TD n°8. Petites algèbres de Lie

Exercice 1. Analyser l'algèbre de Lie des quaternions.

Solution. L'ensemble $\mathbb{H}$ des quaternions est muni d'un produit, donc également d'un crochet $[q_1, q_2] = q_1q_2 - q_2q_1$. Comme dans toute algèbre associative, ce crochet est bien bilinéaire antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi (il faut l'avoir vérifié au moins une fois ; c'est le même calcul pour $\mathfrak{gl}(V)$ que pour toute autre algèbre associative).
Nous devons analyser cette $\mathbb{R}$-algèbre de Lie de dimension 4. On sait que comme espace vectoriel, $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ avec la multiplication familière : $ij = k$, etc. Écrivons alors la table *du crochet* :

$$[1, i] = [1, j] = [1, k] = 0; \qquad [i, j] = ij - ji = 2k; \qquad [i, k] = -2j; \qquad [j, k] = 2i$$

On voit que $\mathbb{R}1$ est centrale, et que $\mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ est un idéal isomorphe à $(\mathbb{R}^3, \wedge)$. Pour ce dernier point, un isomorphisme est bien sûr $i \mapsto 2e_1$, $j \mapsto 2e_2$, $k \mapsto 2e_3$.
Conclusion : en tant qu'algèbre de Lie, $\mathbb{H} \simeq (\mathbb{R}, 0) \oplus (\mathbb{R}^3, \wedge)$.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de classifier les algèbres de Lie en dimension ≤ 3.

a) Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Lie de dimension 1. Montrer que $\mathfrak{L}$ est abélienne. En déduire qu'il existe une unique algèbre de Lie de dimension 1.

b) Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Lie de dimension 2.
   - i) On suppose $\mathfrak{L}$ abélienne. Montrer que $\mathfrak{L}$ est unique.
   - ii) On suppose $\mathfrak{L}$ non-abélienne. Soit $h \in \mathfrak{L}$ tel que $\mathrm{ad}_h \neq 0$. Montrer que $\mathrm{im}\, \mathrm{ad}_h$ est une droite vectorielle. Montrer qu'il existe x tel que, quitte à changer h, on ait $[h, x] = 2x$, puis identifier $\mathfrak{L}$.
   - iii) En déduire qu'il existe une unique algèbre de Lie non-abélienne de dimension 2, et une unique algèbre de Lie abélienne de dimension 2.

c) Soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Lie de dimension 3.
   - i) Montrer que pour tout n, il existe une unique algèbre de Lie abélienne de dimension n.
   - ii) On suppose que $\dim \mathcal{D}(\mathfrak{L}) = 1$. Soit z un générateur de $\mathcal{D}(\mathfrak{L})$.
     - α. On suppose $\mathrm{ad}_z = 0$. Montrer qu'il existe x et y tels que $\mathfrak{L} = \langle x, y, z\rangle$, et $[x, y] = z$. Réaliser $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{b}_3$.
     - β. On suppose $\mathrm{ad}_z \neq 0$. Montrer qu'il existe x tel que $[x, z] = z$. Soit alors $y \in \ker \mathrm{ad}_x$. Montrer qu'on peut supposer $y \in \ker \mathrm{ad}_x \cap \ker \mathrm{ad}_z$. En déduire qu'on peut écrire $\mathfrak{L} = \langle x, y, z\rangle = \langle y\rangle \oplus \langle x, z\rangle$, où $\langle x, z\rangle$ est l'algèbre de Lie non-abélienne de dimension 2. Réaliser $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{b}_3$.
   - iii) On suppose que $\dim \mathcal{D}(\mathfrak{L}) = 2$. Soient y, z des générateurs de $\mathcal{D}(\mathfrak{L})$. Montrer qu'il existe x tel que $\mathfrak{L} = \langle x, y, z\rangle$ et $[x, y] = ay + cz$, $[x, z] = by + dz$ pour des scalaires $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Montrer que $[y, z] = 0$. En déduire un isomorphisme entre $\mathfrak{L}$ et la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{K})$ engendrée par :
     $$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
     Ces algèbres de Lie sont-elles isomorphes entre elles ?
   - iv) On suppose enfin que $\dim \mathcal{D}(\mathfrak{L}) = 3$.
     - α. Montrer que $\mathfrak{L}$ est simple. En déduire que $\mathfrak{L}$ s'injecte dans $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{K})$ via la représentation adjointe. On note $\mathfrak{L}_1$ l'image isomorphe de $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{gl}_3$. Montrer que $\mathfrak{L}_1 \leq \mathfrak{sl}_3(\mathbb{K})$.
     - β. On suppose qu'il existe $h \in \mathfrak{L}$ dont l'image h_1 soit diagonalisable. Montrer que $\mathfrak{L} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on est dans cette situation.
     - γ. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathfrak{L} \not\simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathfrak{L} \simeq \mathfrak{su}_2$.

Où intervient $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ dans cette liste ?

Solution.

a) On a pour tout $x \in \mathfrak{L}$ que $[x,x] = -[x,x]$ donc $[x,x] = 0$. Puis $[x, \lambda x] = \lambda[x,x] = 0$: l'algèbre est abélienne.

b) i) $\mathfrak{L}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^2$ muni du crochet trivial : en fait, n'importe quel isomorphisme linéaire est alors un morphisme d'algèbres de Lie (puisque le crochet est nul des deux côtés).

ii) Comme $\mathrm{ad}_h \neq 0$, $\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_h$ est de dimension au moins 1. Mais comme $h \in \ker \mathrm{ad}_h$, d'après le théorème du rang on a $\dim \mathrm{im}\,\mathrm{ad}_h \leq 1$; c'est donc une droite vectorielle.

Soit alors x tel que $\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_h = \mathbb{K}x$. Si $[h,x] \neq 0$, alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $[h,x] = \lambda x$: renormalisant h, on peut supposer $[h,x] = 2x$. Sinon, c'est que $\mathbb{K}x = \mathrm{im}\,\mathrm{ad}_h = \ker \mathrm{ad}_h = \mathbb{K}h$, donc on peut supposer $x = h$. Mais pourtant il y a y tel que $[h,y] = h$, donc quitte à échanger y et h nous sommes ramenés au cas précédent.

On voit alors que $\mathfrak{L}$ est isomorphe à :

$$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ & -\lambda \end{pmatrix} : (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

iii) La conclusion est évidente.

c) i) C'est la généralisation d'une question précédente : si $\mathfrak{L}$ est abélienne de dimension n, alors n'importe quel isomorphisme linéaire avec $\mathbb{K}^n$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre de Lie.

ii) α. On suppose $\mathrm{ad}_z = 0$, c'est-à-dire $z \in Z(\mathfrak{L})$. Soit $x \in \mathfrak{L}$ tel que $\mathrm{ad}_x \neq 0$ ($\mathfrak{L}$ n'étant pas abélienne) ; x et z sont libres. Alors $0 < \dim \mathrm{im}\,\mathrm{ad}_x \leq \dim \mathcal{D}(\mathfrak{L}) = 1$, donc $\dim \ker \mathrm{ad}_x = 2$, si bien que $\ker \mathrm{ad}_x = \langle x, z \rangle$. Soit $y \notin \ker \mathrm{ad}_x$; alors $[x,y] \in \mathbb{K}z$, et à un scalaire près on peut supposer $[x,y] = z$. On a ainsi une base de $\{x,y,z\}$ de $\mathfrak{L}$, et l'on retrouve l'algèbre de Lie, dite de Heisenberg :

$$\mathfrak{u}_3 = \mathcal{D}(\mathfrak{b}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \nu \\ & 0 & \mu \\ & & 0 \end{pmatrix} : (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3 \right\}$$

β. On suppose $\mathrm{ad}_z \neq 0$. Comme $\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_z \leq \mathcal{D}(\mathfrak{L})$ qui est une droite, on a pour tout $x \notin \ker \mathrm{ad}_z$ que $[x,z]$ est un multiple non-trivial de z ; on peut ainsi supposer $[x,z] = z$. On voit que $\dim \ker \mathrm{ad}_x = 2$. Il suit que les deux plans distincts $\ker \mathrm{ad}_x$ et $\ker \mathrm{ad}_z$ s'intersectent sur une droite : soit y l'engendrant.

On a ainsi z tel que $\mathrm{im}\,\mathrm{ad}_z = \mathcal{D}(\mathfrak{L})$, x tel que $[x,z] = z$, et $y \in \ker \mathrm{ad}_x \cap \ker \mathrm{ad}_z$. Voyons que x, y, z sont libres : si $ax + by + cz = 0$, alors appliquant ad_x, on a $c[x,z] = cz = 0$, donc $c = 0$, mais appliquant ad_z, $a[z,x] = -ax = 0$, donc il reste $by = 0$. Donc $\{x,y,z\}$ est une base de $\mathfrak{L}$.

$\langle y \rangle$ est clairement un idéal (c'est le centre) ; $\langle x, z \rangle$ aussi, car il contient $\langle z \rangle = \mathcal{D}(\mathfrak{L})$ (tout ssev contenant le dérivé est un idéal). On a ainsi $\mathfrak{L} = \langle y \rangle \oplus \langle x, z \rangle$, où le second terme est non-abélien : on sait donc que $\langle x, z \rangle \simeq \mathfrak{b}_2$. Voici pour conclure une réalisation dans $\mathfrak{b}_3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \\ & -\lambda & \\ & & \nu \end{pmatrix} : (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3 \right\}$$

iii) Soient y et z engendrant $\mathcal{D}(\mathfrak{L})$. Si x est libre avec $\mathcal{D}(\mathfrak{L})$, on obtient bien une base de $\mathfrak{L}$, et par définition de $\mathcal{D}(\mathfrak{L})$ on a des relations $[x,y] = ay + cz$, $[x,z] = by + dz$.

Il faut maintenant montrer que $[y,z] = 0$, ce qui revient à dire que $\mathcal{D}(\mathfrak{L})$ est abélienne. Si ce n'est pas le cas, on sait que $\mathcal{D}(\mathfrak{L}) \simeq \mathfrak{b}_2$, donc on peut supposer $[y,z] = z$. Partant de l'identité de Jacobi, nous calculons un peu :

$$\begin{aligned} 0 &= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] \\ &= [x,z] + [[x,z],y] + [z, ay + cz] \\ &= by + dz + [by + dz, y] - a[y,z] \\ &= by + dz - d[y,z] - a[y,z] \\ &= by - az \end{aligned}$$

donc $a = b = 0$, si bien que $[x,y]$, $[x,z]$, et $[y,z]$ sont tous dans $\langle z \rangle$: il suit que $\dim \mathcal{D}(\mathfrak{L}) = 1$, contradiction. Ceci démontre bien $[y,z] = 0$.

On considère alors l'isomorphisme linéaire étendant la fonction :

$$x \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad z \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont on peut vérifier qu'il préserve le crochet de Lie.

Ces algèbres de Lie ne sont pas isomorphes entre elles. Par exemple, avec $a = d = 1$ et $b = c = 0$, on trouve dans $\mathfrak{L}$ un élément x tel que $(\mathrm{ad}_x)_{|\mathcal{D}(\mathfrak{L})} = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}(\mathfrak{L})}$. Mais avec $a = 1 = -d$, $b = c = 0$, il n'existe pas de tel élément.

iv) α. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal propre de $\mathfrak{L}$. Alors $\dim \mathfrak{I} \leq 2$, donc $\mathfrak{I}$ est résoluble ; si $\mathfrak{I} \neq 0$, alors $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ est aussi résoluble, donc $\mathfrak{L}$ est résoluble, si bien que $\mathcal{D}(\mathfrak{L}) \neq \mathfrak{L}$: contradiction. Ceci montre que $\mathfrak{L}$ est simple.

On considère alors :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad} : & \mathfrak{L} & \to & \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{gl}(\mathfrak{L} \in \mathbb{K}\text{-ev}) \\ & x & \mapsto & \mathrm{ad}_x \end{array}$$

qui est un morphisme d'algèbres de Lie. Rappelons si nécessaire que par l'identité de Jacobi, on a bien :

$$\begin{array}{rcl} [\![\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]\!](z) & = & \mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y(z) - \mathrm{ad}_y \circ \mathrm{ad}_x(z) \\ & = & [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = [x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\ & = & -[z,[x,y]] = [[x,y],z] \\ & = & \mathrm{ad}_{[x,y]}(z) \end{array}$$

donc $[\![\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]\!] = \mathrm{ad}_{[x,y]}$.

Comme $\mathfrak{L}$ est simple et non-abélienne, $\ker \mathrm{ad} = Z(\mathfrak{L}) = 0$. Soit $\mathfrak{L}_1 = \mathrm{im}\, \mathrm{ad}$. Alors comme $\mathfrak{L} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$, on a $\mathfrak{L}_1 = [\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_1] \leq [\mathfrak{gl}_3(\mathbb{K}), \mathfrak{gl}_3(\mathbb{K})] = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{K})$.

β. Supposons qu'il existe $h \in \mathfrak{L}$ tel que $h_1 = \mathrm{ad}_h$ soit diagonalisable. Notons que h_1 est vecteur propre, associé à 0. Comme la trace est nulle, on a deux autres valeurs propres $\pm\alpha \in \mathbb{K}$. Si $\alpha = 0$, alors h_1 est diagonalisable à valeurs propres nulles : donc $h_1 = 0$, c'est-à-dire $h \in Z(\mathfrak{L})$, contre la simplicité. Ainsi a-t-on $\alpha \neq 0$, et quitte à changer h, on peut supposer $\alpha = 2$.

Ceci nous donne deux vecteurs propres x et y dans $\mathfrak{L}$, tels que $h_1(x) = 2x$ et $h_1(y) = -2y$. Revenant à $\mathfrak{L}$, ceci signifie $[h,x] = 2x$ et $[h,y] = -2y$. Mais alors,

$$[h,[x,y]] = -[x,[y,h]] - [y,[h,x]] = -[x,2y] - [y,2x] = 0$$

si bien que $[x,y] \in \langle h \rangle$, et l'on peut supposer que $[x,y] = h$; l'isomorphisme avec $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est dès lors évident.

C'est le cas sur $\mathbb{C}$. En effet, si l'élément $z \in \mathfrak{L}$ induit un z_1 non-diagonalisable, alors z_1 doit avoir au moins une valeur propre double. Mais comme 0 est toujours valeur propre et que $\mathrm{Tr}\, z_1 = 0$, ceci signifie que z_1 a pour unique valeur propre 0 : donc ad_z est nilpotent. Or le théorème de Engel indique que si tous les éléments d'une algèbre de Lie sont nilpotents, alors l'algèbre est nilpotente, et à plus forte raison non-simple. Donc sur $\mathbb{C}$ il y a au moins un élément h tel que h_1 soit diagonalisable, ce qui montre $\mathfrak{L} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

γ. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathfrak{L} \not\simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$; on sait qu'aucun élément ad_t n'est diagonalisable. On sait en outre que tous les éléments de $\mathfrak{L}_1$ ne sont pas nilpotents théorème de Engel). Soit donc $t \in \mathfrak{L}$ tel que ad_t ne soit ni nilpotent, ni diagonalisable ; il admet donc pour valeurs propres 0 et deux complexes conjugués de somme nulle (car $\mathfrak{L}_1 \leq \mathfrak{sl}_3(\mathfrak{L})$) : $0, i\lambda, -i\lambda$. Quitte à changer t, on peut supposer $\lambda = 2$.

Dans l'espace complexifié, il existe alors deux vecteurs q_+ et q_- tels que $t_1(q_+) = 2iq_+$ et $t_1(q_-) = -2iq_-$. Soient $x = \Re(q_+)$ et $y = \Im(q_+)$ les parties réelle et imaginaire (qui sont bien des vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{L}$). Comme $t_1 \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R}) \leq \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ est $\mathbb{R}$-linéaire, on a :

$$[t,x] = \mathrm{ad}_t(q_+) = t_1(q_+) = t_1(\Re(q_+)) = \Re(2iq_+) = 2y$$

et de même, $[t,y] = -2x$. La vérification de ce que l'on peut supposer $[x,y] = 2t$ est similaire à celle pour $\mathfrak{sl}_2$.

Or on a dans $\mathfrak{su}_2$:

$$t = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$$

vérifiant ces mêmes relations. D'où l'isomorphisme.

Rappelons que $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ est une algèbre de Lie. Elle est simple, mais n'est pas isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$: en fait c'est $\mathfrak{su}_2$, comme on peut le vérifier en renormalisant t, x, y.