[f(-A^2)] \overset{\text{cohomologie}}{=} \varphi\,\mathrm{Tr_s}[f(-R^{E^+\oplus E^-})]$

$= \mathrm{Tr}[f(\frac{i}{2\pi}R^{E^+})] - \mathrm{Tr}[f(\frac{i}{2\pi}R^{E^-})]$

#

III.2) le cas $X = pt$

• $E = E^+ \oplus E^-$, $D : E^+ \to E^-$ operateur linéaire

• on munit E^+, E^- des metrique.

• $D^* : E^- \to E^+$ adjoint de D.

• $A = \begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{pmatrix}$ est impaire, super connexion.

• $A^2 = \begin{pmatrix} D^*D & 0 \\ 0 & DD^* \end{pmatrix}$

• $ch(E, A) = \mathrm{Tr_s}[e^{-A^2}] \in \Omega^{even}(pt) = \mathbb{C}$

$= \mathrm{Tr_s}\left[e^{-\begin{pmatrix} D^*D & 0 \\ 0 & DD^* \end{pmatrix}}\right]$

Rq : $ch(E, \sqrt{t}A)$ ind de t car $\sqrt{t}A$ est super connexion

Donc $ch(E, A) = \lim_{t \to \infty} ch(E, \sqrt{t}A) = \dim \ker D^*D - \dim \ker DD^*$

$= \dim \ker D - \dim \ker D^*$ ($\ker D^* = [\mathrm{Im}D]^\perp$)

$= \dim \ker D - \dim \mathrm{coker} D = \mathrm{Ind}(D)$.

Rq : l'op est une super connexion, et $\mathrm{Ind}(D)$ est une character de Chern.

Rq $\lim_{t\to 0} \mathrm{ch}(E, \sqrt{t}A) = \mathrm{Tr_s}[\mathrm{Id}] = \dim E - \dim F$

↳ character de Chern classique.

i.e. $\mathrm{Ind}(D) = \int_{pt} \mathrm{ch}(E^+) - \mathrm{ch}(E^-)$

théorème d'indice en dim 0 #

On va appliquer cette methode pour X général avec D l'op de Dirac.

III.3 $\mathrm{ch}(\sigma(P))$

- P l'op elliptic $\sigma(P) \in C^\infty(X, \mathrm{Poly}(T^*X) \otimes \mathrm{Hom}(E,F))$
$\subset C^\infty(T^*X, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$

- $\pi^*E \oplus \pi^*F$ super fibre sur T^*X.

- on prends metrique g^E, g^F

- $A = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(P)^* \\ \sigma(P) & 0 \end{pmatrix} + \nabla^{\pi^*(E\oplus F)}$ ...

$\mathrm{ch}(\sigma(P)) = \varphi \mathrm{Tr_s}\left[\exp(-A^2)\right] \in \Omega^{\text{even}}(T^*X)$

Rq : Si $\deg(p) = d > 0$, Alors

$$\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} \sigma(p)^* \sigma(p) & 0 \\ 0 & \sigma(p)\sigma(p)^* \end{pmatrix} \sim |\xi|^{2d} \text{ à } \infty$$

Donc $\mathrm{ch}(\sigma(p))$ est intégrable sur T^*X t.q

$$\int_{T^*X} \mathrm{ch}(\sigma(p)) \; \pi^*\left(\hat{A}(TX)\right) \text{ est bien défini.}$$

Rq : $\left[\mathrm{ch}(\sigma(p))\right] \in H^{\cdot}_{c}(T^*X)$ ne dépend pas des métriques connexion, et la famille $(P_t)_{t \in \mathbb{R}}$, - - -

à support compact !

Rq : Dans la preuve du thm d'indice d'Atiyah-Singer, la théorie de Quillen joue un rôle philosophique

- Elle joue un rôle essentiel en thm d'Atiyah-Singer en famille et thm de R.R.G.

Question : $P : C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, F)$ elliptique.

1) $\mathrm{Tr_s}\left[\exp\left(-t \begin{pmatrix} 0 & P^* \\ P & 0 \end{pmatrix}^2\right)\right]$ bien déf ? oui

2) - — — — — — - ind de $t > 0$? oui

3) $\lim_{t \to \infty}$ - - - - - - - - $= \mathrm{Ind}(P)$? oui

4) $\lim_{t \to 0}$ - - - - - - - - $= \int_{T^*X}$ - - - ?

La limite locale existe uniquement pour l'op de Dirac !

IV / Algèbre de Clifford et le spinor

IV.1 / Algèbre de Clifford.

Def: Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidean.
Algèbre de Clifford est une $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par $1 \in \mathbb{R}$, $v \in V$ avec la relation

$$v \cdot w + w \cdot v = -2\langle v, w \rangle \qquad v, w \in V$$

Construction explicite

$$c(V) = \underbrace{\bigoplus_{k=0}^{+\infty} V^{\otimes k}}_{T(V)} \Big/ \text{ideal bilatère engendré par } vw + w \cdot v + 2\langle v, w \rangle$$

Prop: $c(V)$ est unique algèbre vérif. la propriété universelle

$\forall$ $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{A}$ (unité associative)

$\forall$ application $\mathbb{R}$-linéaire $\varphi : V \longrightarrow \mathcal{A}$ t.q

$$\varphi(v) \cdot \varphi(w) + \varphi(w)\, \varphi(v) = -2\langle v, w \rangle$$

$$\begin{tikzcd} c(V) \arrow[dr, dashed, "\exists!\, \tilde{\varphi}"] & \\ V \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

$\tilde{\varphi}$ morphisme d'algèbre

Prop: Il existe un morphisme de gp $O(V) \longrightarrow \mathrm{Aut}(c(V))$

Dém:

$A \in O(V)$: A : $\{ v \otimes w + w \otimes v + 2\langle w, v \rangle \}$ $\exists$ ($\subseteq T(V)$)

Donc : A : ideal $\{ v \otimes w + w \otimes v + 2\langle w, v \rangle \}$ $\exists$

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{A} & T(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(V)/\text{ideal} & \xrightarrow{\exists ! A} & T(V)/\text{ideal} \end{array}$$

Donc : $A : C(V) \to C(V)$

#

Def : $-Id \in O(V)$, $\tau : C(V) \to C(V)$ Automorphism induite

Def : on pose $C^+(V) = \langle c(v_1) \cdots c(v_n) : n \text{ paire} \rangle$

$= Im\left(T^+(V) \to T(V)/\text{ideal}\right)$

$C^-(V) = \langle c(v_1) \cdots c(v_n) : n \text{ impaire} \rangle$

$= Im\left(T^-(V) \to T(V)/\text{ideal}\right)$

Alors : $\tau|_{C^+(V)} = id$, $\tau|_{C^-(V)} = -id$

Prop : $C(V) = C^+(V) \oplus C^-(V)$ est une super algèbre.

Dém : par la def, $C(V) = C^+(V) + C^-(V)$ et

$C^+(V)\,C^+(V)$, $C^-(V)\,C^-(V) \subset C^+(V)$

$C^+(V)\,C^-(V)$, $C^-(V)\,C^+(V) \subset C^-(V)$

si $v \in C^+(V) \cap C^-(V)$ Alors $\tau v = v$ et $\tau v = -v$

Absurde $v \Rightarrow$ $\Rightarrow C(V) = C^+(V) \oplus C^-(V)$

#

Def: une algèbre A est dite filtré si $\exists$ une filtration

$$\cdots \subset A^0 \subset A^1 \subset A^2 \subset \cdots$$

t.q $A^i A^j \subseteq A^{i+j}$

- une algèbre $G^\cdot$ est dite $\mathbb{Z}$-gradué si

$$G^\cdot = \bigoplus_p G^p$$

t.q $G^i G^j \subset G^{i+j}$

- Si A est une algèbre filtré, la graduation est déf par

$$Gr^\cdot(A) = \bigoplus_p Gr^p(A) \quad \text{avec} \quad Gr^p(A) = A^p / A^{p-1}$$

$\rightarrow$ algèbre $\mathbb{Z}$-gradué

Ex: $E \to x$ fibré vectoriel. $Diff_x(E)$ est une algèbre filtré

$$Diff_x^{-1}(E) \subset Diff_x^0(E) \subset Diff_x^1(E) \subset \cdots$$

Φ

t.q $Gr^p\left(Diff_x(E)\right) = C^\infty(x, Poly^p(T^*_x) \otimes End(E))$

On pose

$$c^i(V) = \{ c(v_1) \cdots c(v_k) : k \leq i \}$$

$$= Im\left(T^{\leq i} \to T/\text{ideal} \right)$$

Prop: $c(V)$ est une algèbre filtré t.q $Gr(c(V)) \simeq \Lambda^\cdot(V)$

Dém: Il faut mq $c^i(V)/c^{i-1}(V) \simeq \Lambda^i(V)$

$\mathbb{R} \to c(V)$ inj donc $c^0(V) \simeq \mathbb{R} \simeq \Lambda^0 V$

$V \to c(V)$ inj (car $c(v)=0 \Rightarrow -|v|^2 = c(v)^2 = 0 \Rightarrow v = 0$)

donc $c^1(V) \simeq V \oplus \mathbb{R} \Rightarrow c^1(V)/c^0(V) \simeq V \simeq \Lambda^1 V$

$Gr^\cdot(V)$ est engendré par $Gr^0(c(V)) \simeq \mathbb{R}$, $Gr^1(c(V)) \simeq V$

avec la Relation $\overline{c(v)}\,\overline{c(w)} + \overline{c(w)}\,\overline{c(v)} = -2\overline{\langle v,w\rangle} = 0$ in $C^2(V)/C^1(V)$

i.e., $Gr(V) \simeq \Lambda^\cdot V^*$ #.

Cor : $\dim c(V) = \dim \Lambda^\cdot V = 2^{\dim V}$

Resumé : $c(V)$ est une super algèbre, filtré par son longueur

avec $Gr^\cdot(c(V)) \simeq \Lambda^\cdot V$, de dim $2^{\dim V}$

Prop : Si $V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2$, on a isomorphism algèbre

$$c(V) \xrightarrow{\sim} c(V_1) \hat{\otimes} c(V_2)$$

Dém :

$$\begin{array}{ccc} c(V) & \overset{f}{\dashrightarrow} & \\ \uparrow & & \\ V & \longrightarrow & c(V_1)\hat{\otimes}c(V_2) \end{array}$$

$v = v_1 + v_2 \longmapsto c(v_1)\otimes 1 + 1 \otimes c(v_2)$

comme $\left(c(v_1)\otimes 1 + 1\otimes c(v_2)\right)^2$

$= \left[c(v_1)\otimes 1\right]^2 + \left[1\otimes c(v_2)\right]^2 = -|v_1|^2 - |v_2|^2 = -|v|^2$

par les propriété universel, $\exists !$ morphisme d'algèbre

$$f : c(V) \longrightarrow c(V_1)\hat{\otimes}c(V_2)$$

- $V_1, V_2 \subset V \Rightarrow c(V_1)\otimes 1,\ 1\otimes c(V_2) \subset \mathrm{Im} f \Rightarrow f$ est surj
- $\dim c(V_1)\hat{\otimes}c(V_2) = \dim c(V_1)\cdot \dim c(V_2)$

$= 2^{\dim V_1 + \dim V_2} = 2^{\dim V} = \dim c(V)$

Donc f est bij #

Rq : Si $e_1, e_2, \dots, e_n$ BON de V Alors

$$c(V) = \hat{\bigotimes_i} \, c(\mathbb{R} e_i)$$

Ex : $c(\mathbb{R})$ = algèbre engendré par 1 et e_1 avec $e_1^2 = -1$

$\simeq \mathbb{C}$

Rq : on a un isomorphisme d'algèbre (non-canonique)

$$c(V) \simeq \mathbb{C} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathbb{C}.$$

mais $\hat{\otimes}$ est très compliqué.

Ex : $c(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C} \hat{\otimes} \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} c(e_1) \oplus \mathbb{R} c(e_2) \oplus \mathbb{R} c(e_1) c(e_2)$

Relation $c(e_1)^2 = c(e_1^2) = -1$, $c(e_1) c(e_2) = -c(e_2) c(e_1)$

$\simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} i \oplus \mathbb{R} j \oplus \mathbb{R} k$ $\quad k = ij$, $i^2 = j^2 = -1$

$\simeq \mathbb{H}$

Rq : $\mathbb{H} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}$ (i, j)

IV.2 Symbole et quantification

But : on va démontrer que le symbol totale existe

i.e. $c(V) \xrightarrow{\sim} \Lambda^\cdot V$ iso d'espace vectoriel.

$\xrightarrow{\text{sym}}$

$\xleftarrow{\text{quantification}}$

comme $V \simeq V^*$ par la metrique, on va construire

$$c(V) \xrightarrow{\sim} \Lambda^\cdot V^*$$

Rq : on va considère dans la suite $V = TX$. Alors $\Lambda^* T^*X$ est naturel.

Def : $E = E^+ \oplus E^-$ is a real / complexe module of $c(v)$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduté if 1) E is a real / complexe vector space

2) E is a $c(v)$-module

3) $c^{\pm}(v) E^{\pm} \subset E^{\mp}$, $c^{\mp}(v) E^{\pm} \subset E^{\pm}$

(Rq : $\dim E^+ = \dim E^-$, car $c(v) : E^+ \longrightarrow E^-$ est bij, si $v \neq 0$)

Prop : $\Lambda^* V^*$ is a real clifford module

Dém :

$$\begin{array}{ccc} c(v) & & \\ \uparrow & \nearrow \exists! c & \\ V & \xrightarrow{c} & End(\Lambda^* V^*) \end{array}$$

$$v \longmapsto v^* \wedge - i_v$$

Alors $c(v)^2 = (v^* \wedge - i_v)^2 = -[v^*, i_v] = -1$

Donc $\exists !\ c : c(v) \longrightarrow End(\Lambda^* V^*)$ #

Def : $\sigma : c(v) \longrightarrow \Lambda^* V^*$ Symbol (totale)

$$a \longmapsto a \cdot 1$$

Prop : $\sigma : c(v) \longrightarrow \Lambda^* V^*$ est un iso d'espace vectoriel

Dém : $c(v) = \hat{\otimes}_i c(\mathbb{R} e_i)$, $\Lambda^* V^* \simeq \hat{\otimes}_i \Lambda[\mathbb{R} e_i]$

Il suffit de mq les prop si $\dim V = 1$.