Singularités

S. Allais, L. Poyeton

Exercice 1. Déterminer les points singuliers isolés des fonctions suivantes, puis déterminer leur nature (singularité levable, pôle, singularité essentielle) et calculer leurs résidus en ces pôles :

$$z \mapsto \exp(1/z) \quad z \mapsto \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \quad z \mapsto \frac{1}{\exp(z)-1} - \frac{1}{z}$$
$$z \mapsto \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}} \quad z \mapsto \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) \quad z \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sin(1/z)}\right)$$

Exercice 2 (Fonctions holomorphes sur une couronne)**.** Soient $0 < r < R$ et f une fonction holomorphe sur la couronne ouverte $\Omega = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } r < |z| < R\}$.

1. Soient γ_1 et γ_2 les cercles de centre 0 et de rayon r_1 et r_2, avec $0 < r < r_1 < r_2 < R$ orientés dans le même sens. Soit z de module $r_1 < |z| < r_2$. Montrer alors que
$$2i\pi f(z) = \int_{\gamma_2} \frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u - \int_{\gamma_1} \frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u$$
2. En déduire que l'on peut décomposer f de manière unique sous la forme :
$$f(z) = f_1(z) + f_2\left(\frac{1}{z}\right)$$
avec f_1 holomorphe sur le disque $|z| < R$, f_2 holomorphe sur le disque $|z| < 1/r$ et $f_2(0) = 0$.
3. En déduire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ converge sur Ω et que sa somme vaut f.
4. En déduire que si f est holomorphe sur le disque épointé $D(0,R)\backslash\{0\}$ et bornée sur un voisinage épointé, alors f se prolonge sur $D(0,R)$ tout entier en une fonction holomorphe.

Exercice 3 (Sur les points réguliers et singuliers)**.** Soit une série entière $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On dit qu'un point ζ du cercle unité est *régulier* s'il existe une fonction holomorphe g définie au voisinage de ζ et qui coïncide avec f là où les deux fonctions sont définies. Dans le cas contraire, on dit que ζ est *singulier*

1. Y a-t-il un lien entre la singularité d'un point ζ du cercle de convergence et la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n \zeta^n$
2. Montrer que f admet au moins un point singulier sur son cercle de convergence.
3. Montrer que si les a_n sont des réels positifs, 1 est un point singulier.
4. En déduire que la série entière $\sum_{n\in\mathbf{N}} z^{n!}$ n'est prolongeable en aucun point du cercle de convergence.

Exercice 4. Soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert $\Omega = D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. Supposons

$$|f(z)| \leq A|z-z_0|^{-1+\epsilon}$$

pour $\epsilon > 0$, et z proche de z_0. Montrer que la singularité de f en z_0 est effaçable, c'est-à-dire que f s'étend en une fonction holomorphe sur le disque entier.

Exercice 5 (Produits de Blaschke). 1. Soit $f : \Delta \to \Delta$ une fonction holomorphe et propre (i.e. l'image réciproque par f d'un compact est compact).

(a) Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros que l'on note $a_1, \dots, a_n$ (ils sont comptés avec multiplicité).

(b) On note $g = \prod_{i=1}^{n} \frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z}$. Rappeler pourquoi $g(\Delta) \subset \Delta$ et montrer que $|g(z)| = 1$ si $|z| \to 1$.

(c) Montrer qu'il existe $\rho \in \mathbf{C}$ avec $|\rho| = 1$ et $f = \rho g$.

On dit que ρg est un *produit de Blaschke (fini).*

2. Soit maintenant $f : \Delta \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe bornée non constante. On note $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite de ses zéros (répétés avec multiplicité). On pose

$$b_n(z) = \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}.$$

Montrer que $\sum(1 - |a_n|) < \infty$ (*on pourra appliquer le principe du maximum à la fonction* f/B_N *avec* $B_N(z) = \prod_{n=0}^{N} b_n(z)$).

3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de Δ vérifiant la condition (dite de *Blaschke*) $\sum(1 - |a_n|) < \infty$.

(a) Montrer que le produit $\prod b_n$ converge localement uniformément sur Δ.

(b) En déduire qu'il existe une fonction holomorphe bornée sur Δ admettant la suite a_n pour zéros comptés avec multiplicité.

Exercice 6 (La fonction Gamma). On définit la fonction Γ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

1. Quel est *a priori* le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ ? Est-elle holomorphe sur ce domaine ?
2. Montrer que $\forall z \in \mathcal{D}, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. En déduire un prolongement analytique de Γ sur tout $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_{-}$.
4. Donner le résidu de Γ en les entiers négatifs.