Stabilisateurs, groupes d'isométries et représentations

Étant donné une groupe G agissant sur un ensemble X, le stabilisateur d'une partie $A \subset X$ sous l'action de G est défini comme étant le sous-groupe

$$\mathrm{Stab}_G(A) := \{g \in G \mid g \cdot A = A\},$$

on parle aussi de groupe d'isotropie de A (notamment en anglais).

Étant donnée une partie A d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, son groupe d'isométries (respectivement d'isométries directes) noté $\mathrm{Isom}(A)$ (resp. $\mathrm{Isom}_+(A)$) est le stabilisateur de A par le groupe des isométries (resp. isométries directes) de $\mathcal{E}$.

Exercice 1 (Stabilisateur d'une partie convexe)**.** Soit C un convexe compact d'intérieur non vide d'un espace affine (réel) $\mathcal{E}$. On note $G := \mathrm{Stab}_{GA(\mathcal{E})}(C)$ et $G_+ := \mathrm{Stab}_{GA_+(\mathcal{E})}(C)$.

1. Montrer que toute application affine $g \in G$ préserve le volume.
2. Montrer que toute application affine $g \in G$ stabilise l'ensemble des points extrémaux de C.
3. Supposons que C admette un nombre fini de points extrémaux $x_1, \dots, x_n \in C$, montrer qu'il existe alors un morphisme de groupe injectif

$$G \hookrightarrow \mathfrak{S}(\{x_1, \dots, x_n\}) \simeq \mathfrak{S}_n.$$

   On peut donc voir le stabilisateur de C comme un sous-groupe des permutations de ses points extrémaux (il est donc fini dans ce cas).
4. En supposant toujours le nombre de points extrémaux finis, montrer que tout $g \in G$ stabilise l'isobarycentre des points extrémaux. En déduire que $f \mapsto \overrightarrow{f}$ restreint à G est un morphisme injectif. On peut donc voir le stabilisateur de C comme un sous-groupe des applications de $GL(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ de déterminant ± 1.
5. En utilisant l'intégrale de Lebesgue, montrer que la conclusion de la question précédente demeure dans le cas général.
6. Supposons que $G \neq G_+$. Montrer que le morphisme $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ induit par le déterminant (en identifiant les groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\{\pm 1\}$) s'inscrit dans la suite exacte courte :

$$1 \to G_+ \to G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$

Exercice 2 (Groupes diédraux)**.** On se place sur le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ identifié à $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ par le choix d'un repère. Soit P le polygone régulier à n côté défini comme l'enveloppe convexe des racines n-ième de l'unité. On note $G = \mathrm{Isom}(\mathcal{P})$ et $G_+ = \mathrm{Isom}_+(\mathcal{P})$. Le groupe diédral est par définition le groupe d'isométries

$$D_{2n} := \mathrm{Stab}_G(P),$$

(parfois noté D_n).

1. Vérifier que les racines n-ième de l'unité sont bien les sommets de P (*i.e.* ses points extrémaux). En déduire que D_{2n} peut se voir comme un sous-groupe de permutation des sommets de P.
2. Montrer que tout $g \in D_{2n}$ fixe 0, en déduire

$$\mathrm{Stab}_{G_+}(P) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \text{puis} \quad D_{2n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

   On précisera des générateurs de D_{2n} associés à ces isomorphismes.

Exercice 3 (Groupes d'isométrie du tétraèdre régulier et table de caractère de $\mathfrak{S}_4$)**.** Un tétraèdre est dit régulier si tous ses sommets sont à égale distance les uns des autres.

1. Construire un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$. On notera A, B, C et D ses sommets, G son groupe d'isométries et G_+ son sous-groupe d'isométries directes.
2. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale $s_{A,B}$ échangeant A et B tout en fixant C et D.
3. En déduire un isomorphisme $G \simeq \mathfrak{S}_4$ puis $G_+ \simeq \mathfrak{A}_4$.
4. Suivant les isomorphismes précédents, à quelle transformation correspond une bitransposition ? Un 3-cycle ?
5. En déduire un caractère irréductible χ_T de $\mathfrak{S}_4$ tel que $\chi_T(\mathrm{id}) = 3$. On pourra déterminer géométriquement les classes de conjugaison de G ou bien écrire les transformations de G matriciellement dans une base affine.
6. Donner une preuve géométrique (*i.e.* sans utiliser le caractère χ_T) de l'irréductibilité des représentations de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$.
7. Déduire du caractère χ_T la table de caractère de $\mathfrak{S}_4$.
8. Généraliser l'étude de G au cas du n-simplexe régulier de $\mathbb{R}^n$ (dont on donnera une construction).

Exercice 4 (Groupes d'isométrie du cube)**.** On considère un cube C de sommets A_i, B_i pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ de sorte que $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$ soient des faces parallèles du cube déduites l'une de l'autre de la translation de vecteur $\pm\overrightarrow{A_1B_1}$. Soient G et G_+ ses groupes d'isométrie et d'isométrie directe respectivement.

1. Montrer que G_+ agit sur les grandes diagonales de C par permutations, en tirer un morphisme $G_+ \to \mathfrak{S}_4$
2. Montrer que ce morphisme est un isomorphisme.
3. Suivant l'isomorphisme précédent, à quelles transformations correspondent transpositions, bitranspositions, 3-cycles et 4-cycles ?
4. En déduire une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_4$ isomorphe à celle du groupe d'isométrie du tétraèdre.
5. Montrer que $G \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donner des générateurs de ce groupe.

Exercice 5 (Stabilisateur des quadriques centrées)**.** Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, notons $J_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$ et $O(p,q) \subset GL_{p+q}(\mathbb{R})$ son stabilisateur par l'action de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ sur les matrices symétriques par congruences :

$$O(p,q) := \{M \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) \mid {}^tMJ_{p,q}M = J_{p,q}\}.$$

On se place dans un espace affine réel $\mathcal{E}$ de dimension n.

1. Rappeler pourquoi toute quadrique centrée non dégénérée et non vide $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{E}$ a pour équation, dans un certain repère cartésien,

$$\sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{p+q} x_k^2 = 1, \tag{1}$$

   où $p + q = n$ et $p \geqslant 1$. Fixons un tel repère cartésien, identifiant $\mathcal{E}$ à $\mathbb{R}^n$ de sorte que $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = 1\}$ où Q est la forme quadratique définie du côté gauche de l'équation (1).
   Soit $g \in GA(\mathcal{E})$ telle que $g(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$.

2. Soit $C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(g(x)) = Q(x)\}$. Montrer que $\mathcal{Q} \subset C$ et que, si $x \in C$, alors $\mathbb{R}x \subset C$.
3. Montrer que $C = \mathbb{R}^n$.
4. En déduire que $\mathrm{Stab}_{GA(\mathcal{E})}(\mathcal{Q}) \simeq O(p,q)$.

Exercice 6 (Sous-groupes compacts maximaux de $GL_n(\mathbb{R})$)**.** Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ la boule unité fermée et $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe compact.

1. Montrer que $K := G \cdot B = \bigcup_{x \in B} G \cdot x$ est un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ invariant sous l'action de G.
2. Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ l'ellipsoïde de John-Loewner associée à K (défini à l'exercice 7). Montrer que $\mathcal{E}$ est invariant sous l'action de G.
3. En déduire que G est conjugué à un sous-groupe du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ (on dit que les conjugués de $O_n(\mathbb{R})$ sont les sous-groupes compacts maximaux de $GL_n(\mathbb{R})$).

Exercice 7 (Ellipsoïde de John-Loewner)**.** Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, on souhaite montrer qu'il existe un unique ellipsoïde centré en 0 et de volume minimal contenant K.

Étant donnée une matrice symétrique positive $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{E}_S \subset \mathbb{R}^n$ l'ellipsoïde (dégénéré si S n'est pas définie positive) défini par l'équation ${}^t xSx \leqslant 1$, $\forall x \in \mathcal{E}_S$. Considérons l'ensemble

$$C := \{S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \mid K \subset \mathcal{E}_S\} \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que C et convexe et fermé.
2. En utilisant le fait qu'il existe une boule de centre $a \in K$ et de rayon $r > 0$ incluse dans K, montrer que C est borné.
3. Si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ montrer que le volume de son ellipsoïde vaut

$$\mathrm{Leb}(\mathcal{E}_S) = \frac{b_n}{\sqrt{\det(S)}},$$

   où $b_n > 0$ est le volume de la boule unité (on se placera dans une bonne base orthonormée ou sinon on aura recourt à la racine de S).
4. Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et $\lambda \in]0,1[$, $\det(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \det(A)^\lambda \det(B)^{1-\lambda}$ avec égalité si, et seulement si, $A = B$ (on codiagonalisera A et B et on passera au logarithme).
5. Conclure.