

TER DE M1 - 2025-2026
MASTER DE MATHÉMATIQUES
SORBONNE UNIVERSITÉ

SIMON ANDRÉ

Vous trouverez ci-dessous les sujets proposés. Le fichier sera mis à jour régulièrement.

Problème de la partition de nombres. Proposition de TER

On considère l'ensemble de N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ de même loi et de second moment fini. On souhaite le subdiviser en deux sous-ensembles disjoints $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ tels que les sommes de variables aléatoires dans chacun de ses sous-ensembles $\sum_{X_i \in \mathcal{A}_1} X_i$ et $\sum_{X_i \in \mathcal{A}_2} X_i$ soient les plus proches possibles. On pourrait reformuler ce problème en terme de la mécanique statistique. On va associer à chaque subdivision en deux sous-ensembles $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ une configuration de spins $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ où $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ pour $i = 1, 2, \dots, N$ en admettant que $X_i \in \mathcal{A}_1$ si $\sigma_i = 1$ et $X_i \in \mathcal{A}_2$ si $\sigma_i = -1$. Les sommes de variables aléatoires dans les sous-ensembles sont donc $\sum_{i=1}^N X_i \times \mathbf{1}_{\sigma_i=1}$ et $\sum_{i=1}^N X_i \times \mathbf{1}_{\sigma_i=-1}$. Leur différence est la variable aléatoire

$$Y_N(\sigma) = \sum_{i=1}^N X_i (\mathbf{1}_{\sigma_i=1} - \mathbf{1}_{\sigma_i=-1}).$$

On note S_N l'ensemble de 2^N configurations de spins. On cherche donc à étudier la loi de

$$Z_N = \min_{\sigma \in S_N} |Y_N(\sigma)|.$$

Il s'avère que Z_N proprement normalisée converge en loi quand $N \rightarrow \infty$ vers la loi exponentielle de paramètre 1. Plus généralement, nous allons considérer 2^N variables aléatoires sur $\mathbf{R}^+$ $|Y_N(\sigma^1)|, |Y_N(\sigma^2)|, \dots, |Y_N(\sigma^{2^N})|$ associées à toutes les différentes répartitions de $X_1, \dots, X_N$ en deux sous-ensembles. Ce processus ponctuel de 2^N points, si à nouveau proprement normalisé, converge en loi vers le processus de Poisson sur $\mathbf{R}^+$: les distances entre les points de la loi limite sont les variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1, le nombre de points dans chaque segment $[a, b]$ est de loi de Poisson de paramètre $b - a$ et il est indépendant du nombre de points dans tout autre segment disjoint avec $[a, b]$. Ainsi, avec un certain facteur de normalisation C_N :

$$\sum_{j=1}^{2^N} \delta_{C_N |Y_N(\sigma^j)|} \rightarrow \mathcal{P} \text{ processus de Poisson sur } \mathbf{R}^+$$

Nous généraliserons ensuite ce problème pour la répartition en K sous-ensembles disjoints et considérerons la convergence du processus ponctuel associé dans $\mathbf{R}_+^{K-1}$.

Prerequis nécessaires :

- Cours Probabilités Approfondies au 1er semestre de M1 validé
- Cours Processus de sauts en S2 de M1 suivi

Encadrante : Irina Kourkova, professeur au Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires.
E-mail : Irina.Kourkova@sorbonne-universite.fr

Formule de Weyl

Frédéric Klopp

Coordonnées de l'encadrant : Frédéric Klopp
bureau 16-26-412,
frederic.klopp@imj-prg.fr

Le but de ce sujet de TER est de donner une introduction à la géométrie spectrale par le biais de la formule de Weyl. Dans un article resté célèbre ([2]), Mark Kac se pose la question : est-il possible d'entendre la forme d'un tambour ? Une réponse partielle (on peut en entendre certaines caractéristiques) était déjà connue depuis un demi-siècle ([4]).

La formule de Weyl donne l'asymptotique des grandes valeurs propres du Laplacien de Dirichlet sur un domaine ouvert de $\mathbb{R}^d$; elle stipule que, pour n grand, la n -ième valeur propre (comptée avec multiplicité) se comporte comme $(n/c)^{2/d}$ où, à une constante universelle près, c est le quotient du volume du domaine considéré par le volume de la boule unité de même dimension.

Le but du TER est de démontrer cette formule et, ce faisant, d'acquérir des techniques d'analyse des équations aux dérivées partielles, de théorie spectrale, etc.

Références

- [1] Jozef Dodziuk. Eigenvalues of the Laplacian and the heat equation. *Amer. Math. Monthly*, 88(9):686–695, 1981.
- [2] Mark Kac. Can One Hear the Shape of a Drum? *The American Mathematical Monthly*, 73(4):1–23, 1966.
- [3] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [4] Hermann Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). *Math. Ann.*, 71(4):441–479, 1912.

Théorie de Floquet

Frédéric Klopp

Coordonnées de l'encadrant : Frédéric Klopp
bureau 16-26-412,
frederic.klopp@imj-prg.fr

Le but de ce sujet de TER est de donner une introduction à la théorie de Floquet des opérateurs différentiels elliptiques périodiques. L'étude suivra le fil de l'article [1]. On étudiera de nombreux aspects de la théorie des opérateurs différentiels, aspects spectraux, aspects liés à l'analyse des EDPs. On y verra aussi de nombreuses applications, en particulier à la physique du solide.

Références

- [1] Peter Kuchment. An overview of periodic elliptic operators. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 53(3):343–414, 2016.

ÉTUDE STATISTIQUE DE STYLES MUSICAUX

LAURENT MAZLIAK

laurent.mazliak@sorbonne-universite.fr

But : proposer à un étudiant ayant de solides connaissances en statistiques, en simulation numérique et en analyse et harmonie musicales de faire une petite expérimentation statistique sur la musique de quelques compositeurs pour mieux comprendre les choix stylistiques. Si la thématique n'est pas en prise immédiate avec les mathématiques, mon idée est d'utiliser des processus statistiques et probabilistes assez fins pour tester des hypothèses. Et je suis convaincu que ça peut être tout à fait formateur pour un étudiant motivé.

Lois a posteriori fractionnaires et de Gibbs

ISMAËL CASTILLO

ismael.castillo@upmc.fr

Partant d'un modèle statistique avec une famille de lois de densités $p(x; \theta)$ et d'une loi a priori Π de densité $\pi(\theta)$ sur θ , la formule de Bayes usuelle donne la densité de la loi a posteriori classique $\Pi[\cdot | X]$ comme

$$p(\theta | X) \propto \exp\{\ell(\theta; X)\}\pi(\theta),$$

où $\ell(\theta; X) = \log(p(X; \theta))$ est la log-vraisemblance et $\propto$ signifie 'proportionnel à'.

En statistique et apprentissage bayésiens, il est fréquent de considérer des lois a posteriori légèrement modifiées, où l'on remplace $\ell(\theta; X)$ dans la formule ci-dessus par

- $\alpha \ell(\theta; X)$ pour un réel $\alpha \in (0, 1)$ (loi a posteriori *fractionnaire*),
- $-R(\theta; X)$ pour $R(\cdot; \cdot)$ une fonction à choisir (loi a posteriori *de Gibbs*).

L'objectif de ce TER est d'étudier les implications de ces différents choix du point de vue statistique, le long des directions suivantes

- comprendre en détail l'un des résultats de l'article [1], qui montre que le fait de mettre suffisamment de masse a priori autour du 'vrai' paramètre inconnu θ_0 du modèle ne suffit pas à garantir la convergence vers θ_0 de $\Pi[\cdot | X]$, alors qu'on sait que cela suffit pour l'a posteriori fractionnaire [3]; nous rechercherons un contre-exemple plus simple.
- du point de vue des résultats positifs, nous étudierons les résultats obtenus récemment dans [2] sur le comportement des a posteriori de Gibbs et ferons une étude par simulation pour différents modèles et fonctions R .

Pré-requis : cours de statistique du 1er semestre, et/ou de solides connaissances en probabilités et conditionnement.

Références

- [1] A. Barron, M. J. Schervish, and L. Wasserman. The consistency of posterior distributions in nonparametric problems. *Ann. Statist.*, 27(2) :536–561, 1999.
- [2] J. W. Miller. Asymptotic normality, concentration, and coverage of generalized posteriors. *J. Mach. Learn. Res.*, 22 :Paper No. 168, 53, 2021.
- [3] S. Walker and N. L. Hjort. On Bayesian consistency. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 63(4) :811–821, 2001.

AUTOUR D'UNE CONJECTURE DE ZELMANOV

SIMON ANDRÉ

Le groupe libre F_n est, informellement, le plus gros groupe que l'on puisse fabriquer à partir de n éléments. Un élément de F_n est dit primitif s'il appartient à une base de F_n (c'est-à-dire à une partie génératrice de F_n de cardinal n), et l'on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des éléments primitifs de F_n . Le groupe libre est un groupe incontournable lorsque l'on s'intéresse aux groupes infinis et, pour diverses raisons, il est naturel de s'intéresser aux morphismes de F_n vers des groupes linéaires. Le mathématicien russe Zelmanov (connu pour sa solution du problème de Burnside restreint, qui lui a valu la médaille Fields en 1994) a conjecturé que, pour tout entier $n \geq 3$ et tout entier $m \geq 1$, tout morphisme $\varphi \in \text{Hom}(F_n, \text{GL}_m(\mathbb{C}))$ tel que $\varphi(\mathcal{P}_n)$ est composé d'éléments d'ordre fini a une petite image (plus précisément, $\varphi(F_n)$ a un sous-groupe résoluble d'indice fini). Cette conjecture est apparentée à un célèbre résultat de Burnside selon lequel tout sous-groupe de $\text{GL}_m(\mathbb{C})$ dont les éléments sont d'ordre fini est fini, ainsi qu'à un autre résultat important qui affirme que $\text{Aut}(F_n)$ n'est pas linéaire si $n \geq 3$ (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de morphisme injectif de $\text{Aut}(F_n)$ vers $\text{GL}_m(\mathbb{C})$ si $n \geq 3$). Le TER pourrait prendre les directions suivantes :

- étudier le résultat de Burnside ;
- étudier la non-linéarité de $\text{Aut}(F_n)$ pour $n \geq 3$;
- essayer de vérifier la conjecture de Zelmanov pour de petites valeurs de l'entier m (pour $m = 2$, via des techniques de géométrie hyperbolique) ;
- comprendre pourquoi l'hypothèse $n \geq 3$ est essentielle dans la conjecture.

Prérequis : théorie des groupes et algèbre linéaire.

Contact :

Simon André
simon.andre@imj-prg.fr
Bureau 16-26-529