Aire et Volume

Exercice 1 (Définition et lien avec le déterminant)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n, on fixe $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{E}$ une isométrie affine. La mesure de Lebesgue sur $\mathcal{E}$, $\mathrm{Leb}_{\mathcal{E}}$, est définie par $\mathrm{Leb}_{\mathcal{E}} = f_* \mathrm{Leb}_{\mathbb{R}^n}$ (on rappelle que le poussé-en-avant d'une mesure μ par une fonction mesurable g — ou la mesure image de μ par g — est défini par $g_*\mu(A) := \mu(g^{-1}(A))$). On veut montrer que cette définition est indépendante du choix de f.

1. Soient $1 \leqslant i < j \leqslant n$ deux entiers et $T \in GL_n(\mathbb{R})$ la matrice de transvection $T = I_n + E_{i,j}$. Soient $C_- := T([0,1]^n) \cap \{x_i \leqslant 1\}$ et $C_+ := T([0,1]^n) \cap \{x_i > 1\}$, montrer que $[0,1]^n = C_- \cup (C_+ - e_i)$ où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique.
2. Étant donnés des vecteurs $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$, notons P le parallélotope porté par ceux-ci. Montrer que $\mathrm{Leb}_{\mathbb{R}^n}(P) = |\det(u_1, \dots, u_n)|$.
   Indication : on utilisera la décomposition d'une matrice inversible en produit de transvections et de dilatation.
3. Montrer que la définition de $\mathrm{Leb}_{\mathcal{E}}$ est indépendante du choix de f. Plus précisément, montrer que $\mathrm{Leb}_{\mathcal{E}}$ est l'unique mesure μ invariante par translation telle que $\mu(C) = 1$ pour un hypercube C de côté 1.

1 Calculs de Volumes classiques

On confondra les termes « volume » et « mesure de Lebesgue » par la suite et on réservera le terme « aire » à la mesure de Lebesgue d'un plan euclidien.

Exercice 2 (Formulaire élémentaire)**.**
1. Soit $abcd$ un trapèze, c'est-à-dire un quadrilatère (convexe) dont les côtés $[ab]$ et $[cd]$ sont parallèles. Soit $h = \mathrm{dist}((ab),(cd))$ sa hauteur, montrer que $\mathrm{Aire}(abcd) = h\frac{ab+cd}{2}$.
2. Déduire de la formule précédente les formules classiques des aires du parallélogramme, du rectangle et du triangle.
3. Soit B un ensemble mesurable d'un hyperplan affine $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$, on dit que $P \subset \mathcal{E}$ est un prisme de base B et de hauteur h si P est la réunion des segments $[bb']$ où $b \in B$ et $b' \in B + \vec{v}$ avec $\vec{v}$ vecteur fixé et $h = \mathrm{dist}(\mathcal{H}, \mathcal{H} + \vec{v})$. Montrer que $\mathrm{Leb}_{\mathcal{E}}(P) = \mathrm{Leb}_{\mathcal{H}}(B)h$.

Exercice 3 (Simplexes et boules n-dimensionnels)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n.

1. Soient $O \in \mathcal{E}$ et $u_1, \dots, u_n \in \vec{\mathcal{E}}$, on définit les simplexe $S \subset \mathcal{E}$ et parallélotope $P \subset \mathcal{E}$ associés par
$$S = \left\{ O + \sum_i \lambda_i u_i \text{ pour } \lambda_i \in [0,1] \text{ et } \sum_i \lambda_i \leqslant 1 \right\} \quad \text{et}$$
$$P = \left\{ O + \sum_i \lambda_i u_i \text{ pour } \lambda_i \in [0,1] \right\}.$$
   En utilisant l'invariance de la mesure de Lebesgue sous l'action des matrices de permutation de $GL_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Leb}(S) = \frac{1}{n!}\mathrm{Leb}(P)$.

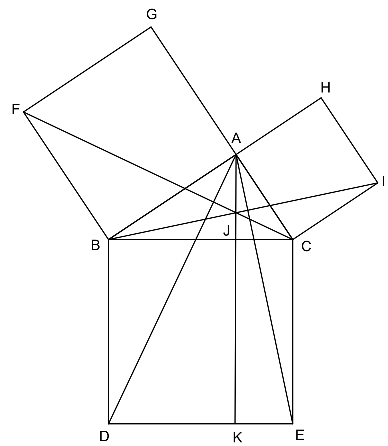

FIGURE 1 – Preuve d'Euclide du théorème de Pythagore

2. Soit $x \in \mathcal{E}$, on note $B(x,r) \subset \mathcal{E}$ la boule de rayon $r > 0$ centrée en x. Montrer que $\mathrm{Leb}(B(x,r)) = \mathrm{Leb}(B(x,1))r^n$. En déduire que

$$\mathrm{Leb}(B(x,r)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n.$$

Exercice 4 (Principe de Cavaliéri et applications)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n. On fixe un hyperplan vectoriel $H \subset \overrightarrow{\mathcal{E}}$.

1. Démontrer le principe de Cavaliéri : Si $A, B \subset \mathcal{E}$ sont deux ensembles mesurables tels que $A \cap \mathcal{H}$ et $B \cap \mathcal{H}$ sont de volume égal (vus dans l'hyperplan affine $\mathcal{H}$) pour tout hyperplan $\mathcal{H}$ de direction H, alors $\mathrm{Leb}(A) = \mathrm{Leb}(B)$.
2. (Volume de la boule selon Archimède) On se place dans un espace affine euclidien de dimension 3. Montrer qu'une demi-boule de rayon r a pour volume $\mathrm{Leb}(Z) - \mathrm{Leb}(C)$ où Z est un cylindre de rayon r et de hauteur r et C est un cône de rayon r et de hauteur r. En déduire que le volume d'une boule de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$.
3. (Volume d'un cône) On considère un ensemble mesurable K d'un hyperplan affine $\mathcal{H}$. Le cône C de base K et de sommet $s \in \mathcal{E}$ est, par définition, la réunion des segments $[sk]$ où $k \in K$. Montrer que $\mathrm{Leb}_{\mathcal{E}}(C) = \frac{1}{n}\mathrm{Leb}_{\mathcal{H}}(K)h$ où $h = \mathrm{dist}(s, \mathcal{H})$. On commencera par le cas où K est un simplexe pour une démonstration n'utilisant que le principe de Cavaliéri et la formule du volume d'un simplexe.

2 Aire et théorèmes classiques

Exercice 5 (Preuve élémentaire du théorème de Thalès)**.** Soient abc un triangle et $b' \in (ab)$, $c' \in (ac)$ tels que $(b'c')$ soit parallèle à (bc).

1. Montrer que les triangles $bc'b'$ et $cc'b'$ ont même aire.
2. Montrer que $\frac{\mathrm{Aire}(ab'c)}{\mathrm{Aire}(ab'c')} = \frac{ab}{ab'}$. En déduire le théorème de Thalès.

Exercice 6 (Preuve d'Euclide du théorème de Pythagore)**.** Soit ABC un triangle rectangle en A. Comme indiqué sur la figure 1, soient $CBDE$, $ACIH$ et $BAGF$ les carrés basés extérieurement sur les côtés respectifs BC, CA et AB de ce triangle. On note encore $J \in (BC)$ et $K \in (DE)$ les points intersectant la hauteur du triangle ABC issue de A. Nous voulons montrer que $\mathrm{Aire}(CBDE) = \mathrm{Aire}(ACIH) + \mathrm{Aire}(BAGF)$; pour ce faire, nous allons montrer que les rectangles $JBDK$ et $CJKE$ ont respectivement même aire que les carrés $BAGF$ et $ACIH$.

1. Montrer que les triangles ABD et BCF sont isométriques.
2. En déduire que les triangles BDJ et BAF ont même aire.
3. Conclure.

Exercice 7 (Triangle et cercles inscrit et circonscrit [Boyer III.4.6])**.** Soit ABC un vrai triangle du plan euclidien, on note

- a, b et c les longueurs respectives des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$,
- $p := \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre de ABC,
- S l'aire de ABC,
- r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit à ABC
- α, β et γ les angles aux sommets a, b et c.

1. Montrer la loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

2. Montrer la formule de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3. Montrer que $S = pr$.

Exercice 8 (Aire de l'ellipse de Steiner [Boyer IV.4.3.5])**.** Soit un triangle ABC. L'ellipse de Steiner $\mathcal{E}$ est l'unique ellipse intérieure à ABC et tangente aux milieux des côtés de ce triangle. On admettra l'unicité dans cet exercice.

1. Montrer l'existence d'une telle ellipse.
   Indication : on utilisera le fait que le groupe affine préserve l'ensemble des ellipses.
2. Montrer que $\frac{\mathrm{Aire}(\mathrm{Conv}(\mathcal{E}))}{\mathrm{Aire}(ABC)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
3. En utilisant l'exercice 7, montrer que l'ellipse de Steiner est l'ellipse intérieure à ABC d'aire maximale.