## Conséquences de la théorie de Cauchy

S. Allais, L. Poyeton

**Exercice 1** (Pour s'échauffer)**.**
1. Trouver toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$ vérifiant $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
2. Montrer que les fonctions réelles $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \longrightarrow \mathbf{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sont analytiques et donner leur rayon de convergence en un point quelconque.

**Exercice 2** (Principe de réflexion de Schwarz)**.**
1. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbf{C}$ et $D$ une droite affine de $\mathbf{C}$. Montrer que si une fonction $f$ est holomorphe sur $\Omega \setminus (D \cap \Omega)$ et continue sur $\Omega$, alors elle est holomorphe sur $\Omega$.
2. Soit $H = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im\mathrm{m}\,(z) > 0\}$ et $f : \overline{H} \longrightarrow \mathbf{C}$ continue et holomorphe sur $H$ telle que $f(\mathbf{R}) \subseteq \mathbf{R}$. Montrer que $f$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier.

**Exercice 3.** Soif $f$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $U$ contenant le disque unité fermé. On suppose que $f(z) \in \mathbf{R}$ si $|z| = 1$. Montrer que $f$ est constante.

*Indication : considérer $e^{if}$.*

**Exercice 4.** Soient $w_1, \ldots, w_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer qu'il existe un nombre complexe $w$ de module 1 tel que

$$\prod_{k=1}^{n} |w - w_k| = 1.$$

**Exercice 5** (Transformée de Laplace d'une gaussienne)**.** Soit

$$L : \begin{cases} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \zeta & \mapsto & \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2 - 2\pi\zeta x} \mathrm{d}x. \end{cases}$$

1. Montrer que $L$ est holomorphe.
2. Calculer $L(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$. En déduire une expression non-intégrale de $L$.

**Exercice 6** (Classification des biholomorphismes du disque (fin))**.** Avec ce qui a été vu dans les TD et DM précédents, nous pouvons affirmer que les applications homographiques du disque unité dans lui-même sont exactement celles de la forme

$$z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad \text{avec } |a|^2 - |b|^2 = 1$$

et qu'elles forment un groupe naturellement isomorphe à $PSU_{1,1}(\mathbf{C})$ que l'on notera abusivement $PSU_{1,1}(\mathbf{C})$.

1. Soit $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ un biholomorphisme fixant 0. Montrer que $f$ est une rotation.
2. En déduire que l'ensemble des biholomorphismes du disque est égal au groupe $PSU_{1,1}(\mathbf{C})$.
3. Montrer que le groupe des biholomorphismes du demi-plan supérieur est $PSL_2(\mathbf{R})$.