Spin(V) comme un gp de Lie

$\mathrm{Spin}(V) \subset C^0(V) \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{\text{paire}}(V^*)$ $\Rightarrow$ Spin(V) : ss-ensemble d'espace vectoriel de dim finie

$\subset C(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \begin{cases} \mathrm{End}(S^V) \\ \mathrm{End}(S^V_+) \oplus \mathrm{End}(S^V_-) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Spin(V) : ss-gp de matrices

Spin(V) munit une topologie induite.

(dim V ≥ 2)

Prop Spin(V) est un gp de Lie, connexe, compact, et

$\mathrm{Spin}(V) \xrightarrow{\lambda} SO(V)$ est une 2-nd recouvrement non-trivial.

Dém : 1) Mq : Spin(V) est connexe.

- pour $i = 1, 2$, $(v_t^i)_{t \in \mathbb{R}}$ une courbe C^0 dans V, t.q $|v_t^i| = 1$.

$$\underbrace{c(v_t^1)\, c(v_t^2)}_{\in \mathrm{Spin}(V)} \xrightarrow{\sigma} \left((v_t^1)^* - i_{v_t^1}\right)\left((v_t^2)^* - i_{v_t^2}\right) \cdot 1$$

$$= \left((v_t^1)^* - i_{v_t^1}\right)(v_t^2)^* = (v_t^1)^* \wedge (v_t^2)^* - \langle v_t^1, v_t^2 \rangle$$

continue en t dans $\Lambda^{\text{paire}}(V^*)$

Donc $\left(c(v_t^1)\, c(v_t^2)\right)_{t \in \mathbb{R}}$ est une courbe C^0 dans Spin(V).

- Soit $x = c(v^1) \cdots c(v^{2k}) \in \mathrm{Spin}(V)$

On fixe $v \in V$, Soit $(v_t^i)_{t \in \mathbb{R}}$ une courbe dans V t.q $|v_t^i| = 1$, $v_t^i|_{t=0} = v^i$, $v_t^i|_{t=1} = v$

Donc $x_t = c(v_t^1) \cdots c(v_t^{2k}) \in \mathrm{Spin}(V)$ est une courbe C^0 dans Spin(V) telle que

$$x_t|_{t=0} = x \quad , \quad x_t|_{t=1} = \left[c(v)\right]^{2k} = (-1)^k \in \{\pm 1\}$$

Il reste à mq 1 et -1 sont dans la $\widetilde{m}$ composante.

$\{e_i\}$ BON de V.

exact car $\dim V \geq 2$

$$\gamma_t = \cos(t) + \sin(t)\, c(e_1)c(e_2) = -c(e_1)^2 \cos(t) + \sin t\, c(e_1)c(e_2)$$

$$= c(e_1)\, c\left(-\cos t \cdot e_1 + \sin t \cdot e_2\right) \in Spin(V)$$

$$\gamma_t|_{t=0} = 1, \qquad \gamma_t|_{t=\pi} = -1$$

Donc, $Spin(V)$ est connexe.

2] Mq $\lambda : Spin(V) \longrightarrow SO(V)$ est continue

$$x \longmapsto \left(v \to x \cdot v \cdot x^{-1}\right)$$

Il faut que $x \longmapsto \langle e_i, x \cdot e_j \cdot x^{-1} \rangle$ est C^0 $\forall\, e_i, e_j$

coeff matrice.

Il suffit que $\forall\, v \in V$, $x \longmapsto x \cdot v \cdot x^{-1}$ est C^0, qui est une conséquence de la définition.

3] théorie des revetement $\Big\} \Rightarrow \lambda$ est un 2-révetement

$1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to Spin(V) \to SO(V) \to 1$

$Spin(V)$ connexe $\Rightarrow Spin(V) \neq SO(V) \times \{\pm 1\} \Rightarrow$ le révetement est non-trivial

4] $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $SO(V)$ compact $\Rightarrow Spin(V)$ compact

5] $U\ (\ni Id) \subset SO(V)$ petit ouvert

$\lambda^{-1}(U) = U \times \{\pm 1\}$ Alors la structure sur U induite une structure C^∞ sur $\lambda^{-1}(U)$, ... $\Rightarrow Spin(V)$ est un gp de Lie #

Rq : (Cartan) · G_1, G_2 2 groupe de Lie

· $f : G_1 \to G_2$, morphisme de gp continu

Alors f est C^∞.

Algèbre de Lie de $Spin(n)$.

- construire $\mathfrak{spin}(n)$
- trouve identification $\mathfrak{spin}(n) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(n)$

- $Spin(V) \subseteq \dfrac{GL(S^\vee)}{GL(S_+^\vee) \oplus GL(S_-^\vee)} \Rightarrow \mathfrak{spin}(V) \subseteq \dfrac{End(S^\vee)}{End(S_+^\vee) \oplus End(S_-^\vee)} = C(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

- Rappel : $G_1 \subseteq G_2$ gp de Lie, Alors $\mathfrak{g}_1 = \{x \in \mathfrak{g}_2 : e^{tx} \in G_1 \ \forall t \in \mathbb{R}\}$

Donc $\mathfrak{spin}(V) = \{A \in C^+(V) : e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \in Spin(V)\}$.

Rappel : $\sigma^{-1} : \Lambda^* V^* \xrightarrow{\sim} C(V)$

Prop : $\mathfrak{spin}(V) = \sigma^{-1}(\Lambda^2 V^*) = \{\sum_{i<j} \alpha(e_i, e_j)\, c(e_i) c(e_j) : \alpha \in \Lambda^2 V^*\}$

Dém : 1) $\dim \mathfrak{spin}(n) = \dim \mathfrak{so}(n) = \dim \Lambda^2 V^*$

2) Soit $e_1, e_2 \in V$ t.q $e_1 \perp e_2$, $|e_1| = |e_2| = 1$

Mq : $c(e_1) c(e_2) \in \mathfrak{spin}(V)$

Rappel : $[i\, c(e_1) c(e_2)]^2 = 1$. Donc $[c(e_1) c(e_2)]^2 = -1$

Donc $e^{t\, c(e_1)c(e_2)} = \cos(t) + \sin(t)\, c(e_1)c(e_2) \in \mathfrak{spin}(V)$

3) $\{e_i\}$ BON, 2) $\Rightarrow c(e_i) c(e_j) \in \mathfrak{spin}(V) \quad \forall i \neq j$ (par 1)

$\Rightarrow \sigma^{-1}(\Lambda^2 V^*) \subseteq \mathfrak{spin}(V) \Rightarrow \sigma^{-1} \Lambda^2 V^* = \mathfrak{spin}(V)$

. $\lambda : Spin(V) \longrightarrow SO(V)$ morphisme de groupe de Lie

. Il induit un morphisme d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{Spin}(V) \longrightarrow \mathfrak{so}(V)$$

Prop : Le morphisme d'algèbre de Lie est donné par

$$\mathfrak{spin}(n) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{so}(n)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j \rangle c(e_i) c(e_j) \longrightarrow A$$

$$Spin(n) \xrightarrow{\sim} SO(n)$$

Dém : on note $c(A) \longleftarrow A$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} e^{t c(A)} \, c(x) \, e^{-t c(A)} = c(Ax)$$

Donc, il faut vérifier $[c(A), c(x)] = c(Ax)$

$$\frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j \rangle \left[c(e_i) c(e_j), c(x) \right] = \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle Ae_i, e_j \rangle \Big\{ c(e_i)\left(-2\langle x, e_j \rangle\right) - 2\langle e_i, x \rangle c(e_j) \Big\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i} \left(-\langle Ae_i, x \rangle c(e_i) + \langle Ax, e_j \rangle c(e_j) \right) = c(Ax) \qquad \#$$

Prop : $n \geq 3$, $Spin(n) = \widetilde{SO(n)}$ Revetement universel.

Dém : Il suffit $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $(n \geq 3)$

$$0 \to SO(n-1) \to SO(n) \to S^{n-1} \to 0$$

Donc, $\longrightarrow \underset{=0}{\pi_1(S^{n-1})} \to \pi_1(SO(n-1)) \to \pi_1(SO(n)) \to \pi_1(S^{n-1}) \to$

Rq : $\pi_k(S^n) = 0$ si $k < n-1$

Donc si $n \geq 4$ $\Rightarrow \pi_1(SO(n)) = \pi_1(SO(n-1)) = \dots = \pi_1(SO(3))$

Il faut mq $\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $Spin(3)$ est simple connexe.

Fait : $Spin(3) \overset{\text{homéo}}{\simeq} S^3$ ($\Rightarrow$ simplement connexion)

$$Spin(3) = \exp(\mathfrak{spin}(3)) = \left\{ \exp\left(t\, c(v_1)c(v_2)\right) : \begin{array}{l} v_1, v_2 \in V \\ v_1 \perp v_2 \\ |v_1| = |v_2| = 1 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \cos(t) + \sin(t)\, c(v_1)c(v_2) : \begin{array}{l} v_1, v_2 \in V,\ v_1 \perp v_2 \\ |v_1| = |v_2| = 1 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\alpha}_{\sim} \left\{ (\cos(t), \sin(t)\, v_1 \wedge v_2) \in \Lambda^0 \mathbb{R}^3 \oplus \Lambda^2 \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} v_1, v_2 \in V,\ v_1 \perp v_2 \\ |v_1| = |v_2| = 1 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\sim} \left\{ (\cos(t), \sin(t)\, v_3) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \right\} \simeq S^3$$

v_1, v_2, v_3 en BON, orienté

#

Rq : on peut mq $Spin(3) \simeq SU(2)$.

V | L'opérateur de Dirac

V.1 | Rappel : fibré principal

- (X, g^{TX}) une variété Riemannienne orientée.
- $(T_xX, g^{T_x}_x)$ est un espace vectoriel orienté.
- $C(TX) = \bigsqcup_{x \in X} C(T_xX)$ le fibré de Clifford.

$$= \alpha(\Lambda^* T^*X)$$

Question : comme def $S^{TX} = \bigsqcup_{x \in X} S^{TX}_x$ comme un fibré vectoriel ?

Difficulté : Il n'y a une façon canonique, pour construire S^V à partir de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

fibré principale :

Def : $\pi : P \xrightarrow{\pi} X$ est un π - fibré principal sur X

si 1) $\pi : P \longrightarrow X$ est C^∞, π est un gp

2) $\exists\, X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ Recouvrement t.q

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow[\sim]{\Psi_\alpha} U_\alpha \times \pi \quad \text{diffeo}$$

$$\pi \searrow \qquad \swarrow \pi_1$$

$$U_\alpha$$

3) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, $\exists\, \varphi_{\beta\alpha} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, \pi)$.

$$\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\Psi_\alpha \swarrow \sim \qquad \Psi_\beta \searrow$$

$$U_\alpha \cap U_\beta \times \pi \xrightarrow{\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}} U_\alpha \cap U_\beta \times \pi$$

$$(x, k) \longmapsto (x, \underset{\beta\alpha}{\varphi}(x) \cdot k)$$

Rq : $P \curvearrowright \pi$ car $k' \in \pi$, on définit

$$(x, k) \cdot k' = (x, kk') \quad \text{dans } U_\alpha \cap U_\beta \times \pi \subset \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

comme

$$(x, \underset{\beta\alpha}{\varphi}(x) k)\, k' = (x, \underset{\beta\alpha}{\varphi}(x)(kk'))$$

Donc $(x, k) \cdot k'$ induit une π - action sur P.

Rq : $P/\pi = X$

Rq : Si $\{\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to K\}$ vérifie

$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset \Rightarrow \psi_{\gamma\beta} \circ \psi_{\beta\alpha} = \psi_{\gamma\alpha}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Alors $P = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times K / \sim$ $\quad (x,k) \sim (y,k')$

si $x = y$, $\exists\, \alpha, \beta$, $\psi_{\beta\alpha}$, t.q $x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$

et $\psi_{\beta\alpha}(x)\, k = k'$

On a bij

$$\{K\text{-fibré principal}\}/_{\text{iso}} \overset{\text{bij}}{\sim} H^1(X, K).$$

Exemple 1) $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\psi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $\psi_{\beta\alpha} = d[\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}] : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{R})$

Alors $GL(X) = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times K / \sim$ est un $GL_n(\mathbb{R})$-fibré principal.

(le fibré de Répère)

- $GL(TX) = \bigsqcup_{x \in X} \{\text{Hom}^{\text{inv}}(\mathbb{R}^n, T_x X)\} = \bigsqcup_{x \in X} \{(e_1, \dots, e_n) \text{ base de } T_x X\}$

2) (X, g^{TX}) Riem, $\psi_{\beta\alpha} = d[\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}] : U_\alpha \cap U_\beta \to O(n)$

$O(X) = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times O(n) / \sim$ $\quad O(n)$-fibré principal.

$= \bigsqcup_{x \in X} \{\text{Iso}(\mathbb{R}^n, T_x X)\} = \bigsqcup_{x \in X} \{(e_1, \dots, e_n) \text{ BON de } T_x X\}$

3) (X, g^{TX}) Riem & orienté, $\psi_{\beta\alpha} = d[\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}] : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(n)$

$SO(X) = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times SO(n)/\sim$ $\quad SO(n)$-fibré principal.

$= \bigsqcup_{x \in X} \{\text{Iso}^{+}(\mathbb{R}^n, T_x X)\} = \bigsqcup_{x \in X} \{(e_1, \dots, e_n) \text{ BON orienté de } T_x X\}$ (+ orienté)

fibré vectoriel associé

- Soit $P \xrightarrow{\pi} X$ π-fibré principal
- V espace vectoriel, $\rho : K \to GL(V)$

Def : $E = P \underset{\rho}{\times} V$ ($= P \times V / \sim$ " avec $(p,v) \sim (p',v')$ si $\exists k \in K$ t.q $pk = p'$, $k^{-1}v = v'$)

Rq • $P = \left(\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times K \right) / \sim$ avec $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to K$

• $\rho \circ \psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(V)$

Alors : $E \longrightarrow \left[\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times V \right] / \{ \rho \circ \psi_{\beta\alpha} \}$

$$\{ \underbrace{[x,k]}_{\in P}, v \} \longmapsto [x, \rho(k) \cdot v]$$

Donc : Si P est déf par $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to K$

- $\rho : K \to GL(V)$
- $E = P \underset{\rho}{\times} V$ est déf par $\rho \circ \psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(V)$

e.g. $TX = GL(X) \underset{\rho}{\times} \mathbb{R}^n$

Prop : $C^\infty(X, E) = \left[C^\infty(P, V) \right]^K$

Dém : $S \in C^\infty(X,E) \Leftrightarrow S_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, V)$ t.q $S_\beta(x) = \rho \circ \psi_{\beta\alpha}(x) \, S_\alpha(x)$

$\Leftrightarrow \tilde{S}_\alpha(x,k) = k^{-1} \cdot S_\alpha(x)$ t.q

1) $\tilde{S}_\alpha \in C^\infty(U_\alpha \times K, V)^K$

2) $\tilde{S}_\beta(x, \psi_{\beta\alpha}(x) k) = \tilde{S}_\alpha(x,k)$ si $U_\alpha \cap U_\beta \Rightarrow \tilde{S} \in C^\infty(P,K)$

$\Leftrightarrow \tilde{S} \in C^\infty(P,V)^K$

Vérif 1) $\left[k' \cdot \tilde{S}_\alpha\right](x,k) = \rho(k') \cdot \tilde{S}_\alpha(x, kk')$

$= \rho(k')\rho(kk')^{-1} \cdot S_\alpha(x)$

$= \rho(k)^{-1} \cdot S_\alpha(x) = \tilde{S}(x,k)$.

Vérif 2) $\tilde{S}_\beta(x, \psi_{\beta\alpha}(x) k) = \rho\left[\psi_{\beta\alpha}(x) k\right]^{-1} S_\beta(x)$

$= \rho\left[\psi_{\beta\alpha}(x) \cdot k\right]^{-1} \cdot \rho\left[\psi_{\beta\alpha}(x)\right] S_\alpha(x)$

$= \rho(k^{-1}) \cdot S_\alpha(x) = \tilde{S}_\alpha(x,k)$ #

Application

- $P \xrightarrow{\pi} X$ fibré principal
- V espace euclidien, $\rho : K \to U(V)$, Rep unitaire.

Il existe une metrique canonique sur $E = P \times_K V$

$C^\infty(X, E^* \otimes \bar{E}^*) = C^\infty(P, V^* \otimes \bar{V}^*)^K$

- la metrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V est dans $V^* \otimes V^*$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle \in C^\infty(P, V^* \otimes V^*)$ def une section constant
- K preserv $\langle \cdot, \cdot \rangle \Rightarrow$ la section est K-inv

Rq : les structure sur la Rep de π deviennent des structures sur le fibré vectoriel.

II.2 variété spinorielle.

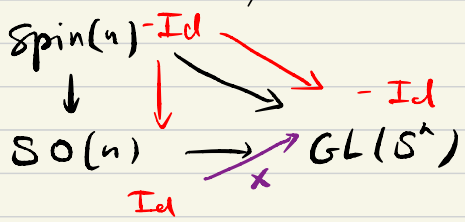
- (X, g^{TX}) variété Riem orienté
- $c(TX) = O(x) \underset{O(n)}{\times} c(\mathbb{R}^n) = SO(x) \underset{SO(n)}{\times} c(\mathbb{R}^n)$

on veut défini $S^{TX} = \bigsqcup_{x \in X} S^{TX}_x$.

- mais $SO(x) \underset{SO(n)}{\times} S^n$ n'est pas bien déf

car $SO(n) \not\curvearrowright S^n$

Rq : si $SO(n) \curvearrowright S^n$, on a

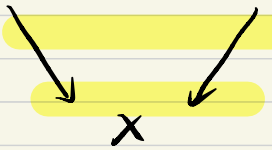


qui est absurd.

Def : une structure spinorielle sur une variété Riem (X, g^{TX}) orientée est un $Spin(n)$-fibré principal $Spin(x)$ t.q

$Spin(x) \xrightarrow{\Xi} SO(x)$ $\forall p \in Spin(x)$, $k \in Spin(n)$

et $\Xi(p \cdot k) = \Xi(p) \cdot \lambda(k)$ où



$\hookrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to Spin(n) \xrightarrow{\lambda} SO(n) \to 1$

Rq • localement, $\Xi : U_\alpha \times Spin(n) \longrightarrow U_\alpha \times SO(n)$

$(x, k) \longmapsto (x, \lambda(k))$

Rq • si $Spin(x)$ est déf par $\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin(n)$

Alors $SO(n)$ est déf par $\lambda \circ \psi_{\beta\alpha}$.

Def • $(X, g^{TX}, Spin(X))$ est dit une variété spinorielle.

• $S^{TX} = Spin(X) \times_{Spin(n)} S^n$ est le fibre spinorielle.

Rq : si $\dim X$ = paire, • $S^{TX} = S^{TX}_+ \oplus S^{TX}_-$

• $C(TX) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = End(S^{TX})$

si $\dim X$ = impair $C(TX) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq End(S^{TX}_+) \oplus End(S^{TX}_-)$.

Prop : S^{TX} admet une metrique hermitienne "canonique" t.q

$\langle c(u)\cdot, \cdot\rangle = -\langle \cdot, c(u)\cdot\rangle$ $\forall u \in C^\infty(X, TX)$.

Dém : la métrique sur S^n est $Spin(n)$ invariant. $\Rightarrow \langle \cdot,\cdot\rangle_{S^{TX}}$ existe #

V.3 Obstruction

• $SO(X) \to X$ est déf par $\psi_{\alpha\beta} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, SO(n))$

Rq • $\tilde{\psi}_{\alpha\beta} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, Spin(n))$ t.q $\lambda \circ \tilde{\psi}_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}$ existe toujours (car $U_\alpha \cap U_\beta$ simplement connexe.)