Produits infinis

S. Allais, L. Poyeton

Exercice 1 (La fonction zêta)**.** La fonction zêta est définie sur le demi-plan

$$U = \{z \mid \mathfrak{Re}\,(z) > 1\}$$

par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z}$$

où $n^{-z} = exp(-z \log n)$, avec la branche principale du logarithme.

1. Montrer que ζ est holomorphe sur U.
2. Montrer que pour tout $z \in U$, on a
$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-z}}.$$
3. Montrer que la somme des inverses des nombres premiers diverge.

Exercice 2. Montrer que pour tout $z \in \Delta$, on a

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + z^{2^k}\right) = \frac{1}{1 - z}$$

Exercice 3 (Un développement en produit infini)**.** On cherche à calculer dans cet exercice un développement eulérien du sinus.

1. Montrer que le produit
$$\pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$
définit une fonction entière. Dans la suite de l'exercice, on la notera f.
2. En déduire l'expression de la dérivée logarithmique de f en un point z non entier :
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$
3. On définit $u(z) = \frac{f(z)}{\sin(\pi z)}$
   — Calculer la dérivée logarithmique de u et montrer que $\frac{u'}{u}$ est périodique.
   — Montrer que u' est nulle. (**Indication :** On pourra utiliser que $|cotan(x + iy)|^2 \leqslant coth(y)^2$ et que $coth$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.)
   — En déduire le développement en produit infini sur $\mathbf{C}$:
$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$
4. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$