Produits infinis, Représentations conformes

S. Allais, L. Poyeton

Exercice 1. 1. Soient R et S deux rectangles (pleins) du plan. On suppose qu'il existe une fonction holomorphe f, définie sur un ouvert contenant R, telle que $f(R) = S$.

(a) Montrer que f induit une bijection entre les sommets de R et ceux de S.

(b) Soit C un côté du rectangle S. Montrer qu'il existe un côté c du rectangle R tel que $f(c) \cap C$ soit infini. En se ramenant au cas où c et C sont inclus dans $\mathbf{R}$, montrer que $f(c) = C$ et conclure que f envoie chaque côté de R sur un côté de S.

(c) Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction entière à croissance linéaire et en déduire que f est une transformation affine et que R et S sont semblables.

(d) Si R et S sont deux rectangles non semblables, montrer qu'il existe une fonction g, holomorphe sur ?, telle que $f(\mathring{R}) = \mathring{S}$, et telle que l'image par f d'un rectangle inclus dans $\mathring{R}$ n'est jamais un rectangle.

2. On suppose à présent que R et S sont deux polygones à n côtés, et f est toujours une application holomorphe définie sur un ouvert contenant R telle que $f(R) = S$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que f réalise une bijection du bord de R sur le bord de S et que les angles intérieurs de R et S sont les mêmes. En déduire que f induit une application conforme de l'intérieur de R sur celui de S.

Exercice 2 (Un développement en produit infini)**.** On cherche à calculer dans cet exercice un développement eulérien du sinus.

1. Montrer que le produit
$$\pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$
définit une fonction entière. Dans la suite de l'exercice, on la notera f.

2. En déduire l'expression de la dérivée logarithmique de f en un point z non entier :
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

3. On définit $u(z) = \frac{f(z)}{\sin(\pi z)}$
   — Calculer la dérivée logarithmique de u et montrer que $\frac{u'}{u}$ est périodique.
   — Montrer que u' est nulle. (**Indication :** On pourra utiliser que $|cotan(x + iy)|^2 \leqslant coth(y)^2$ et que $coth$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.)
   — En déduire le développement en produit infini sur $\mathbf{C}$:
$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Exercice 3. Montrer que $f(z) = -\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ est une représentation conforme de $\Delta \cap \mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$.

Exercice 4. Montrer que pour tout $z \in \Delta$, on a

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}$$

Exercice 5. Soit f une représentation conforme du disque unité Δ sur un carré ouvert de centre 0 noté C. On suppose $f(0) = 0$ et on note $f(z) := \sum a_k z^k$ un développement en série entière autour de 0 de f. Soit $g : z \mapsto f^{-1}(if(z))$ du disque dans le disque.

1. Montrer que g est bien défini et qu'il existe α un nombre complexe de module 1 tel que $g(z) = \alpha z$ pour tout z dans le disque.
2. Montrer que $f(iz) = if(z)$ et que $a_k = 0$ pour $k \not\equiv 1[4]$.