Convexité

Exercice 1. Quels sont les convexes de $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Montrer qu'une réunion croissante de convexes est convexe.

Exercice 3 (Somme de Minkowski, Berger T. 3 p. 11)**.** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux convexes d'un espace vectoriel E, soient α et $\alpha' \in \mathbb{R}$, montrer que $\alpha\mathcal{C} + \alpha'\mathcal{C}'$ est un convexe.

Exercice 4 (ε-voisinage, Berger T. 3 pp. 11–12)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ et tout $\varepsilon > 0$, on note $V(\mathcal{A}, \varepsilon) := \{x \in \mathcal{E} \mid d(x, \mathcal{A}) < \varepsilon\}$ le ε-voisinage ouvert (resp. $\overline{V}(\mathcal{A}, \varepsilon) := \{x \in \mathcal{E} \mid d(x, \mathcal{A}) \leqslant \varepsilon\}$ le ε-voisinage fermé) de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que $V(\mathcal{A}, \varepsilon) = \mathcal{A} + \mathbb{B}(0, \varepsilon)$, où $\mathbb{B}(0, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε dans E.
2. Si $\mathcal{A}$ est compact, montrer que $\overline{V}(\mathcal{A}, \varepsilon) = \mathcal{A} + \overline{\mathbb{B}(0, \varepsilon)}$.
3. En déduire que si $\mathcal{A}$ est convexe alors $V(\mathcal{A}, \varepsilon)$ est convexe. Si de plus $\mathcal{A}$ est compact, en déduire également que $\overline{V}(\mathcal{A}, \varepsilon)$ est convexe.

Exercice 5. Dans un espace affine de dimension infinie, l'enveloppe convexe d'un compact est-elle compacte ?

Exercice 6 (Points centraux, Matoušek sect. 1.4)**.** Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension n et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ un ensemble fini de cardinal k. On dit qu'un point $M \in \mathcal{E}$ est *central* pour $\mathcal{A}$ si tout demi-espace fermé contenant M contient au moins $\frac{k}{n+1}$ points de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que M est central si et seulement si pour tout demi-espace ouvert δ contenant strictement plus de $\frac{n}{n+1}k$ points de $\mathcal{A}$ on a $M \in \delta$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ possède un point central.

Exercice 7 (Projection sur un convexe fermé)**.** On se place dans un espace de Hilbert H (espace vectoriel de dimension potentiellement infinie muni d'un produit scalaire induisant une métrique complète). Soit C un convexe fermé de H.

1. Redémontrer l'identité du parallélogramme :
$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right), \quad \forall u, v \in H.$$
Comment cette identité s'interprète-t-elle en géométrie euclidienne ?
2. Soit $x \in H$, montrer que l'infimum
$$\inf_{y \in C} \|y - x\|$$
est atteint en un unique point noté $p_C(x) \in C$.
On montrera que toute suite (y_n) de C approchant l'infimum est de Cauchy.
3. Montrer que $p_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne, idempotente ($p_C \circ p_C = p_C$) et qu'elle est monotone dans le sens où
$$\forall x, y \in H, \quad (p_C(x) - p_C(y) | x - y) \geqslant 0.$$

4. Montrer que pour $x \in H$, le point $p_C(x)$ est l'unique point de C vérifiant les deux inégalités équivalentes

$$\forall y \in C, \quad \|x - p_C(x)\| \leqslant \|x - y\|,$$
$$\forall y \in C, \quad (x - p_C(x)|y - p_C(x)) \leqslant 0.$$

   Que dire de ces inégalités si $p_C(x)$ est extrémal ? Si C est strictement convexe ?
5. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H, montrer que $p_F : H \to F$ est une projection vectorielle.
6. Montrer que H est isomorphe à la somme directe $F \oplus F^\perp$ si F est un espace vectoriel fermé (par isomorphisme entre espaces de Hilberts, on entend un isomorphisme vectoriel préservant le produit scalaire).
7. Montrer le théorème de représentation de Riesz : l'application linéaire $H \to H'$ définie par $x \mapsto (x|\cdot)$, où H' est le dual topologique de H (*i.e.* l'ensemble des formes linéaires *continues* de H) est un isomorphisme entre espaces de Hilbert.
   On appliquera la question précédente à $F = \ker \alpha$ pour $\alpha \in H'$.

Séparation et points extrémaux

Exercice 8. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux convexes disjoints d'un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie.

1. Si B est d'intérieur non vide, montrer qu'il existe un hyperplan affine qui sépare $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
2. Montrer qu'on peut se passer d'hypothèse sur $\mathcal{B}$, en se ramenant à la question précédente.

Exercice 9 (Séparation, Berger T. 3 sect. 11.4)**.** Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux convexes disjoints dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer les résultats de séparation suivants.

1. Si A et B sont ouverts, alors il existe un hyperplan qui les séparent strictement.
2. Si A est fermé et B est compact, alors il existe un hyperplan qui les séparent strictement.

Exercice 10 (Convexes fermés, Berger T. 3 sect. 11.5)**.** Montrer qu'un convexe fermé dans un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Exercice 11 (Lemme de Farkas, Matoušek sect. 1.2)**.** Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, montrer qu'une et une seule des possibilités suivantes est vérifiée.

1. Il existe $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ dont les composantes sont positives ou nulles et tel que $Mx = 0$.
2. Il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que toutes les composantes de $(y^{\mathrm{t}})M = 0$ soient strictement négatives.

Exercice 12 (Enveloppe convexe du groupe orthogonal, FGN alg. 1 pp. 329–330, Queffélec–Zuily pp. 206–207)**.** On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\varphi_M : A \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$.

1. Montrer que $M \mapsto \varphi_M$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers son dual.
2. Montrer que $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est un compact inclus dans $\mathbb{B}$, la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$, $\max\limits_{A \in \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} \varphi(A) = \max\limits_{A \in O_n(\mathbb{R})} \varphi(A)$.
4. Montrer que pour tout $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$, $\max\limits_{A \in \mathbb{B}} \varphi(A) = \max\limits_{A \in O_n(\mathbb{R})} \varphi(A)$.
   (*Indication :* écrire φ comme φ_M et utiliser la décomposition polaire de M)
5. Conclure que $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \mathbb{B}$.

Exercice 13 (Point extrémal)**.** Soient $\mathcal{C}$ un convexe d'un $\mathbb{R}$-espace affine et $M \in \mathcal{C}$.

1. Montrer que M est extrémal si et seulement si $\mathcal{C} \setminus \{M\}$ est convexe.
2. Montrer que M est extrémal si et seulement si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, $M \notin \,]AB[$.

Exercice 14 (Existence d'un point extrémal, Barvinok p. 53)**.** Soit $\mathcal{C}$ un convexe d'un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie ne contenant pas de droite. Montrer que $\mathcal{C}$ possède un point extrémal.

Exercice 15 (Théorème de Birkhoff–von Neumann, Barvinok sect. II.5)**.** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $M_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients (m_{ij}) vérifient $m_{ij} = 1$ si $j = \sigma(i)$ et $m_{ij} = 0$ sinon. Les $(M_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ sont appelées *matrices de permutations.*

On appelle matrice *bi-stochastique* une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs telle que la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne soit égale à 1.

1. Vérifier que les matrices de permutation sont bi-stochastiques.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ des matrices bi-stochastiques est un convexe.
3. Montrer que $\mathcal{B} = \mathrm{Conv}\left(\{M_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}\right)$.
4. En déduire une preuve du lemme de mariage suivant : soit G un graphe fini biparti (ce qui revient à dire que les sommets ont une couleur blanche ou noire de sorte que deux sommets voisins sont de couleurs distinctes) de degré k (tel que tout sommet ait k voisins). Montrer que G admet un couplage complet (il existe un sous-ensemble de ses arêtes tel que chaque sommet de G appartienne à une et une seule de ces arêtes).

Remarque : une autre application de ce résultat est de démontrer le théorème de Schur sur les matrices symétriques, voir Barvinok p. 60.