

TD n°5. Du groupe à l'algèbre

1 Calculs d'algèbres de Lie

Exercice 1. Montrer que les ensembles suivants sont bien des groupes de Lie linéaires, et déterminer leur algèbre :

$$a) B_n = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix} \in \text{GL}_n \right\}$$

$$b) T_n = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in \text{GL}_n \right\}$$

$$c) N_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_n \right\}$$

$$d) \mathbb{C}^\times = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right\}$$

Solution.

- a) Si l'on n'a pas d'intuition directe, on peut procéder comme suit. Soit $x \in \mathfrak{b}_n$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tx) \in B_n$. Soient $i > j$ et $\pi_{i,j}$ la forme coordonnée naturelle (la projection sur $E_{i,j}$ parallèlement aux autres $E_{k,\ell}$). Alors $\forall t \in \mathbb{R}, \pi_{i,j} \exp(tx) = 0$. Dérivant en 0 ($\pi_{i,j}$ est linéaire), on trouve $\pi_{i,j}x = 0$. Ceci démontre que x est triangulaire supérieure.

Réciproquement, si x est de la forme $\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}, tx$ aussi, et $\exp(tx) \in B_n$.

Conclusion :

$$\text{Lie } B_n = \mathfrak{b}_n = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix} \right\}$$

- b) On voit de même que

$$\text{Lie } T_n = \mathfrak{t}_n = \left\{ \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix} \right\}$$

- c) Par le même argument de projections,

$$\text{Lie } N_n = \mathfrak{n}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- d) Il s'agit bien sûr d'un groupe réel. Notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de \mathbb{C}^\times .

Soit $x \in \mathfrak{g}$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, (\pi_{1,1} - \pi_{2,2})(\exp tx) = 0$ et $(\pi_{1,2} + \pi_{2,1})(\exp tx) = 0$. Dérivant, on arrive à x de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si x est de cette forme, alors tx aussi, et l'on a bien $\exp x \in \mathbb{C}^\times$ comme un rapide calcul d'exponentielle matricielle le montre.

Voici un tel calcul. Les valeurs propres de x sont $a \pm ib$, et des vecteurs propres associés sont $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant 2, et d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On trouve ainsi $PxP^{-1} = \begin{pmatrix} a-ib & \\ & a+ib \end{pmatrix}$, et $P(\exp x)P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{a-ib} & \\ & e^{a+ib} \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} e^{-ib} & \\ & e^{ib} \end{pmatrix}$,
d'où $\exp x = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^\times$.

2 Étude de \mathfrak{sl}_2

Exercice 2.

- a) Déterminer $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.
b) Montrer que toute matrice $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ -conjuguée à l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

où λ et θ sont réels. Quand a-t-on conjugaison sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

- c) Montrer que toute matrice $M \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ -conjuguée à l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\lambda \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} i\theta & \\ & -i\theta \end{pmatrix}$$

où λ et θ sont réels. Calculer l'exponentielle de ces matrices.

- d) En déduire que $\exp \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr} M > -2\} \cup \{-I_2\}$.
e) $\exp \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est-il connexe ? est-ce un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$?

Solution.

- a) C'est du cours : $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \ker \mathrm{Tr} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

- b) Soit $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Si M est diagonalisable sur \mathbb{C} , puisque $\det M = 1$, elle est conjuguée à $\begin{pmatrix} z & \\ & z^{-1} \end{pmatrix}$. Comme $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$, l'ensemble des valeurs propres est stable par conjugaison complexe, donc $\bar{z} = z$ ou z^{-1} . Si $z \in \mathbb{R}$, M est du type 1. Si $z \notin \mathbb{R}$, alors $\bar{z} = z^{-1}$, et comme le produit $z\bar{z}$ vaut 1, M est du type 4. Si M n'est pas diagonalisable sur \mathbb{C} , alors elle possède une valeur propre double, qui à cause de $\det M = 1$ est solution de $\lambda^2 = 1$: M est donc conjuguée à $\begin{pmatrix} \varepsilon & z \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, où $\varepsilon = \pm 1$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mais notant x_1, x_2 les vecteurs propres concernés et quitte à prendre $\frac{1}{z}x_2$, on peut supposer $z = 1$: M est donc du type 2 ou 3.

Il reste à déterminer quand la conjugaison se fait par une matrice *réelle*. Nous affirmons que c'est le cas pour les matrices de type 1, 2, et 3 (il est clair que ce ne peut pas l'être pour une matrice de type 4, hormis $\pm I_2$). En effet, démontrons le résultat suivant :

Deux matrices réelles qui sont $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ -conjuguées sont $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ -conjuguées.

Supposons $AP = PB$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et écrivons $P = Q + iR$. Alors, terme-à-terme, $AQ = QB$ et $AR = RB$; le problème est que Q et R n'ont pas de raison d'être inversibles. Mais formons $S_\lambda = Q + \lambda R$; on a encore $AS_\lambda = S_\lambda B$. Alors $f(\lambda) = \det S_\lambda$ est un polynôme à coefficients réels, mais comme $f(i) = \det P \neq 0$, ce n'est pas le polynôme nul : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) \neq 0$, et S_λ est alors inversible; elle conjugue A et B .

- c) Soit $M \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Si M est diagonalisable sur \mathbb{C} , alors à cause de la trace, M est conjuguée à $\begin{pmatrix} z & \\ & -z \end{pmatrix}$. Ici encore, l'ensemble des valeurs propres est stable par conjugaison, donc $\bar{z} = \pm z$. Si z est réelle, on a le type 2. Sinon, z est imaginaire pure : type 3. Si M n'est pas diagonalisable sur \mathbb{C} , alors elle possède une valeur propre double, solution de $2\lambda = 0$: M est du type 2.

Calculons l'exponentielle de ces diverses matrices. Il est clair que :

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & x \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix}; \quad \exp \begin{pmatrix} \lambda & \\ & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \\ & e^{-\lambda} \end{pmatrix}; \quad \exp \begin{pmatrix} i\theta & \\ & -i\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

d) Rappelons que si $M = PDP^{-1}$, alors $\exp M = P(\exp D)P^{-1}$, si bien que pour tout $M \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, $\exp M$ est conjuguée à l'une des matrices de la réponse précédente. Leur trace est respectivement 2, $e^x + e^{-x}$, $2 \cos \theta$.

Il est clair que $\{e^x + e^{-x} : x \in \mathbb{R}\} = [2, +\infty[$ et $\{2 \cos \theta : \theta \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$; mais -2 n'est atteint que pour $\cos \theta = -1$. Si M est conjuguée à $\begin{pmatrix} (2k+1)i\pi & \\ & -(2k+1)i\pi \end{pmatrix}$, alors $\exp M$ est conjuguée à $-I_2$, donc $\exp M = -I_2$.

La valeur -2 est donc atteinte seulement en $-I_2$. On a bien $\exp \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \subseteq \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr} M > -2\} \cup \{-I_2\}$.

Montrons la réciproque. Si $\mathrm{Tr} M > 2$, alors M est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ -conjuguée à $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$, disons $M = P\Delta P^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Comme $\Delta = \exp \delta$ avec $\delta \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est invariant sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (i.e., $P\delta P^{-1} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$), on a bien $M \in \exp \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Si $\mathrm{Tr} M = 2$, même raisonnement avec $\begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou I_2 , qui sont clairement l'image d'une exponentielle.

Supposons maintenant $\mathrm{Tr} M \in]-2, 2[$. Alors M est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ -conjuguée à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, qui est elle-même $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ -conjuguée à $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Comme dans la première question, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $M = PR_\theta P^{-1}$. Considérons alors $r_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Puisque $\exp r_\theta = R_\theta$, on a $M = P \exp r_\theta P^{-1} = \exp(P r_\theta P^{-1}) \in \exp \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Cet argument fonctionne également pour $-I_2$. On a donc bien montré l'inclusion réciproque.

e) Comme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est connexe (c'est un \mathbb{R} -espace vectoriel!) et que \exp est continue, $\exp \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est bien sûr connexe. En revanche ce n'est pas un groupe. Si c'en était un, ce serait $\exp \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \langle \exp \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rangle = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))^\circ = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, pourtant on voit bien que $\begin{pmatrix} -2 & \\ & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, de trace < -2 , n'est pas dans $\exp \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

3 Un énoncé piège

Exercice 3 (partiel 2013). On se place dans $M_2(\mathbb{R})$ muni de la norme $\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \max(|a|, |b|, |c|, |d|)$.

Étant donné un nombre entier $m \geq 1$, on pose $X = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & \frac{i}{m} \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ t &\mapsto \exp(tX) \end{aligned}$$

- Montrer que $G = f(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et que $\mathrm{Lie}(G) = \mathbb{R}X$.
- Soit r un nombre réel positif tel que l'application exponentielle réalise un homéomorphisme de $U = B(0, r) \subseteq M_2(\mathbb{C})$ sur son image $V = \exp(U)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Montrer que pour m assez grand on a $f(2\pi) \in V$ mais $f(2\pi) \notin \exp(\mathrm{Lie}(G) \cap U)$.

Solution.

- La fonction f est un morphisme de groupes donc $f(G)$ est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$; comme f est $2m\pi$ -périodique et continue, $f(G) = f([0, 2m\pi])$ est compact, donc fermé. Il est clair que $\mathbb{R}X \leq \mathrm{Lie}(G)$. Soit réciproquement $Y \in \mathrm{Lie}(G)$. Dérivant en 0 on voit que Y est diagonale; comme $\exp(tY)$ reste dans $X \leq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, on a même que Y est diagonale imaginaire pure, $Y = \begin{pmatrix} ia & 0 \\ 0 & ib \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Enfin, $P = \exp(tY)$ vérifie $e^{itmb} = e^{ita}$, donc dérivant en 0 : $imb = ia$, d'où $Y \in \mathbb{R}X$.
- V est un voisinage de l'identité. Pour tout m assez grand, $\frac{2i\pi}{m}$ est proche de 0, donc $f(2\pi)$ est au voisinage de l'identité. En revanche, pour la norme choisie, une matrice $\lambda X \in \mathbb{R}X = \mathrm{Lie}(G)$ n'est dans $U = B(0, r)$ que si $|\lambda| < r$. Ainsi $\mathrm{Lie}(G) \cap U =]-r, r[\cdot X$. L'exponentielle complexe étant injective sur $] -\frac{2\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}[$, $f(2\pi)$ n'est pas de la forme $\exp(\lambda X)$ pour λ petit.

4 Groupes de Lie abéliens connexes

Exercice 4. Soient $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ un groupe de Lie abélien fermé connexe, \mathfrak{g} son algèbre de Lie, et $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'exponentielle.

- a) Montrer que \mathfrak{g} est abélienne : $\forall (x, y) \in \mathfrak{g}^2, [x, y] = 0$.
- b) Montrer que \exp_G est un morphisme de groupes $(\mathfrak{g}, +) \rightarrow (G, \cdot)$.
- c) Montrer que \exp_G est surjective.
- d) Montrer que $\ker \exp_G$ est un sous-groupe discret de \mathfrak{g} .
- e) En déduire que $G \simeq \mathbb{R}^p \times (\mathbb{S}^1)^q$ en tant que groupes topologiques.