

Notes de cours L2 — 2M360¹

Sophie Chemla

18 octobre 2015

1. Ce texte est sous Licence Creative commons CC-BY-NC-SA

Ce cours reprend en partie des cours de

- Jean Marie Trépreau ([2])
- Sylvie Delabrière ([1]).

Je remercie Joseph Antonios d'avoir relu une version préliminaire de ce texte.

Table des matières

1	Logique et raisonnements	5
1.1	Propositions	5
1.2	Quantificateurs	8
2	Suites numériques	11
2.1	Rappel sur $\mathbb{R}$	11
2.2	Suites réelles	12
2.3	Suites à valeurs complexes	18
3	Séries numériques	21
3.1	Généralités sur les séries numériques	21
3.2	Séries à termes positifs	23
3.3	Retour au cas général	27
4	Limites, équivalents et continuité	33
4.1	o , O et équivalents	37
4.2	Continuité et uniforme continuité	38
5	Intégrale de Riemann	41
5.1	Intégrale des fonctions en escalier	41
5.2	Fonctions intégrables au sens de Riemann	43
5.3	Intégrales et primitives	50
5.4	Calcul des primitives	52
5.5	Formules de Taylor	54
6	Intégrales généralisées	57
6.1	Généralités	57
6.2	Intégrales généralisées de fonctions positives	61
7	Suites et séries de fonctions	65
7.1	Suites de fonctions	65
7.2	Séries de fonctions	69
8	Séries trigonométriques	75
8.1	Définitions et convergence	75
8.2	Continuité, dérivation et intégration de la somme	77
8.3	Développement en séries trigonométriques	79

Chapitre 1

Logique et raisonnements

Dans ce chapitre, nous présentons quelques rudiments de logique à la base du raisonnement mathématique.

1.1 Propositions

Définition 1 On appelle proposition tout énoncé (significatif) susceptible d'être vrai ou faux (mais pas les deux à la fois).

Exemple 1 La proposition " $3 > 2$ " est vraie.
La proposition " $3 \leq 2$ " est fausse.

Lorsque les valeurs de vérité d'une assertion dépend des valeurs prises par un paramètre x (respectivement plusieurs paramètres $x, y, \dots$), on note souvent $\mathcal{P}(x)$ (respectivement $\mathcal{P}(x, y, \dots)$) pour le souligner.

Exemple 2 La proposition $\mathcal{P}(x, y, z) : "x = y + z"$ est une assertion dépendant de x, y, z et $\mathcal{P}(1, 1, 0)$ est vraie.

Définition 2 Deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ayant même valeurs de vérité sont dites équivalentes et on note $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$.

Exemple 3 Les propositions " $x \geq 0$ " et " $-x \leq 0$ " sont équivalentes.

On peut faire des opérations sur les propositions.

Définition 3 La proposition non ($\mathcal{P}$), notée aussi $\neg\mathcal{P}$, est

- vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse
- fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

$\mathcal{P}$	$\text{non}(\mathcal{P})$
V	F
F	V

Exemple 4 La négation de la proposition $\mathcal{P}$ "Dans cette classe, tous les enfants savent lire" est non ($\mathcal{P}$) "Dans cette classe, il y a au moins un enfant qui ne sait pas lire".

Remarque 1 Pour démontrer que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie, on peut montrer que non ($\mathcal{P}$) est fausse. C'est le principe du raisonnement par l'absurde.

Définition 4 La proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, est vraie lorsque les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies simultanément.

La proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie.

Ces définitions sont résumées dans le tableau de vérité :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Remarque 2 Attention : le "ou" mathématique n'est pas exclusif :

"($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est vraie" signifie " $\mathcal{P}$ ou bien $\mathcal{Q}$ est vraie", c'est à dire qu'il se peut qu'une seule proposition soit vraie, ou bien que les deux propositions soient vraies. En revanche, le "ou" de la vie courante est exclusif : Dans un menu de restaurant "fromage ou dessert" signifie que l'on a droit à un fromage ou à un dessert mais pas au deux.

Proposition 1 Les propositions non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est équivalente à la proposition non ($\mathcal{P}$) ou non ($\mathcal{Q}$).

Les propositions non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est équivalente à la proposition non ($\mathcal{P}$) et non ($\mathcal{Q}$).

Démonstration. Comparons les tables de vérité.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$	non ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$)
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	non ($\mathcal{P}$)	non ($\mathcal{Q}$)	non ($\mathcal{P}$) et non ($\mathcal{Q}$)
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Définition 5 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. L'assertion (non ($\mathcal{P}$) ou $\mathcal{Q}$) est notée $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et se lit " $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ ". Sa table de vérité est

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	non ($\mathcal{P}$) ou ($\mathcal{Q}$)
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'assertion $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie si $\mathcal{Q}$ ne peut pas être fausse quand $\mathcal{P}$ est vraie. En français, l'implication est traduite pas "si ... alors".

Remarque 3 Lorsque $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie :

-Si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ l'est aussi.

-Si $\mathcal{P}$ est fausse, alors on ne sait rien dire sur la valeur de vérité de $\mathcal{Q}$.

- La négation de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est ($\mathcal{P}$ et non ($\mathcal{Q}$)). Le raisonnement par l'absurde de " $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ " se base sur cette remarque.

Définition 6 Lorsque $\mathcal{P} \implies Q$ est vraie, on dit que :

- $\mathcal{P}$ est une condition suffisante pour Q ,
- Q est une condition nécessaire pour $\mathcal{P}$.

Définition 7 $\text{non}(Q) \implies \text{non}(\mathcal{P})$ est appelée contraposée de $\mathcal{P} \implies Q$.

Le raisonnement par contraposée se base sur la proposition suivante.

Proposition 2 Soient $\mathcal{P}$ et Q deux propositions. La proposition $\mathcal{P} \implies Q$ est équivalente à sa contraposée $\text{non}(Q) \implies \text{non}(\mathcal{P})$.

En effet, les propositions $(\mathcal{P} \implies Q)$ et $(\text{non}(Q) \implies \text{non}(\mathcal{P}))$ ont même table de vérité. $\square$

Le raisonnement par contraposée consiste à montrer la proposition $(\mathcal{P} \implies Q)$ en montrant $(\text{non}Q \implies \text{non}\mathcal{P})$ puisque ses deux propositions sont équivalentes .

Exemple 5 Par exemple, pour montrer qu'une fonction $f : X \rightarrow Y$ est injective, on peut montrer pour tout x, y de X

$$f(x) = f(y) \implies x = y$$

ou

$$x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Remarque 4 On peut aussi montrer $(\mathcal{P} \implies Q)$ par l'absurde. Cela consiste à montrer que $\text{non}(\mathcal{P} \implies Q) = (\mathcal{P} \text{ et } \text{non}(Q))$ est toujours fausse.

Définition 8 $Q \implies \mathcal{P}$ est appelée implication réciproque de $\mathcal{P} \implies Q$.

Définition 9 Soient $\mathcal{P}$ et Q deux propositions. On note $\mathcal{P} \iff Q$ la proposition $(\mathcal{P} \implies Q)$ et $(Q \implies \mathcal{P})$. Sa table de vérité est donnée par

$\mathcal{P}$	Q	$\mathcal{P} \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si $\mathcal{P} \iff Q$ est vraie, on dit que $\mathcal{P}$ est équivalente à Q ou que $\mathcal{P}$ si et seulement si Q .

Démonstration :

$\mathcal{P}$	Q	$\mathcal{P} \implies Q$	$Q \implies \mathcal{P}$	$Q \iff \mathcal{P}$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

1.2 Quantificateurs

Le quantificateur $\forall$ signifie "quel que soit", "pour tout". D'où la définition suivante :

Définition 10 On définit l'assertion

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

comme étant vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$. Cette assertion se lit "quel que soit x dans E , on a $\mathcal{P}(x)$ ".

Exemple 6 L'assertion, $\forall x \in]1, +\infty[, \ln(x) > 0$ est vraie.

Le quantificateur $\exists$ signifie "il existe au moins un". D'où la définition suivante :

Définition 11 On définit l'assertion

$$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$$

comme étant vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$. Cette assertion se lit "il existe x dans E tel que $\mathcal{P}(x)$ ".

Exemple 7 Soit f une fonction définie sur $] -1, 1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'assertion " f s'annule sur l'intervalle $] -1, 1[$ " s'écrit mathématiquement :

$$\exists x \in] -1, 1[, f(x) = 0.$$

La négation de $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ est

$$\text{non}(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) = \exists x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x)).$$

La négation de $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ est

$$\text{non}(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) = \forall x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x)).$$

Le quantificateur $\exists!$ signifie "il existe un unique". D'où la définition suivante :

Définition 12 On définit l'assertion

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$$

comme étant vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour un et un seul élément x de E . Cette assertion se lit "il existe un unique x dans E tel que $\mathcal{P}(x)$ ".

Exemple 8 Il existe un unique x dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\ln(x) = 1$ s'écrit comme suit en langage mathématique : $\exists! x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) = 1$.

La négation de "il existe un unique" est "il n'existe pas ... ou il existe au moins deux".

Remarque 5 On ne peut pas toujours intervertir deux quantificateurs.

On peut intervertir deux quantificateurs $\forall$ consécutifs. En effet

$$\forall x \in E, \forall y \in F = \forall (x, y) \in E \times F = \forall y \in F, \forall x \in E.$$

On peut intervertir deux quantificateurs $\exists$ consécutifs. En effet

$$\exists x \in E, \exists y \in F = \exists (x, y) \in E \times F = \exists y \in F, \exists x \in E.$$

En revanche, on ne peut pas intervertir les quantificateurs $\exists$ et $\forall$ comme le montre le contre exemple suivant. Soit A un sous ensemble et soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. L'assertion

$$\forall a \in A, \exists M \in \mathbb{R}, f(a) \leq M$$

est toujours vraie. En effet M dépend de a et on peut choisir $M = f(a)$.

L'assertion

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, f(a) \leq M$$

est vraie si f est majorée. Dans cette assertion M ne dépend pas de a .

Le raisonnement par récurrence permet de montrer qu'une proposition de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie. Il repose sur le théorème suivant.

Théorème 1 Soit $P(n)$ une propriété définie pour tout entier naturel n et vérifiant :

- i) (initialisation) La propriété $P(0)$ est vraie.
 - ii) (hérédité) $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \text{ vraie} \implies P(n+1) \text{ vraie})$
- alors, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Exemple 9 Démontrons le lemme suivant par récurrence sur $\mathbb{N}$.

Lemme 1 Soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$.

Démonstration : Dans ce cas, $P(n) = "\phi(n) \geq n"$.

Initialisation : On a $\phi(0) \geq 0$ car ϕ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Hérédité : Soit n un entier quelconque. On suppose $\phi(n) \geq n$. Montrons que $\phi(n+1) \geq n+1$. Comme ϕ est strictement croissante, on a $\phi(n+1) > \phi(n) \geq n$. Comme $\phi(n+1)$ est strictement supérieur à n , on a $\phi(n+1) \geq n+1$.

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Rappel sur $\mathbb{R}$

Dans $\mathbb{R}$, on dispose d'une relation d'ordre total $\leq$ (cela veut dire que si x et y sont des réels, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$) vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) si $x \leq y$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $x + a \leq y + a$
- (ii) si x et y sont positifs, alors xy est positif

Définition 13 Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$

- a) $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de $\mathcal{A}$ si, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $a \leq M$.
- b) $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de $\mathcal{A}$ si, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $m \leq a$.
- c) La partie $\mathcal{A}$ est majorée si elle admet au moins un majorant. Elle est minorée si elle admet au moins un minorant.
- d) La partie $\mathcal{A}$ est bornée si elle est majorée et minorée. Autrement dit, la partie $\mathcal{A}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad |a| \leq M$$

Définition 14 Un majorant de $\mathcal{A}$ qui appartient à $\mathcal{A}$ s'appelle un plus grand élément. Un minorant de $\mathcal{A}$ qui appartient à $\mathcal{A}$ s'appelle un plus petit élément.

Proposition 3 Le plus grand élément (respectivement le plus petit élément), s'il existe, est unique.

Définition 15 Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de $\mathcal{A}$ est non vide et admet un plus petit élément, ce dernier est appelé borne supérieure de $\mathcal{A}$ et est noté $\sup \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des minorants de $\mathcal{A}$ est non vide et admet un plus grand élément, ce dernier est appelé borne inférieure de $\mathcal{A}$ et est noté $\inf \mathcal{A}$.

La borne supérieure de $\mathcal{A}$ est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

- $\sup \mathcal{A}$ est un majorant de $\mathcal{A}$.
- pour tout $\varepsilon > 0$, $(\sup \mathcal{A}) - \varepsilon$ n'est plus un majorant.

Mathématiquement :

- $\forall a \in \mathcal{A}, \quad a \leq \sup \mathcal{A}$,
- pour tout $\varepsilon > 0, \exists a \in \mathcal{A}, \quad a > \sup \mathcal{A} - \varepsilon$.

La propriété suivante découle de la construction de $\mathbb{R}$.

Théorème 2 a) Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure.
 b) Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne inférieure.

Remarque 6 Le théorème 2 est faux sur $\mathbb{Q}$.

Exemple 10 Considérons les ensembles $A = [0, \sqrt{2}[$ et $B = A \cap \mathbb{Q}$. L'élément 0 est le plus petit élément de A et de B . Les ensembles A et B admettent $\sqrt{2}$ comme borne supérieure dans $\mathbb{R}$ mais n'admettent pas de plus grand élément. L'ensemble $B \subset \mathbb{Q}$ n'admet pas de borne supérieure sans $\mathbb{Q}$.

Convention :

- a) Si $\mathcal{A}$ n'est pas majorée, on pose $\sup \mathcal{A} = +\infty$.
- b) Si $\mathcal{A}$ n'est pas minorée, on pose $\inf \mathcal{A} = -\infty$.

2.2 Suites réelles

Définition 16 Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\begin{aligned} U : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto U_n \end{aligned}$$

est notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou plus simplement (U_n) .

Définition 17 La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite majorée (respectivement minorée, bornée) si l'ensemble $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré (minoré, borné).

Définition 18 La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (respectivement décroissante) si l'application qui à $n \in \mathbb{N}$ associe U_n est croissante (respectivement décroissante).

Proposition 4 (U_n) est croissante (respectivement décroissante) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \leq U_{n+1}$ (respectivement $U_n \geq U_{n+1}$).

Définition 19 Une suite réelle $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel $U_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. Mathématiquement,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies |U_n - l| < \varepsilon.$$

Une suite qui admet une limite (dans $\mathbb{R}$) est dite convergente. Dans le cas contraire elle est dite divergente.

Les propriétés suivantes sont classiques et vous en trouverez une démonstration dans votre cours de L1.

Théorème 3 La limite, si elle existe, est unique.

Théorème 4 Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites et soit λ un réel. On a les propriétés suivantes :

- Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l' , alors la suite $(\lambda U_n + V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + l'$.
- Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l' , alors la suite $(U_n V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ll' .

— Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^*$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel $U_n \neq 0$. La suite $\left(\frac{1}{U_n}\right)_{n \geq n_0}$ est définie et elle converge vers $\frac{1}{l}$.

Théorème 5 a) Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles qui convergent vers l et l' respectivement. Si $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang, on a $l \leq l'$.

b) Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles. On suppose $U_n \leq V_n \leq W_n$ à partir d'un certain rang. Si les suites (U_n) et (W_n) convergent vers l , il en est de même de (V_n) .

Démonstration. voir dans votre cours de L1.

Remarque 7 Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges. Soient (U_n) et (V_n) deux suites convergeant respectivement vers l et l' . Si $U_n < V_n$ à partir du rang n_0 , alors on peut seulement dire $l \leq l'$ comme le montre l'exemple suivant : on prend $U_n = 1$ et $V_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Théorème 6 a) Toute suite croissante majorée est convergente.

b) Toute suite décroissante minorée est convergente.

Démonstration. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante majorée. L'ensemble $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est non vide majoré. Il admet donc une borne supérieure notée l . Montrons que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Soit $\varepsilon > 0$. D'après les propriétés de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n_0} > l - \varepsilon$. Comme (U_n) est croissante, on a pour tout $n \geq n_0$, $U_n \geq U_{n_0} \geq l - \varepsilon$. Donc

$$\forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon \leq U_n \leq l.$$

Ce qui démontre que la suite (U_n) converge vers l .

La démonstration est analogue pour une suite décroissante.

Définition 20 On dit que deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si

- L'une est croissante, l'autre est décroissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Théorème 7 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

- (i) (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Alors, elles convergent toutes les deux vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leq l \leq b_n$.

Démonstration. La suite $(a_n - b_n)$ est croissante et converge vers 0. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n - b_n \leq 0.$$

on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$. La suite (a_n) est croissante majorée, donc elle converge. Notons α sa limite. La suite (b_n) est décroissante minorée, donc elle converge. Notons β sa limite. D'après (ii), on a $\alpha = \beta = l$. Comme (a_n) est croissante, on a $\alpha = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Comme (b_n) est décroissante, on a $\beta = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq l \leq b_n.$$

Exemple 11 Soit (U_n) une suite positive qui converge vers 0. On pose $s_n = \sum_{p=0}^n (-1)^p U_p$. Nous verrons au chapitre 3 que les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes.

Introduisons maintenant la notion de sous-suites.

Lemme 2 Soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$.

Démonstration. : par récurrence sur $\mathbb{N}$. Voir chapitre 1.

Définition 21 La suite $(V_n)_n$ est une sous suite (ou suite extraite) de $(U_n)_n$ s'il existe $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_{\phi(n)}$.

Exemple 12 La suite (U_{2n}) est une sous suite de (U_n) . Dans ce cas, on a $\phi(n) = 2n$.

Théorème 8 Toute sous suite d'une suite convergente est convergente et a même limite.

Démonstration. Cela découle du lemme 2.

Remarque 8 La suite (U_n) peut diverger et admettre une sous suite qui converge. Par exemple la suite $(U_n) = ((-1)^n)$ diverge alors que sa sous suite (U_{2n}) converge.

On a cependant le théorème suivant :

Théorème 9 Soit (U_n) une suite réelle. Si les suites extraites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent et ont même limite l , alors la suite (U_n) converge vers l .

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (U_{2p}) converge,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad p \geq n_0 \implies |U_{2p} - l| < \varepsilon.$$

Comme la suite (U_{2p+1}) converge,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad p \geq n_1 \implies |U_{2p+1} - l| < \varepsilon.$$

Si n est supérieur à $\sup(2n_0, 2n_1 + 1)$, on montre aisément (en distinguant les cas n pair et n impair) que $|U_n - l| < \varepsilon$. Ainsi

$$\forall n \geq \sup(2n_0, 2n_1 + 1), \quad |U_n - l| < \varepsilon.$$

Ce qui démontre que la suite (U_n) converge vers l . $\square$

Donnons maintenant un critère qui permet de conclure à la convergence d'une suite sans en connaître la limite. On dit qu'une suite est de Cauchy si, à partir d'un certain rang, tous ses termes sont à ε les uns des autres :

Définition 22 (Suite de Cauchy) La suite (U_n) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad p, q \geq n_0 \implies |U_p - U_q| < \varepsilon$$

Proposition 5 a) toute suite de Cauchy est bornée.

b) Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration.

a) Soit (U_n) une suite de Cauchy. Il existe n_0 tel que pour $p, q \geq n_0$, on a $|U_p - U_q| \leq 1$. En utilisant l'inégalité $||U_p| - |U_q|| \leq |U_p - U_q|$, on en déduit

$$\forall n \geq n_0, \quad |U_n| \leq |U_{n_0}| + 1.$$

Posons $M = \sup(|U_0|, |U_1|, \dots, |U_{n_0}| + 1)$. Pour tout entier n , on a $|U_n| \leq M$. Ce qui démontre que la suite (U_n) est bornée.

b) Soit (U_n) une suite convergente de limite l . Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |U_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $p, q \geq n_0$, on a

$$|U_p - U_q| \leq |U_p - l| + |U_q - l| < \varepsilon.$$

La suite (U_n) est donc de Cauchy.

Théorème 10 Une suite réelle converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Démonstration. On admettra ce théorème.

Remarque 9 Le théorème 10 est faux sur $\mathbb{Q}$. Une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$ n'a pas nécessairement de limite dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, écrivons $\sqrt{2} = 1, a_1 a_2 a_3 \dots$. La suite de terme général $U_n = 10^{-n} E(10^n \sqrt{2}) = 1, a_1 a_2 \dots a_n$ (où E désigne la partie entière) est une suite de rationnels. Elle converge dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$. C'est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc de $\mathbb{Q}$.

Pour les suites de réels, on étend les limites aux valeurs infinies.

Définition 23 Soit (U_n) une suite réelle.

a) On dit que la suite (U_n) tend vers $+\infty$ si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a $U_n > A$ à partir d'un certain rang. Mathématiquement :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies U_n > A.$$

b) On dit que la suite (U_n) tend vers $-\infty$ si, pour tout $B \in \mathbb{R}$, on a $U_n < B$ à partir d'un certain rang. Mathématiquement :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies U_n < B.$$

Remarque 10 Une suite réelle qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente dans $\mathbb{R}$.

On introduit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Une suite réelle qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ (mais pas dans $\mathbb{R}$).

Proposition 6 Soient (U_n) et (V_n) deux suites telles que $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang.

a) Si (U_n) tend vers $+\infty$, alors (V_n) tend vers $+\infty$.

b) Si (V_n) tend vers $-\infty$, alors, (U_n) tend vers $-\infty$.

Théorème 11 a) Soit (U_n) une suite réelle croissante. On a l'alternative suivante :

- (U_n) est majorée et alors elle converge vers une limite réelle.
- (U_n) n'est pas majorée et alors elle converge vers $+\infty$.

b) Soit (U_n) une suite réelle décroissante. On a l'alternative suivante :

- (U_n) est minorée et alors elle converge vers une limite réelle.
- (U_n) n'est pas minorée et alors elle converge vers $-\infty$.

Démonstration. Nous démontrons seulement a), la démonstration de b) étant analogue.

Dans le cas où la suite (U_n) est majorée, nous avons déjà vu qu'elle converge dans $\mathbb{R}$. Traitons le cas où (U_n) n'est pas majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n_0} > A$. Comme (U_n) est croissante, pour tout $n \geq n_0$, on a $U_n > A$. Nous avons montré que la suite (U_n) tendait vers $+\infty$. $\square$

Nous pouvons maintenant définir les notions de limites supérieures et limites inférieures d'une suite. Ces notions sont définies pour toute suite de réels.

Définition 24 Si (U_n) est majorée, on pose

$$U'_n = \sup\{U_p \mid p \geq n\}.$$

La suite (U'_n) est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit la limite supérieure de (U_n) et on note $\limsup_{n \rightarrow +\infty} U_n$ la limite de (U'_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si la suite (U_n) n'est pas majorée, sa limite supérieure est $+\infty$.

2) Si (U_n) est minorée, on pose

$$U''_n = \inf\{U_p \mid p \geq n\}.$$

La suite (U''_n) est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit la limite inférieure de (U_n) et on note $\liminf_{n \rightarrow +\infty} U_n$ la limite de (U''_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si la suite (U_n) n'est pas minorée, sa limite inférieure est $-\infty$.

Démonstration. Les suites (U'_n) et (U''_n) sont respectivement décroissante et croissante.

$\square$

On a évidemment l'inégalité suivante

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

Exemple 13 1) La suite de terme général $(-1)^n$ admet 1 comme limite supérieure et -1 comme limite inférieure.

2) La suite de terme général $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ admet 1 comme limite supérieure et -1 comme limite inférieure.

Remarque 11 Soit (U_n) une suite réelle. Notons L sa limite supérieure et l sa limite inférieure. Soit A un réel.

1) Si $L < A$, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $U'_n < A$. On a donc $U_n < A$ pour $n \geq n_0$.

Si $U_n \leq A$ pour $n \geq n_0$, on a $U'_n \leq A$ pour $n \geq n_0$ et donc $L \leq A$.

2) Si $l > A$, alors il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $U''_n > A$. On a donc $U_n > A$ pour $n \geq n_0$.

Si $U_n \geq A$ pour $n \geq n_0$, on a $U''_n \geq A$ pour $n \geq n_0$ et donc $l \geq A$.

Théorème 12 Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit (U_n) une suite réelle.

La suite (U_n) converge vers l si et seulement si

$$l = \limsup_{n \rightarrow +\infty} U_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

Démonstration. Posons $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $l = \liminf_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Supposons $l = L$. A partir d'un certain rang N , tous les termes de la suite (U_n) sont plus grands que $l - \varepsilon$ et plus petit que $l + \varepsilon$. Donc la suite (U_n) converge vers l .

Montrons l'assertion réciproque. On suppose que la suite (U_n) converge vers λ . Soit $\varepsilon > 0$. A partir d'un certain rang N , tous les termes de la suite (U_n) sont dans $[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$. A partir du rang N , on a donc

$$l - \varepsilon \leq U_n'' \leq U_n' \leq l + \varepsilon.$$

En passant à la limite, on en déduit

$$\lambda - \varepsilon \leq l \leq L \leq \lambda + \varepsilon.$$

Comme ces inégalités sont vraies pour tout ε , on en déduit $l = L = \lambda$.

Théorème 13 Soit (U_n) une suite réelle. Notons L sa limite supérieure et l sa limite inférieure.

Il existe une sous suite de (U_n) qui converge vers L .

Il existe une sous suite de (U_n) qui converge vers l .

Démonstration. On démontre le théorème pour la limite supérieure et dans le cas où cette dernière est finie. les autre cas sont laissés au lecteur. Construisons par récurrence une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$|U_{\phi(n)} - L| \leq \frac{1}{n}. \text{ La suite extraite } (U_{\phi(n)}) \text{ convergera bien vers } L.$$

L'hypothèse de récurrence sera $\mathcal{P}(p) : \phi(0), \phi(1), \dots, \phi(p)$ sont construits et vérifient les deux conditions suivantes :

- $\phi(0) < \phi(1) < \dots < \phi(p)$.
- $|U_{\phi(p)} - L| \leq \frac{1}{p}$.

Initialisation On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $L - 1 \leq L < U'_{n_0} < L + 1$, puis $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $L - 1 < U_{p_0} \leq U'_{n_0} < L + 1$. On pose $\phi(0) = p_0$.

Hérédité On suppose $\phi(0), \phi(1), \dots, \phi(p)$ sont construits et satisfaisant aux deux conditions requises. Il existe un rang à partir duquel tous termes de la suite (U'_n) sont dans $[L, L + \frac{1}{p+1}]$. On peut donc choisir $n_{p+1} > \phi(p)$ tel que $(U'_{n_{p+1}})$ est dans $[L, L + \frac{1}{p+1}]$. Par les propriétés de la borne supérieure il existe un entier $\phi(p+1) \geq n_{p+1}$ tel que $U_{\phi(p+1)}$ vérifie $L - \frac{1}{p+1} \leq U'_{n_{p+1}} - \frac{1}{p+1} \leq U_{\phi(p+1)} \leq U'_{n_{p+1}} < L + \frac{1}{p+1}$. Le réel $U_{\phi(p+1)}$ appartient à $[L - \frac{1}{p+1}, L + \frac{1}{p+1}]$ et satisfait $\phi(0) < \phi(1) < \dots < \phi(p) < \phi(p+1)$. $\square$

Théorème 14 (Théorème de Bolzano Weierstrass) Toute suite bornée admet une sous suite convergente.

Démonstration. : Si (U_n) est bornée par $M \in \mathbb{R}_+$, alors sa limite supérieure L est dans $[-M, M]$. Il existe une sous suite de (U_n) qui converge vers L . La suite (U_n) admet donc une sous suite convergente.

2.3 Suites à valeurs complexes

$\mathbb{C}$ ne peut pas être muni d'une relation d'ordre intéressante.

Proposition 7 Dans $\mathbb{C}$, il n'existe pas de relation d'ordre total $\leq$ (cela veut dire que si x et y sont des complexes, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$) qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) si $x \leq y$ et $a \in \mathbb{C}$, alors on a $x + a \leq y + a$
- (ii) si x et y sont positifs, alors xy est positif

Démonstration. Si une telle relation d'ordre existait, tout carré serait positif. En effet si $z = \alpha^2$, on a deux cas :

1er cas : $\alpha \geq 0$: alors d'après (ii), $\alpha^2 = z \geq 0$.

Sd cas : $\alpha \leq 0$: alors $-\alpha \geq 0$ et donc, d'après (ii), $(-\alpha)^2 = z \geq 0$.

En particulier $1 = 1^2$ est positif, donc -1 est négatif. Or $-1 = i^2$. Contradiction. $\square$

Définition 25 Une suite complexe est une application U de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour les suites complexes, on a :

- La notion de convergence de suites en remplaçant la valeur absolue par un module dans la définition.
- La notion de suite bornée. La suite (U_n) est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n| \leq M$. Toute suite convergente est bornée.
- la notion de sous suite
- La notion de suite de Cauchy en remplaçant la valeur absolue par un module dans la définition.

En revanche, on n'a pas les notions de suites croissantes, décroissantes, le théorème 5, la notion de suites adjacentes.

Exemple 14 Considérons un complexe z et étudions la suite $(z^n)_n$.

Premier cas : $|z| < 1$. Alors $\lim_{n \in \mathbb{N}} z^n = 0$ puisque $\lim |z^n| = 0$.

Deuxième cas : $|z| > 1$. Alors la suite (z^n) est non convergente puisque non bornée.

Troisième cas : Si $|z| = 1$. Alors :

Premier sous cas : $z = 0[2\pi]$. Alors $z^n = 1$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Deuxième sous cas : $z \neq 0[2\pi]$. Montrons par l'absurde que la suite (z^n) diverge. Supposons qu'elle converge vers l . Alors la relation $z^{n+1} - z^n = (z - 1)z^n$ donne $|z^{n+1} - z^n| = |z^n||z - 1| = |z - 1|$. Par passage à la limite, on obtient $|z - 1| = 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $z \neq 0[2\pi]$.

Une suite complexe (U_n) définit deux suites réelles : sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Théorème 15 La suite (U_n) converge vers l si et seulement si sa partie réelle converge vers $\text{Re}(l)$ et sa partie imaginaire converge vers $\text{Im}(l)$.

Démonstration. Cela découle des inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} |\text{Re}(U_n) - \text{Re}(l)| &\leq |U_n - l| \leq |\text{Re}(U_n) - \text{Re}(l)| + |\text{Im}(U_n) - \text{Im}(l)| \\ |\text{Im}(U_n) - \text{Im}(l)| &\leq |U_n - l| \leq |\text{Re}(U_n) - \text{Re}(l)| + |\text{Im}(U_n) - \text{Im}(l)| \end{aligned} \quad \square$$

Théorème 16 Une suite complexe (U_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Démonstration. (U_n) est de Cauchy si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont. Cela découle des inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(U_p) - \operatorname{Re}(U_q)| &\leq |U_p - U_q| \leq |\operatorname{Re}(U_p) - \operatorname{Re}(U_q)| + |\operatorname{Im}(U_p) - \operatorname{Im}(U_q)| \\ |\operatorname{Im}(U_p) - \operatorname{Im}(U_q)| &\leq |U_p - U_q| \leq |\operatorname{Re}(U_p) - \operatorname{Re}(U_q)| + |\operatorname{Im}(U_p) - \operatorname{Im}(U_q)| \square \end{aligned}$$

Chapitre 3

Séries numériques

3.1 Généralités sur les séries numériques

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 26 (définition séries numériques) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle série numérique de terme général U_n la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $s_n = \sum_{k=0}^n U_k$.

Terminologie et notation :

La série de terme général U_n est notée $\sum_{n \geq 0} U_n$ ou plus simplement $\sum U_n$.

$s_n = \sum_{k=0}^n U_k$ est appelée somme partielle d'ordre n de la série $\sum U_n$.

Définition 27 On dit que la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ de terme général U_n converge et a pour somme

$s \in \mathbb{K}$ si la suite des sommes partielles (s_n) converge vers s . On pose alors $s = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$

On dit que la série diverge si la suite (s_n) n'a pas de limite (finie réelle).

Exemple 15 Soit $z \in \mathbb{C}$. Considérons la série géométrique $\sum z^n$ de terme général z^n . Sa somme partielle d'ordre n est

$$\sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & \text{si } z \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

Elle admet $\frac{1}{1-z}$ comme limite si et seulement si $|z| < 1$. La série géométrique $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$.

Exemple 16 Soit (U_n) une suite. La série de terme général $V_n = U_n - U_{n-1}$ a pour somme partielle d'ordre n le scalaire $\sigma_n = U_n - U_0$. La série $\sum V_n$ converge si et seulement la suite (U_n) converge.

Remarque 12 On ne modifie pas la nature d'une série si on change un nombre fini de ses termes.

Définition 28 Soit $\sum_{n \geq 0} U_n$ une série convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ sa somme. On appelle reste d'ordre n le scalaire $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k - \sum_{k=0}^n U_k$. On montre que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$.

Remarque 13 Si une série $\sum U_n$ converge, alors son reste d'ordre n , R_n , tend vers 0.

Exemple 17 Reprenons l'exemple 15. Si $|z| < 1$, le reste d'ordre n est $\frac{z^{n+1}}{1-z}$.

Théorème 17 Si la série $\sum U_n$ converge, alors son terme général tend vers 0.

Démonstration. $U_n = s_n - s_{n-1}$ donc la suite (U_n) tend vers 0.

Remarque 14 attention : la réciproque est fautive. Par exemple, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ diverge alors que son terme général tend vers 0.

On utilise souvent la contraposée du théorème 17. Si le terme U_n ne tend pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

Proposition 8 a) La somme de la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ et de la série $\sum_{n \geq 0} V_n$ est la série de terme général $U_n + V_n$. Si les séries $\sum_{n \geq 0} U_n$ et $\sum_{n \geq 0} V_n$ convergent, alors la série $\sum_{n \geq 0} (U_n + V_n)$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n$$

b) Le produit de la série $\sum_{n \geq 0} U_n$ par un scalaire λ est la série de terme général λU_n . Si $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda U_n)$ et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda U_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} U_n.$$

Démonstration. Considérer les sommes partielles d'ordre n des séries introduites et faire tendre n vers $+\infty$.

Le critère de Cauchy s'applique aux séries :

Théorème 18 La série $\sum U_n$ de terme général U_n converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad p \geq n_0 \quad \text{et} \quad r \in \mathbb{N} \implies \left| \sum_{k=1}^r U_{k+p} \right| < \varepsilon$$

Définition 29 Si la série $\sum |U_n|$ de terme général $|U_n|$ converge, on dit que la série $\sum U_n$ est absolument convergente.

Théorème 19 Si la série $\sum U_n$ est absolument convergente, elle est convergente.

Démonstration. Cela découle du critère de Cauchy et de l'inégalité $\left| \sum_{k=1}^r U_{k+p} \right| \leq \sum_{k=1}^r |U_{k+p}|$.

□

3.2 Séries à termes positifs

Théorème 20 Soit $\sum_{n \geq 0} U_n$ une série dont le terme général est positif. La série $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Dans le cas contraire la suite $\left(\sum_{k=0}^n U_k\right)$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. la suite des sommes partielles est croissante puisque $s_{n+1} - s_n = U_{n+1}$ est positif.

Théorème 21 On considère deux séries numériques dont les termes vérifient à partir de n_0 :

- U_n et V_n sont positifs
- $U_n \leq V_n$

Alors

- a) Si $\sum V_n$ converge, alors $\sum U_n$ converge.
- b) Si $\sum U_n$ diverge, alors $\sum V_n$ diverge.

Démonstration. b) est la contraposée de a). Il suffit donc de démontrer a). On pose $s_n = \sum_{p=n_0}^n U_p$ et $\sigma_n = \sum_{p=n_0}^n V_p$. Pour $n \geq n_0$, on a $s_n \leq \sigma_n$. Si σ_n est majorée, il en est de même de s_n . On applique alors le théorème 20.

Théorème 22 [Critère de Cauchy] On considère une série à termes positifs $\sum U_n$.

- a) S'il existe $r \in [0, 1[$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \sqrt[n]{U_n} \leq r$$

alors $\sum U_n$ converge.

- b) S'il existe un rang à partir duquel $U_n \geq 1$, alors la série $\sum U_n$ diverge.

Démonstration. Dans le premier cas, on a $\forall n \geq n_0, \quad U_n \leq r^n$ et on utilise la proposition 21 et l'exemple 15.

Dans le deuxième cas, la série diverge grossièrement. $\square$

On peut reformuler le critère de Cauchy en utilisant les limites supérieures et inférieures.

Théorème 23 [Critère de Cauchy] On considère une série à termes positifs $\sum U_n$.

- a) Si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} < 1$ alors $\sum U_n$ converge.
- b) Si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} > 1$, alors la série $\sum U_n$ diverge grossièrement.
- c) Si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration. a) découle de la remarque 11.

b) Conservons les notations de cette même remarque. Si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} > 1$, la suite (U'_n) étant décroissante, tous ses termes sont strictement supérieurs à 1. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists p \geq n, \quad U_p > 1.$$

La suite (U_n) a une infinité de termes strictement supérieur à 1, elle ne tend pas vers 0.

c) Les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ vérifie c). Pourtant la première diverge alors que la seconde converge (comme on le verra plus loin). $\square$

Corollaire 24 (Test de Cauchy) Soit $\sum U_n$ une série à termes positifs. On suppose que la suite $(\sqrt[n]{U_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

- Si $l < 1$, alors la série $\sum U_n$ converge.
- Si $l > 1$, alors la série diverge.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration. Cela découle immédiatement du théorème 23. $\square$

Théorème 25 [Critère de d'Alembert] On considère une série à termes strictement positifs $\sum U_n$.

a) S'il existe $r \in]0, 1[$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq r$$

alors $\sum U_n$ converge.

b) S'il existe un rang à partir duquel $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$, alors la série $\sum U_n$ diverge.

Démonstration. Dans le premier cas, on montre par récurrence $\forall n \geq n_0 + 1, \quad U_n \leq r^{n-n_0} U_{n_0}$ et on utilise la proposition 21 et l'exemple 15.

Dans le deuxième cas, on a $U_n \geq U_{n-1} \geq \dots \geq U_0$. La série diverge grossièrement. $\square$

On peut reformuler le critère de d'Alembert en utilisant les limites supérieures et inférieures.

Théorème 26 [Critère de d'Alembert] On considère une série à termes strictement positifs $\sum U_n$.

- a) Si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ alors $\sum U_n$ converge.
- b) Si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, alors la série $\sum U_n$ diverge grossièrement.
- c) Si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration. a) et b) découle de la remarque 11. Les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ vérifie c). Pourtant la première diverge alors que la seconde converge. $\square$

Corollaire 27 (test de d'Alembert) Soit $\sum U_n$ une série à termes strictement positifs.

On suppose que la suite $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

- Si $l < 1$, alors la série $\sum U_n$ converge.
- Si $l > 1$, alors la série diverge.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 26. $\square$

Le test de Cauchy est plus fin que celui de d'Alembert en vertu du théorème suivant :

Théorème 28 Si la suite $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $(\sqrt[n]{U_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l .

Démonstration. Premier cas : $l > 0$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme les U_n sont strictement positifs et que $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad l - \varepsilon < \frac{U_{n+1}}{U_n} < l + \varepsilon$$

On montre ensuite par récurrence que pour $n \geq N$, on a

$$(l - \varepsilon)^{n-N} U_N \leq U_n \leq (l + \varepsilon)^{n-N} U_N.$$

On en déduit

$$(l - \varepsilon)^{1-\frac{N}{n}} \sqrt[n]{U_N} \leq \sqrt[n]{U_n} \leq (l + \varepsilon)^{1-\frac{N}{n}} \sqrt[n]{U_N}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (l - \varepsilon)^{1-\frac{N}{n}} (U_N)^{\frac{1}{n}} = l - \varepsilon$, il existe donc N_1 tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad l - 2\varepsilon < \sqrt[n]{U_n}$$

De même, il existe N_2 tel que

$$\sqrt[n]{U_n} < l + 2\varepsilon.$$

Donc pour $n > N_3 = \sup(N, N_1, N_2)$, on a

$$\forall n \geq N_3, \quad l - 2\varepsilon < \sqrt[n]{U_n} < l + 2\varepsilon.$$

On a donc montré que la suite $(\sqrt[n]{U_n})$ tend vers l .

Deuxième cas : $l = 0$. Il se traite comme le cas précédent en remplaçant $l - \varepsilon$ par 0.

Troisième cas : $l = +\infty$. Ce cas est laissé au lecteur. $\square$

Pour étudier les séries à termes positifs à partir d'un certain rang, on utilise souvent les o , O et les équivalents.

Définition 30 Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles. On suppose que (V_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- a) On dit que $U_n = O(V_n)$ si la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est bornée.
- b) On dit que $U_n = o(V_n)$ si la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ tend vers 0.
- c) On dit que $U_n \sim V_n$ si la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ tend vers 1.

Proposition 9 Soit (U_n) et (V_n) deux suites réelles. On suppose que

- que (V_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
- U_n et V_n sont positives à partir d'un certain rang.
- $U_n = O(V_n)$

Alors

- a) Si $\sum V_n$ converge, alors $\sum U_n$ converge.
- b) Si $\sum U_n$ diverge, alors $\sum V_n$ diverge.

Démonstration. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 \leq U_n \leq M V_n$ à partir d'un certain rang. La proposition est alors une application de la proposition 21. $\square$

Corollaire 29 Soient (U_n) et (V_n) deux suites. On suppose

- $V_n > 0$ à partir d'un certain rang
- $U_n \sim V_n$

alors $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature.

Démonstration. Comme $\frac{U_n}{V_n}$ tend vers 1, on peut voir que $U_n > 0$ à partir d'un certain rang. On a $U_n = O(V_n)$ et $V_n = O(U_n)$. $\square$

Théorème 30 [comparaison séries et intégrales] Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$. Soit f une fonction décroissante, intégrable et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Alors la série $\sum f(n)$ et la suite $(\int_a^n f(t) dt)_n$ sont de même nature.

Démonstration. Puisque f est décroissante, on a :

- $t \in [i-1, i] \implies u_i = f(i) \leq f(t)$.
- $t \in [i, i+1] \implies u_i = f(i) \geq f(t)$

Si (s_n) est la suite des sommes partielles de la série de terme général U_n , on peut écrire

$$s_n - s_0 = \sum_{i=1}^n f(i) \leq \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i f(t) dt = \int_0^n f(t) dt.$$

De la même façon, on a aussi :

$$s_n = \sum_{i=0}^n f(i) \geq \sum_{i=0}^n \int_i^{i+1} f(t) dt = \int_0^{n+1} f(t) dt.$$

On a donc la double égalité :

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \leq s_n \leq s_0 + \int_0^n f(t) dt.$$

Comme ces suites sont croissantes, ces deux inégalités prouvent que la suite (s_n) converge si et seulement si la suite des intégrales $(\int_0^n f(t) dt)$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$. $\square$

En utilisant le critère de comparaison séries-intégrales, on peut étudier les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dans la cas où $\alpha \in \mathbb{R}_{+*}$.

Théorème 31 (séries de Riemann) La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Démonstration. Si $\alpha \in \mathbb{R}_{+*}$, on peut calculer explicitement $\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$. On a

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln(n) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$ a une limite (réelle) si et seulement si $\alpha > 1$. On utilise ensuite le théorème 30.

3.3 Retour au cas général

Théorème 32 [Critère des séries alternées] Soit (U_n) une suite positive, décroissante et tendant vers 0. La série $\sum (-1)^n U_n$ converge. De plus, on a l'estimation suivante de son reste d'ordre n : $|r_n| \leq U_{n+1}$

Démonstration. On pose $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k U_k$. Montrons que les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes. Le calcul

$$s_{2n+2} - s_{2n} = U_{2n+2} - U_{2n+1} \leq 0$$

montre que (s_{2n}) est décroissante. De même, la suite (s_{2n+1}) est croissante. Comme $s_{2n+1} - s_{2n} = -U_{2n+1}$ tend vers 0, les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont bien adjacentes. Elles ont donc même limite l (voir le théorème 7). La série $\sum (-1)^n U_n$ converge donc et sa somme est l . On a de plus les inégalités

$$s_{2n+1} \leq s_{2n+3} \leq l \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}.$$

On en déduit

$$|s_{2n} - l| \leq |s_{2n} - s_{2n+1}| = |U_{2n+1}| \quad \text{et} \quad |l - s_{2n+1}| \leq |s_{2n+2} - s_{2n+1}| = |U_{2n+2}|.$$

Dans tous les cas, $|r_n| \leq U_{n+1}$. $\square$

Exemple 18 La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Théorème 33 [Critère d'Abel] On considère la série de terme général $a_n b_n$ avec $a_n \in \mathbb{K}$ et $b_n \in \mathbb{R}$. On suppose :

- (b_n) est une suite décroissante et de limite 0.
- (a_n) est une suite complexe telle que la suite $(A_n = \sum_{k=0}^n a_k)$ est bornée.

alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration. La démonstration utilise la transformation d'Abel et le critère de Cauchy. On pose $s_p = \sum_{n=0}^p a_n b_n$. Si $p \geq q$, on a la "transformation d'Abel".

$$\begin{aligned} s_q - s_{p-1} &= \sum_{n=p}^q a_n b_n \\ &= \sum_{n=p}^q (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n=p}^q A_n b_n - \sum_{n=p}^q A_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n=p}^q A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \end{aligned}$$

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |A_n| \leq M$. On a

$$\begin{aligned} |s_q - s_{p-1}| &\leq \sum_{n=p}^{q-1} M(b_n - b_{n+1}) + Mb_p + Mb_q \\ &\leq 2Mb_p \end{aligned}$$

Comme la suite (b_n) tend vers 0, il existe un rang N à partir duquel $|b_p| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}, \quad q \geq p \geq N \implies |s_q - s_{p-1}| < \varepsilon.$$

La suite (s_n) est de Cauchy, donc elle converge. $\square$

Exemple 19 Etudions la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$. Elle est divergente si $\theta = 0[2\pi]$. Supposons donc $\theta \neq 0[2\pi]$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} &= \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i(n+2)\frac{\theta}{2}} - 2i\sin(\frac{n\theta}{2})}{e^{i\frac{\theta}{2}} - 2i\sin(\frac{\theta}{2})} \\ &= e^{i(n+2)\frac{\theta}{2}} \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité $|\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}$. Le critère d'Abel s'applique et montre que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge si $\theta \neq 0[2\pi]$.

Définissons maintenant le produit de Cauchy de deux séries et étudions le.

Définition 31 Soient $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit la série produit $\sum W_n$ de terme général $W_n = \sum_{k=0}^n U_k V_{n-k}$.

Théorème 34 On considère une série numérique de terme général u_n absolument convergente et une série numérique de terme général v_n convergente. Alors la série produit, de terme général

$$w_n = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p},$$

est convergente et sa somme est le produit des sommes des deux séries de départ. Si de plus la série de terme général v_n est absolument convergente, la série produit est absolument convergente.

Démonstration. On définit les sommes partielles des séries par :

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=0}^n u_i, \quad \sigma_n = \sum_{j=0}^n v_j, \quad A_n = \sum_{i=0}^n |u_i|, \\ \Pi_n &= \sum_{k=0}^n w_k = \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k u_p v_{k-p} = \sum_{0 \leq i+j \leq n} u_i v_j. \end{aligned}$$

Soient s, σ, A, Π les sommes correspondantes.

On veut montrer que la suite $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $s\sigma$. Comme la suite $(s_n \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $s\sigma$, il suffit de montrer que la suite $(s_n \sigma_n - \Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Or :

$$\begin{aligned} s_n \sigma_n - \Pi_n &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n u_i v_j - \sum_{0 \leq i+j \leq n} u_i v_j = \sum_{n+1 \leq i+j \leq 2n} u_i v_j \\ &= u_1 v_n + u_2 (v_n + v_{n-1}) + \cdots + u_n (v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1). \end{aligned}$$

Soit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{i=0}^n |u_i| \leq M$ et $|\sigma_n| \leq \frac{M}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |\sigma_n - \sigma_m| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \text{ et } n, m \geq n_0 \Rightarrow |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

En coupant la somme ci-dessus en deux à l'indice n_0 on peut écrire :

$$\begin{aligned} s_n \sigma_n - \Pi_n &= u_1 v_n + u_2 (v_n + v_{n-1}) + \cdots + u_n (v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1) \\ &= u_1 v_n + \cdots + u_{n_0} (v_n + v_{n-1} + \cdots + v_{n-n_0+1}) + \cdots + u_n (v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1) \\ &= u_1 (\sigma_n - \sigma_{n-1}) + \cdots + u_{n_0} (\sigma_n - \sigma_{n-n_0}) + \cdots + u_n (\sigma_n - \sigma_0). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |s_n \sigma_n - \Pi_n| &\leq [|u_1| |\sigma_n - \sigma_{n-1}| + |u_2| |\sigma_n - \sigma_{n-2}| + \cdots + |u_{n_0}| |\sigma_n - \sigma_{n-n_0}|] + \\ &\quad [|u_{n_0+1}| |\sigma_n - \sigma_{n-n_0-1}| + \cdots + |u_n| |\sigma_n - \sigma_0|]. \end{aligned}$$

Or, si $n \geq 2n_0$, on a :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n_0\}, |\sigma_n - \sigma_{n-k}| \leq \frac{\varepsilon}{2M},$$

et on a aussi

$$\forall k \in \{n_0 + 1, \dots, n\}, |\sigma_n - \sigma_{n-k}| \leq |\sigma_n| + |\sigma_{n-k}| \leq 2 \frac{M}{2} = M.$$

D'où :

$$\begin{aligned} n \geq 2n_0 \Rightarrow |s_n \sigma_n - \Pi_n| &\leq \frac{\varepsilon}{2M} [|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_0}|] + M [A_n - A_{n_0}] \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La série produit converge bien et sa somme est bien égale au produit des sommes des séries de termes généraux respectifs u_n et v_n .

Dans le cas où la série de terme général v_n est absolument convergente, on peut définir la série de terme général :

$$w'_n = \sum_{0 \leq i+j \leq n} |u_i| |u_j|.$$

C'est donc le produit des deux séries de termes généraux respectifs $|u_n|$ et $|v_n|$. Ces deux séries sont convergentes et aussi absolument convergentes puisqu'elles sont à

termes positifs. Par la démonstration précédente, c'est une série convergente. Or, on remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |w_n| \leq w'_n.$$

D'où, si $(\Pi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dénote la suite des sommes partielles de la série de terme général w'_n , on a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{i=0}^n |w_i| \leq \Pi'_n.$$

Comme ces deux suites sont croissantes et que $(\Pi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, la suite des sommes partielles de la série de terme général $|w_n|$ est convergente et la série produit est bien absolument convergente. $\square$

Etudions maintenant ce qui se passe si on modifie l'ordre des termes d'une série.

Théorème 35 Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection. Soit $\sum U_n$ une série numérique complexe et $\sum V_n$ la série de terme général $V_n = U_{\sigma(n)}$. Si $\sum U_n$ est absolument convergente, alors $\sum V_n$ est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n.$$

Remarque 15 Le théorème 35 n'a aucune raison d'être vrai si la série $\sum U_n$ n'est pas absolument convergente. Par exemple la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge d'après le critère des séries alternées. On pose

$$l = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \dots$$

Si on change l'ordre des termes de la série, on obtient

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \dots = \frac{l}{2}.$$

Démonstration.

Premier cas : $U_n \geq 0$:

$$V_0 + \dots + V_n = U_{\sigma(0)} + \dots + U_{\sigma(n)} \leq U_0 + \dots + U_N \text{ où } N = \sup\{\sigma(k) \mid k \in [0, n]\}.$$

Comme $V_0 + \dots + V_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$, la série $\sum U_n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.

En considérant la permutation σ^{-1} , on montre l'inégalité $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} V_n$. D'où

$$\text{l'égalité } \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n.$$

Deuxième cas : le cas U_n réel.

On introduit

$$U_n^+ = \sup(0, U_n) \quad \text{et} \quad U_n^- = \sup(0, -U_n).$$

On a $U_n = U_n^+ - U_n^-$ et $|U_n| = U_n^+ + U_n^-$. Si $\sum U_n$ converge absolument, alors $\sum U_n^+$ et $\sum U_n^-$ convergent puisque $0 \leq U_n^+ \leq |U_n|$ et $0 \leq U_n^- \leq |U_n|$. Comme U_n^+ et U_n^- sont positives, le premier cas montre que $\sum U_{\sigma(n)}^+$ et $\sum U_{\sigma(n)}^-$ convergent et que l'on a

$\sum_{n=0}^{+\infty} U_{\sigma(n)}^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n^+$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} U_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n^-$. On en déduit que la série $\sum U_n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} U_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.

Troisième cas : le cas général.

Si $\sum U_n$, on applique le deuxième cas à $\sum \operatorname{Re}(U_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(U_n)$. $\square$

Définition 32 Soit $\sum U_n$ une série. On dit que la série $\sum V_n$ est une série de paquets $\sum V_n$ de la série $\sum U_n$ s'il existe une injection strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$V_0 = \sum_{k=0}^{\phi(0)} U_k, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \sum_{k=\phi(n-1)+1}^{\phi(n)} U_k$$

Théorème 36 Si la série de terme général U_n converge, toute série de paquets $\sum V_n$ de $\sum U_n$ converge et a même somme que $\sum U_n$

Démonstration. On pose $s_n = \sum_{k=0}^n U_k$ et $t_n = \sum_{k=0}^n V_k$. On a la relation $t_n = s_{\phi(n)}$. La suite (t_n) est donc une sous suite de (s_n) . Le théorème en découle. $\square$

Remarque 16 La réciproque est fausse. Un contreexemple est fourni par $U_n = (-1)^n$, $\phi(n) = 2n$. On a alors $V_n = 0$ si $n > 0$. La série $\sum V_n$ converge alors que $\sum U_n$ diverge grossièrement.

On a cependant le théorème suivant :

Théorème 37 Soit $\sum U_n$ une série de terme général positif et soit $\sum V_n$ une série de paquets de $\sum U_n$. Si la série $\sum V_n$ converge, alors la série $\sum U_n$ converge.

Démonstration. On pose $s_n = \sum_{k=0}^n U_k$ et $t_n = \sum_{k=0}^n V_k$. Si $\sum V_n$ converge, la suite (t_n) est majorée (puisque les V_n sont positifs). Comme $\phi(n) \geq n$ (lemme 2), on a $s_n \leq s_{\phi(n)} = t_n$. Donc la suite (s_n) est majorée et $\sum U_n$ converge.

Chapitre 4

Limites, équivalents et continuité

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En analyse, on utilise souvent la notion de propriété vraie localement. Nous nous restreindrons au cas des fonctions définies sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}$.

Définition 33 (voisinage élémentaire) Soit $a \in \mathbb{R}$, un voisinage élémentaire de a est un intervalle ouvert de la forme $]a - \alpha, a + \alpha[$ pour $\alpha > 0$.

Un voisinage élémentaire de $+\infty$ est un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ pour $A \in \mathbb{R}$.

Un voisinage élémentaire de $-\infty$ est un intervalle de la forme $] -\infty, B[$ pour $B \in \mathbb{R}$.

Définition 34 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit qu'une propriété est vraie au voisinage de a s'il existe un voisinage élémentaire sur laquelle elle est vraie.

Notation : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Notons $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages élémentaires de a .

Proposition 10 Soit $D \subset \mathbb{R}$. On a une équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- (i) $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est limite d'une suite d'éléments de D .
- (ii) $\forall V \in \mathcal{V}(a), \quad V \cap D \neq \emptyset$.

Démonstration. Traitons le cas où a est réel, les cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$ étant laissés au lecteur.

Montrons que (i) implique (ii). On suppose que a est la limite d'une suite (x_n) d'éléments de $x_n \in D$. Soit $\alpha > 0$. Il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (x_n) sont dans $]a - \alpha, a + \alpha[$. Pour $n \geq n_0$, on a donc $x_n \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap D$.

Montrons que (ii) implique (i). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in D \cap]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$. La suite (x_n) converge vers a . $\square$

Définition 35 On dit que a est adhérent à D s'il satisfait (i) ou (ii). On note $\overline{D}$ l'ensemble des points adhérents à D . L'ensemble $\overline{D}$ est appelée adhérence de D .

Définition 36 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \overline{D}$ et $l \in \mathbb{K}$. On dit que f admet l comme limite lorsque x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}(a), \quad x \in V \cap D \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Notation :

la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Remarque 17 si $a \in D$ et si $f(x)$ admet une limite l lorsque x tend vers a , on a nécessairement $l = f(a)$.

Proposition 11 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que f admet une limite l lorsque x tend vers a . Si $l \neq 0$, il existe un voisinage élémentaire V de a sur lequel f ne s'annule pas.

Démonstration. Par définition de la limite,

$$\exists V \in \mathcal{V}(a), \quad x \in V \cap D \implies |f(x) - l| < \frac{|l|}{2}.$$

Comme, $|l| - |f(x)| \leq ||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$, on en déduit Pour $x \in V \cap D$, on a $|f(x)| > \frac{|l|}{2}$. $\square$

On pose $D - \{a\} = \begin{cases} D & \text{si } a \notin D \\ D \text{ privé de } a & \text{si } a \in D. \end{cases}$

La limite de la restriction de f à $D - \{a\}$ lorsque x tend vers a est notée $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x)$ soit

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{D - \{a\}}(x).$$

La limite de la restriction de f à $D \cap]a, +\infty[$ (respectivement $D \cap]-\infty, a[$) lorsque x tend vers a est notée $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x)$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$) et est appelée limite à droite (respectivement à gauche) de a . On a donc

$$\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{D \cap]a, +\infty[}(x), \quad \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{D \cap]-\infty, a[}(x),$$

Théorème 38 [caractérisation séquentielle de la limite] Soit $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in \overline{D}$ et $l \in \mathbb{K}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$
- (ii) Pour toute suite (x_n) de D tendant vers a , la suite $(f(x_n))$ tend vers l .

Démonstration. Traitons le cas où $a = +\infty$, les cas $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ étant laissés au lecteur.

Montrons que (i) implique (ii). Soit $\varepsilon > 0$. Comme f tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$, on a :

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad x \in D \cap]A, +\infty[\implies f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

La suite (x_n) convergeant vers $+\infty$, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies x_n > A.$$

On en déduit que si n est supérieur à n_0 , alors $f(x_n)$ appartient à $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. Ce qui démontre que la suite $(f(x_n))$ converge vers l .

Montrons que (ii) implique (i) par la contraposée. Supposons que f ne tend pas vers l lorsque x tend vers $+\infty$ et construisons une suite (x_n) de D convergeant vers $+\infty$ et telle que $f(x_n)$ ne converge pas vers l . Comme f ne tend pas vers l lorsque x tend vers $+\infty$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in D \cap]A, +\infty[\text{ avec } |f(x) - l| \geq \varepsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $A = n$ et on choisit un élément x_n appartenant à $D \cap]n, +\infty[$ tel que $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n > n \quad \text{et} \quad |f(x_n) - l| \geq \varepsilon.$$

La suite (x_n) converge donc vers $+\infty$ alors que la suite $f(x_n)$ ne tend pas vers l . $\square$

Théorème 39 [Propriétés algébriques de la limite] Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a \in \overline{D}$.

- Si f admet une limite $l \in \mathbb{K}$ et g une limite $l' \in \mathbb{K}$ lorsque x tend vers a , alors $f + g$ tend vers $l + l'$ lorsque x tend vers a .
- Si f admet une limite $l \in \mathbb{K}$ alors λf tend vers λl lorsque x tend vers a .
- Si f admet une limite $l \in \mathbb{K}$ et g une limite $l' \in \mathbb{K}$ lorsque x tend vers a , alors fg tend vers ll' lorsque x tend vers a .
- Si f admet une limite $l \neq 0$ lorsque x tend vers a , alors f ne s'annule pas sur un voisinage élémentaire de a et $\frac{1}{f}$ tend vers $\frac{1}{l}$ lorsque x tend vers a .

Démonstration. Pour cette démonstration, on renvoie le lecteur à son cours de L1.

Le critère de Cauchy permet de montrer que la fonction f a une limite sans connaître cette limite.

Théorème 40 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \overline{D}$. La fonction f a une limite lorsque x tend vers a si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{+*}, \exists V \in \mathcal{V}(a), \quad x, x' \in V \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Démonstration. Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe un voisinage élémentaire V de a tel que

$$x \in V(a) \implies |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que :

$$x, x' \in V \implies |f(x) - f(x')| \leq |f(x) - l| + |l - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Donc f vérifie bien le critère de Cauchy.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$ fixé et supposons que f vérifie le critère de Cauchy c'est-à-dire qu'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que

$$x, x' \in V \implies |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers a (dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $a = +\infty$). Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_0 \implies x_n \in V.$$

Donc

$$p, q \geq N_0 \implies |f(x_p) - f(x_q)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle converge donc vers une limite l et de plus, en faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient :

$$n \geq N_0 \implies |f(x_n) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $x \in V$, on choisit $n \geq N_0$ et on peut écrire :

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La fonction F admet donc l comme limite quand $x \rightarrow b$. $\square$

Proposition 12 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \overline{D}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- la fonction f tend vers $l \in \mathbb{C}$ lorsque x tend vers a .
- $\operatorname{Re}(f)$ tend vers $\operatorname{Re}(l)$ lorsque x tend vers a et $\operatorname{Im}(f)$ tend vers $\operatorname{Im}(l)$ lorsque x tend vers a .

Démonstration. La proposition découle des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(l)| &\leq |f(x) - l| \leq |\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(l)| + |\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(l)| \\ |\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(l)| &\leq |f(x) - l| \leq |\operatorname{Re}(f)(x) - \operatorname{Re}(l)| + |\operatorname{Im}(f)(x) - \operatorname{Im}(l)|. \square \end{aligned}$$

Pour toutes les propriétés utilisant la relation d'ordre, on suppose f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 41 [limite et relation d'ordre] 1) Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On suppose $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$. Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a , alors $l \leq l'$.

2) Soient $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On suppose $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors g tend vers l lorsque x tend vers a .

Démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction et on se ramène au cas des suites.

Remarque 18 Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges. Par exemple : Soit $f, g : \mathbb{R}_{+*} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ et $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$. On a $f(x) < g(x)$ si $x \in \mathbb{R}_{+*}$. Les fonctions f et g tendent vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, on étend la notion de limite à $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 37 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$.

1) On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists V \in \mathcal{V}(a), \quad x \in V \cap D \implies f(x) > A.$$

2) On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \exists V \in \mathcal{V}(a), \quad x \in V \cap D \implies f(x) < B.$$

Théorème 42 [caractérisation séquentielle de la limite] Soit $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (respectivement $-\infty$).
- (ii) Pour toute suite (x_n) de D tendant vers a , la suite $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Démonstration. Traitons le cas où a est réel et f tend vers $-\infty$, les autres cas étant laissés au lecteur.

Montrons que (i) implique (ii). Soit $B \in \mathbb{R}$. Comme f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a , on a :

$$\exists \alpha > 0, \quad x \in D \cap]a - \alpha, a + \alpha[\implies f(x) < B.$$

La suite (x_n) convergeant vers a , on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies x_n \in]a - \alpha, a + \alpha[.$$

On en déduit que si n est supérieur à n_0 , alors $f(x_n)$ est strictement supérieur à B . Ce qui démontre que la suite $(f(x_n))$ converge vers $-\infty$.

Montrons que (ii) implique (i) par la contraposée. Supposons que f ne tende pas vers $-\infty$ et construisons une suite (x_n) de D convergeant vers a et telle que $f(x_n)$ ne converge pas vers $-\infty$. Comme f ne tend pas vers $-\infty$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists x \in D \cap]a - \alpha, a + \alpha[\text{ avec } f(x) \geq B.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $\alpha = \frac{1}{n}$ et on prend un élément x_n appartenant à $D \cap]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ tel que $f(x_n) \geq B$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f(x_n) \geq B.$$

La suite (x_n) converge donc vers a alors que la suite $f(x_n)$ ne tend pas vers $-\infty$. $\square$

Théorème 43 Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$.

1) On suppose f croissante.

1a) On a l'alternative suivante :

- $f(]a, b[)$ est majorée. Alors la fonction f tend vers $\sup\{f(x) \mid x \in]a, b[\}$ lorsque x tend vers b .
- $f(]a, b[)$ n'est pas majorée. Alors la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers b .

1b) On a l'alternative suivante :

- $f(]a, b[)$ est minorée. Alors la fonction f tend vers $\inf\{f(x) \mid x \in]a, b[\}$ lorsque x tend vers a .
- $f(]a, b[)$ n'est pas minorée. Alors la fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a .

2) On a une assertion analogue lorsque f est décroissante.

Démonstration. Démontrons 1a), les autres assertions étant laissées au lecteur.

Supposons $f(]a, b[)$ est majorée et posons $l = \sup\{f(x) \mid x \in]a, b[\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > l - \varepsilon$. Pour tout $x \in]x_0, b[$, on a $l - \varepsilon < f(x) \leq l$. Ce qui démontre que f tend vers l lorsque x tend vers b .

Supposons maintenant que f n'est pas majorée sur $]a, b[$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > A$. Pour tout $x \in]x_0, b[$, on a $f(x) > A$. Ce qui démontre que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers b .

4.1 o, O et équivalents

Définition 38 Soit $a \in \mathbb{R}$. Un voisinage élémentaire épointé de a est un voisinage élémentaire de a privé de a .

Définition 39 Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{D}$. On suppose qu'il existe un voisinage élémentaire de a tel que g ne s'annule pas sur $D \cap V - \{a\}$.

a) On dit que $f = O(g)$ au voisinage de a s'il existe un voisinage élémentaire V de a et une constante M tel que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ pour $x \in V$.

b) On dit que $f = o(g)$ au voisinage de a si la fonction $f(x)/g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a , $x \neq a$.

c) On dit que f est équivalente à g (et on note $f \sim_a g$) au voisinage de a si la fonction $f(x)/g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers a , $x \neq a$.

Remarque 19 Si f est équivalente à g , il existe un voisinage élémentaire épointé $W - \{a\} \subset V - \{a\}$ de a sur lequel $\frac{1}{2} \leq \frac{f}{g} \leq \frac{3}{2}$. La fonction f ne s'annule pas sur $W - a$ et on a $f = O(g)$ et $g = O(f)$.

Théorème 44 Soient $f, f_1, g, g_1 : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{D}$. On suppose que f_1 et g_1 ne s'annulent pas au voisinage de a et que $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Alors $fg \sim f_1g_1$ et $f/f_1 \sim g/g_1$.

Remarque 20 1 **Attention aux compositions** : $f \sim_a g$ n'implique pas $h \circ f \sim_a h \circ g$. Par exemple $x + 1 \sim_{+\infty} x$ et pourtant e^{x+1} n'est pas équivalente à e^x au voisinage de $+\infty$.

2) **Attention aux sommes** : Si $f \sim_a f_1$ et $g \sim_a g_1$, on n'a pas nécessairement $f + g \sim f_1 + g_1$. En effet $x^2 + 2x \sim_{+\infty} x^2 + x$ et $-x^2 \sim_{+\infty} -x^2$ et pourtant $2x$ n'est pas équivalent à x .

Comment obtenir un équivalent.

Au voisinage d'un élément a de $\mathbb{R}$.

Premier cas : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$: Alors $f(x) \sim_a l$.

Deuxième cas : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$: Si f admet un développement limité au voisinage de a , on cherche le premier terme non nul de ce développement limité. Si

$$f(x) = \alpha_p(x-a)^p + (x-a)^p \varepsilon(x-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_p \neq 0$$

Alors $f(x) \sim_a \alpha_p(x-a)^p$. De cette façon, on obtient $\cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$.

Au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$: On cherche à mettre le terme dominant en facteur. Par exemple

$$x^2 + \ln(1+x) = x^2 \left(1 + \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) \sim_{\pm\infty} x^2.$$

4.2 Continuité et uniforme continuité

Définition 40 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ et $a \in D$. On dit que f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad x \in D \cap]a - \alpha, a + \alpha[\implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On peut donc écrire

$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

En fait, f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe puisque cette limite ne peut être que $f(a)$. On a aussi l'équivalence suivante :

$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = f(a).$$

Théorème 45 [Propriétés algébriques de la continuité] Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a \in D$.

- Si f et g sont continues en a alors $f + g$ et fg sont continues en a .
- Si f est continue en a alors λf est continue en a .
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est définie sur un voisinage élémentaire de a et est continue en a .

Démonstration. Ce théorème découle du théorème 39. $\square$

Définition 41 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ et $a \in D$. On dit que f est continue à droite de a (respectivement à gauche de a) si $f_{[a, +\infty[}$ (respectivement $f_{]-\infty, a]}$) est continue en a .

f est continue à droite de a (respectivement à gauche de a) si $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = f(a)$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = f(a)$).

Définition 42 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue sur D si elle est continue en tout point de D .

Théorème 46 Soit I un intervalle. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I , alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque 21 **Attention :** I et $f(I)$ ne sont pas nécessairement de même nature. Par exemple $\sin :]0, 3\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et on a $\sin(]0, 3\pi[) = [-1, 1]$.

Démonstration. Nous admettrons ce résultat qui a déjà été vu en L1.

Cependant, on a le résultat suivant :

Théorème 47 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ et $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$

Remarque 22 En fait, m est le plus petit élément de $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ et M en est le plus grand élément.

Démonstration. Nous admettrons ce résultat qui a déjà été vu en L1.

Proposition 13 (prolongement par continuité) Soit I un intervalle ne contenant pas a et tel que $a \in \bar{I}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I . On suppose f admet une limite l lorsque x tend vers a ($x \neq a$) alors l'application $\tilde{f} : D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue sur $D \cup \{a\}$.

Définition 43 (uniforme continuité) Soit $f : D \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est uniformément continue sur D si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall (x, x') \in D^2, \quad |x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Exemple 20 On dit que $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ est λ -lipschitzienne si

$$\forall (x, x') \in D^2, \quad |f(x) - f(x')| < \lambda |x - x'|.$$

D'après le théorème des accroissements finis, si I est un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et à dérivée bornée par M sur I , alors f est M -lipschitzienne sur I . Toute fonction λ -lipschitzienne est uniformément continue.

Remarque 23 toute fonction uniformément continue sur D est continue sur D .

Attention : la réciproque est fautive. Par exemple la fonction qui à x associe x^2 n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrons le. Nous devons montrer l'assertion suivante :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x - y| < \eta \quad \text{et} \quad |x^2 - y^2| \geq \varepsilon$$

On choisit $\varepsilon = 1$. Si $y_0 + \frac{\eta}{4} > \frac{1}{\eta}$, alors le couple $(x_0, y_0) = (y_0 + \frac{\eta}{2}, y_0)$ vérifie

$$|x_0 - y_0| < \eta \quad \text{et} \quad |x_0^2 - y_0^2| \geq \varepsilon. \square$$

On a cependant le théorème de Heine qui nous sera fort utile pour développer la théorie de l'intégrale de Riemann :

Théorème 48 (théorème de Heine) Si f est continue sur un segment $[a, b]$, elle est uniformément continue sur $[a, b]$.

Remarque 24 La fonction qui à x associe x^2 est uniformément continue sur $[0, 1]$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons que f est continue sur $[a, b]$ mais non uniformément continue. Alors

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad \exists (x, y) \in [a, b], \quad |x - y| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

On choisit $\alpha = \frac{1}{n}$. Il existe donc $(x_n, y_n) \in [a, b]^2$ tel que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. On considère les suites (x_n) et (y_n) .

- $(x_n - y_n)$ tend vers 0.
- (x_n) est une suite de $[a, b]$. Elle admet donc une sous suite convergente $(x_{\phi(n)})$ dont on notera c la limite.

Comme $(x_n - y_n)$ tend vers 0, il en est de même de $(x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)})$. Donc $(y_{\phi(n)})$ tend vers c . Comme f est continue en c , les suites $(f(x_{\phi(n)}))$ et $(f(y_{\phi(n)}))$ convergent vers $f(c)$. Donc $(f(x_{\phi(n)}) - f(y_{\phi(n)}))$ tend vers 0. Ce qui contredit l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \square$$

Chapitre 5

Intégrale de Riemann

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce chapitre, $[a, b]$ désigne un segment avec $a < b$.

5.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 44 Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision σ de $[a, b]$ une suite finie strictement croissante de nombres

$$\sigma = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b).$$

Le pas d'une telle subdivision est

$$\omega(\sigma) = \sup\{|t_{i+1} - t_i| \mid i \in [0, n-1]\}.$$

On dit que la subdivision σ' est plus fine que σ si $\sigma' \subset \sigma$.

Exemple 21 La subdivision la plus simple est la subdivision régulière

$$\left(t_0 = a, t_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, t_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, \dots, t_n = b\right).$$

Son pas est $\frac{b-a}{n}$

Définition 45 Une fonction ϕ définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $(t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b)$ telle que ϕ soit constante sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ pour $i \in [0, n-1]$. Une telle subdivision est dite adaptée à ϕ .

Remarque 25 Si σ est adaptée à ϕ , toute subdivision plus fine que σ est adaptée à ϕ . Ainsi, étant donnée deux fonctions en escalier ϕ et ψ , il existe une subdivision adaptée à ϕ et à ψ obtenue, par exemple, en faisant la réunion des subdivisions adaptées à ϕ et à ψ .

Proposition 14 1) si ϕ et ψ sont en escalier sur $[a, b]$ et λ est un scalaire, alors $\lambda\phi + \psi$ est en escalier.

2) Si ϕ est en escalier sur $[a, b]$, alors $|\phi|$ est en escalier sur $[a, b]$.

Définition 46 Soit ϕ en escalier sur $[a, b]$, $\sigma = (a = t_0, t_1, \dots, t_n = b)$ une subdivision adaptée à ϕ . Soit C_i la valeur de ϕ sur l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$. On pose

$$\int_{[a,b]} \phi(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} C_i(t_{i+1} - t_i).$$

Cette définition ne dépend pas de la subdivision σ adaptée à ϕ .

Démonstration. Notons $I_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i(t_{i+1} - t_i)$ et montrons que ce nombre ne dépend pas de σ .

Première étape : Soit σ' obtenue à partir de σ en rajoutant un point. Montrons que $I_\sigma(f) = I_{\sigma'}(f)$. On pose $\sigma' = (t_0, \dots, t_i, \alpha, t_{i+1}, \dots, t_n)$ et

$$\begin{aligned} I_{\sigma'}(f) &= C_0(t_1 - t_0) + \dots + C_i(\alpha - t_i) + C_i(t_{i+1} - \alpha) + C_{i+1}(t_{i+2} - t_{i+1}) + \dots + C_n(t_n - t_{n-1}) \\ &= I_\sigma(f) \end{aligned}$$

Deuxième étape : De la première étape, on déduit $I_\sigma(f) = I_{\sigma'}(f)$ obtenu à partir de f en rajoutant un nombre fini de points.

Troisième étape : Soit $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision obtenue en faisant la réunion de σ et de σ' . On a $I_\sigma(f) = I_{\sigma \cup \sigma'}(f) = I_{\sigma'}(f)$. $\square$

Exemple 22 Soit f une fonction nulle sauf en un nombre fini de points. C'est une fonction en escalier dont l'intégrale est nulle.

Théorème 49 Soient ϕ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et λ est un scalaire.

a)

$$\int_{[a,b]} (\lambda\phi + \psi)(t) dt = \lambda \int_{[a,b]} \phi(t) dt + \int_{[a,b]} \psi(t) dt.$$

b) Si ϕ et ψ sont à valeurs réelles et que l'on a $\phi(t) \leq \psi(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors

$$\int_{[a,b]} \phi(t) dt \leq \int_{[a,b]} \psi(t) dt.$$

c)

$$\left| \int_{[a,b]} \phi(t) dt \right| \leq \int_{[a,b]} |\phi(t)| dt.$$

d) Si $c \in]a, b[$, on a la relation de Chasles :

$$\int_a^b \phi(t) dt = \int_a^c \phi(t) dt + \int_c^b \phi(t) dt.$$

e) Si ϕ est à valeurs complexes, on a

$$\int_{[a,b]} \phi(t) dt = \int_{[a,b]} \operatorname{Re}(\phi)(t) dt + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im}(\phi)(t) dt.$$

Démonstration. a) on prend une subdivision σ adaptée à la fois à ϕ et à ψ . Le résultat est immédiat à partir de la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier.

b) on prend une subdivision σ adaptée à la fois à ϕ et à ψ . Notons C_i (respectivement D_i) la valeur prise par ϕ (respectivement ψ) sur $]t_{i+1}, t_i[$. On a $C_i \leq D_i$. Le résultat découle alors de la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier.

c) Une subdivision adaptée à ϕ est aussi adaptée à $|\phi|$. Cela découle alors de l'inégalité triangulaire

d) La relation de Chasles est évidente si on prend une subdivision adaptée à ϕ et qui contient le point c . Cela est toujours possible quitte à rajouter le point c à la subdivision. $\square$

5.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Définition 47 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est intégrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que

$$|f - \phi| \leq \eta \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \eta(t) dt \leq \varepsilon.$$

Proposition 15 1) Si f est intégrable sur $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$.

2) Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et λ est un scalaire, alors $\lambda f + g$ est intégrable sur $[a, b]$.

3) Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$, alors fg est intégrable sur $[a, b]$.

4) Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$.

5) Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si ses parties réelles $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont.

Démonstration. 1) Les fonctions en escalier étant bornées, la définition de l'intégrabilité implique qu'une fonction intégrable est bornée.

2) Si $\lambda = 0$, l'assertion est évidente. On peut donc supposer $\lambda \neq 0$. Soient $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ en escalier et telles que

$$|f - \phi| \leq \eta \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \eta(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}$$

Soient $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $\nu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ en escalier et telles que

$$|g - \psi| \leq \nu \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \nu(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}$$

On a

$$|(f + \lambda g) - (\phi + \lambda \psi)| \leq (\eta + |\lambda| \nu)$$

et

$$\int_{[a,b]} (\eta + |\lambda| \nu) dt \leq \varepsilon.$$

3) Soit $M > 0$ tel que $\sup\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\} \leq M$. Soient $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $\nu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ en escalier et telles que

$$|g - \psi| \leq \nu \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \nu(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

On choisit $N > 0$ tel que $\sup\{|\psi(t)| \mid t \in [a, b]\} \leq N$. Soient $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ en escalier et telles que

$$|f - \phi| \leq \eta \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \eta(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Pour tout $t \in [a, b]$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} |(fg)(t) - \phi(t)\psi(t)| &= |f(t)(g(t) - \psi(t)) + \psi(t)(f(t) - \phi(t))| \\ &\leq |f(t)||g(t) - \psi(t)| + |\psi(t)||f(t) - \phi(t)| \\ &\leq M\eta + N\nu \end{aligned}$$

et $\int_{[a,b]} (M\eta + N\nu)(t)dt < \varepsilon$.

4) Etant donné ε , on associe à la fonction f les fonctions en escalier ϕ et η . En utilisant l'inégalité triangulaire, on voit que les fonctions en escalier $|\phi|$ et η sont naturellement associées à $|f|$ et ceci prouve que f est intégrable sur $[a, b]$.

5) On suppose $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Etant donné ε , on associe à la fonction f les fonctions en escalier ϕ et η . Alors les fonctions en escalier $|\operatorname{Re}(\phi)|$ (partie réelle de ϕ) et η sont naturellement associées à $\operatorname{Re}(f)$ et ceci prouve que $\operatorname{Re}(f)$ est intégrable sur $[a, b]$. On montre de même que $\operatorname{Im}(f)$ est intégrable.

Réciproquement, si les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont intégrables, alors f est intégrable en vertu de 2). $\square$

Théorème 50 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\leq f} &= \left\{ \int_a^b \phi(t)dt \mid \phi \text{ en escalier sur } [a, b], \quad \phi \leq f \right\} \\ \mathcal{E}_{\geq f} &= \left\{ \int_a^b \psi(t)dt \mid \psi \text{ en escalier sur } [a, b], \quad \psi \geq f \right\} \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{E}_{\leq f}$ étant non vide majoré, il admet une borne supérieure notée $I^-(f)$. L'ensemble $\mathcal{E}_{\geq f}$ étant non vide minoré, il admet une borne inférieure notée $I^+(f)$. On a toujours l'inégalité $I^-(f) \leq I^+(f)$. La fonction f est intégrable si et seulement si $I^+(f) = I^-(f)$.

Démonstration. On suppose $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que $|f - \phi| \leq \eta$ et $\int_{[a,b]} \eta \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $\phi - \eta \leq f \leq \phi + \eta$. On en déduit les inégalités

$$\int_{[a,b]} (\phi(t) - \eta(t))dt \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_{[a,b]} (\phi(t) + \eta(t))dt.$$

Ce qui implique $0 \leq I^+(f) - I^-(f) \leq \varepsilon$. Le réel $I^+(f) - I^-(f)$ est nul puisqu'il est inférieur à tout réel strictement positif.

Réciproquement, on suppose $I^+(f) = I^-(f)$. On notera ce réel $I(f)$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après les propriétés de la borne supérieure, il existe $\phi \in \mathcal{E}_{\leq f}$ telle que $I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_{[a,b]} \phi(t)dt$. De même, les propriétés de la borne inférieure, il existe $\psi \in \mathcal{E}_{\geq f}$ telle que $I(f) + \frac{\varepsilon}{2} > \int_{[a,b]} \psi(t)dt$. On pose $\eta = \psi - \phi$. On a $|f - \phi| < \eta$ et $\int_{[a,b]} \eta(t)dt < \varepsilon$. Ce qui démontre l'intégrabilité de f . $\square$

Définition 48 1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = I^+(f) = I^-(f).$$

2) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{[a,b]} \operatorname{Re}(f)(t)dt + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im}(f)(t)dt.$$

Théorème 51 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction intégrable. Soit $(\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}, \eta_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+)$ une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$|f - \phi_n| \leq \eta_n \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \eta_n(t) dt \leq \varepsilon_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

La suite $\left(\int_{[a,b]} \phi_n(t) dt \right)_n$ converge vers $\int_{[a,b]} f(t) dt$.

Démonstration. Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a $\phi_n - \eta_n \leq f \leq \phi_n + \eta_n$. D'où l'on déduit

$$\int_{[a,b]} \phi_n(t) dt - \int_{[a,b]} \eta_n(t) dt \leq I^-(f) = I^+(f) \leq \int_{[a,b]} \phi_n(t) dt + \int_{[a,b]} \eta_n(t) dt$$

et donc $\left| \int_{[a,b]} f(t) dt - \int_{[a,b]} \phi_n(t) dt \right| \leq 2\varepsilon_n$ et l'assertion est démontrée.

Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a

$$|\operatorname{Re}(f) - \operatorname{Re}(\phi_n)| \leq |f - \phi_n| \leq \eta_n \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \eta_n(t) dt \leq 2\varepsilon_n$$

et donc $\left(\int_{[a,b]} \operatorname{Re}(\phi_n)(t) dt \right)_n$ tend vers $\int_{[a,b]} \operatorname{Re}(f)(t) dt$. On procède la même façon pour $\operatorname{Im}(f)$. $\square$

Remarque 26 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_{[a,b]} f(t) dt$ calcule l'aire entre l'axe Ox et le graphe $Gr(f)$ de f . On rappelle que

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}.$$

Théorème 52 Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et λ un scalaire.

a)

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_{[a,b]} f(t) dt + \int_{[a,b]} g(t) dt.$$

b) Si f et g sont à valeurs réelles et si $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$\int_{[a,b]} f(t) dt \leq \int_{[a,b]} g(t) dt.$$

c) On a l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_{[a,b]} f(t) dt \right| \leq \int_{[a,b]} |f(t)| dt$$

d) Si $c \in]a, b[$, on a la relation de Chasles :

$$\int_{[a,b]} f(t) dt = \int_{[a,c]} f(t) dt + \int_{[c,b]} f(t) dt$$

Démonstration. Les propriétés a), c) et d) sont obtenues à partir du théorème 49 par passage à la limite.

Montrons la propriété b). Si f est positive, la fonction (en escalier) nulle est inférieure à f . On en déduit que 0 est dans $\mathcal{E}_{\leq f}$. D'où l'inégalité $0 \leq \int_{[a,b]} f(t) dt$.

Si $f \leq g$, alors la fonction $g - f$ est intégrable et positive, son intégrale est donc positive. Par linéarité de l'intégrale, on en déduit $\int_{[a,b]} f(t) dt \leq \int_{[a,b]} g(t) dt$. $\square$

Définition 49 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b)$ de $[a, b]$ telle que

- f est continue sur $]t_i, t_{i+1}[$ pour tout $i \in [0, n-1]$
- f admet une limite à droite de t_i pour $i \in [0, n-1]$
- f admet une limite à gauche de t_i pour $i \in [1, n]$.

Théorème 53 Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Il existe deux fonctions en escalier ϕ et ψ telles que $\phi \leq f \leq \psi$ et $0 \leq \psi - \phi \leq \varepsilon$.

Premier cas : f est continue

f étant continue sur $[a, b]$, elle y est uniformément continue. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall (x, y) \in [a, b], \quad |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On choisit une subdivision $(x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$ régulière sur $[a, b]$ de pas strictement inférieur à α . On pose

$$m_i = \inf\{f(t) \mid t \in [x_i, x_{i+1}]\} \quad \text{et} \quad M_i = \sup\{f(t) \mid t \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

Il existe $(c_i, d_i) \in [x_i, x_{i+1}]^2$ tel que $m_i = f(c_i)$ et $M_i = f(d_i)$. Comme c_i et d_i sont dans $[x_i, x_{i+1}]$, on a $|m_i - M_i| < \varepsilon$. On définit ϕ en escalier telle que

- $(x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision adaptée à ϕ .
- $\phi|_{]x_i, x_{i+1}[} = m_i$
- $\phi(x_i) = f(x_i)$.

On définit ψ en escalier telle que

- $(x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision adaptée à ψ .
- $\psi|_{]x_i, x_{i+1}[} = M_i$
- $\phi(x_i) = f(x_i)$.

On a $\phi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \phi < \varepsilon$.

Deuxième cas : Il existe une subdivision $(a_0 = a, a_1, \dots, a_r = b)$ telle que $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ soit continue et admette une limite à droite de a_i et à gauche de a_{i+1} . On prolonge $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$ en posant :

$$\begin{aligned} f_i : [a_i, a_{i+1}] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t \in]a_i, a_{i+1}[&\mapsto f(t) \\ a_i &\mapsto \lim_{t \rightarrow a_i, t < a_i} f(t) \\ a_{i+1} &\mapsto \lim_{t \rightarrow a_{i+1}, t > a_{i+1}} f(t) \end{aligned}$$

D'après le premier cas, il existe $\phi_i, \psi_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier et telles que $\phi_i \leq f \leq \psi_i$ et $\psi_i - \phi_i < \varepsilon$.

Soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier telle que $\phi|_{]a_i, a_{i+1}[} = \phi_i$ et $\phi(a_i) = f(a_i)$.

Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier telle que $\psi|_{]a_i, a_{i+1}[} = \psi_i$ et $\psi(a_i) = f(a_i)$.

On a $\phi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \phi \leq \varepsilon$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. D'après le lemme, il existe $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier telles que $\phi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \phi \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Donc $\int_a^b \psi(t)dt - \int_a^b \phi(t)dt < \varepsilon$. Or on a les inégalités

$$\int_a^b \phi(t)dt \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_a^b \psi(t)dt.$$

Donc $0 \leq I^+(f) - I^-(f) \leq \varepsilon$. Comme ceci est vrai pour tout ε , on en déduit $I^+(f) = I^-(f)$ et f est intégrable. $\square$

Théorème 54 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est positive et continue sur $[a, b]$. Si $\int_{[a,b]} f(t)dt = 0$ alors f est identiquement nulle.

Démonstration. Montrons la contraposée. On suppose f continue et non identiquement nulle. Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Il existe un intervalle $[c, d]$ (avec $c < d$) contenant x_0 et inclus dans $[a, b]$ tel que : pour tout $x \in [c, d]$, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. On a alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_c^d f(t)dt > \int_c^d \frac{f(x_0)}{2}dt = (c - d) \frac{f(x_0)}{2}. \square$$

Remarque 27 Sans l'hypothèse de continuité, ce théorème est faux. Il suffit de considérer une fonction nulle sauf en un nombre fini de points où elle prend des valeurs positives.

Théorème 55 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction intégrable. L'application

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

est continue sur $[a, b]$

Démonstration. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$. Soient x et y deux éléments de $[a, b]$. On peut supposer sans perte de généralité que $x \leq y$. On a $F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt$. On en déduit en utilisant l'inégalité triangulaire (théorème 52)

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq M(y - x).$$

La fonction F est M -lipschitzienne. $\square$

Définition 50 (intégrabilité locale) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est localement intégrable sur I si elle est intégrable sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I .

Exemple 23 On dit qu'une fonction est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I . Toute fonction continue par morceaux sur I est localement intégrable sur I .

Définition 51 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ localement intégrable sur I et a, b deux éléments de I . On pose

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(t)dt & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[b,a]} f(t)dt & \text{si } b < a \end{cases}$$

Théorème 56 Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient a, b, c trois éléments de I .

1)

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

2)

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

3) On a la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Démonstration. Pour démontrer 1) et 2), on distingue les cas $a < b$, $a = b$, $a > b$.

Pour démontrer 3), on distingue tous les cas de positions relatives des réels a, b et c . Traitons le cas $a < b < c$. Les autres cas sont laissés au lecteur. On a d'après le théorème 52,

$$\int_{[a,c]} f(t) dt = \int_{[a,b]} f(t) dt + \int_{[b,c]} f(t) dt.$$

Cette égalité s'écrit $\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$. Ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Remarque 28 La remarque suivante nous sera utile à plusieurs reprises dans les démonstrations. On garde les notations du théorème 56. On suppose $|f| \leq |g|$ sur I . Soient x et y dans I , on a

$$\left| \int_x^y |f(t)| dt \right| \leq \left| \int_x^y |g(t)| dt \right|.$$

En effet, il y a deux cas à considérer :

Premier cas : $x \leq y$ Cela découle alors du théorème 52.

Premier cas : $x \geq y$. On a alors

$$\left| \int_x^y |f(t)| dt \right| = \int_y^x |f(t)| dt \leq \int_y^x |g(t)| dt = \left| \int_x^y |g(t)| dt \right|.$$

Théorème 57 (Première formule de la moyenne) 1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) intégrable. On pose

$$m = \inf\{f(t) \mid t \in [a, b]\} \\ M = \sup\{f(t) \mid t \in [a, b]\}.$$

Alors

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M.$$

2) Si f est continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. Pour tout $t \in [a, b]$, on a $m \leq f(t) \leq M$. Par intégration, on en déduit

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

Ce qui démontre 1).

2) est une conséquence du théorème 47. $\square$

Définition 52 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Soit $\sigma = (t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\omega(\sigma)$. Soit $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$. On appelle somme de Riemann associée à $(f, \sigma, \underline{\xi} = (\xi_i)_{i \in [0, n-1]})$ le réel

$$\mathcal{R}(f, \sigma, \underline{\xi}) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(\xi_i).$$

Théorème 58 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue ($a < b$). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que quelle que soit la somme de Riemann $\mathcal{R}(f, \sigma, \underline{\xi})$ associée à une subdivision dont le pas est inférieur à α ,

$$\left| \mathcal{R}(f, \sigma, \underline{\xi}) - \int_a^b f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. f étant continue sur $[a, b]$, elle y est uniformément continue.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Soit σ de pas strictement inférieur à α . On a

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(\xi_i) \right| \leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(x) - f(\xi_i)] dx \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(x) - f(\xi_i)| dx \leq \varepsilon.$$

Corollaire 59 Soit $(\mathcal{R}(f, \sigma_n, \underline{\xi}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sommes de Riemann associée à une suite de subdivisions $(\sigma_n)_n$ dont le pas tend vers 0. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R}(f, \sigma_n, \underline{\xi}_n) = \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque 29 Le théorème 58 ainsi que son corollaire sont vrais si f est seulement intégrable mais la démonstration est plus difficile (voir [1]).

Exemple 24 1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt.$$

2) La suite $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}}$ converge vers $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \text{Ln}(2)$.

5.3 Intégrales et primitives

Nous allons voir que, dans la pratique, le calcul intégral se ramène souvent à un calcul de primitives.

Définition 53 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en a si la fonction

$$\begin{aligned} I - \{a\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \end{aligned}$$

admet une limite lorsque t tend vers a ($t \neq a$). Cette limite est alors notée $f'(a)$.

Proposition 16 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. Dans ce cas, on a

$$f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i\operatorname{Im}(f)'(a).$$

Démonstration. C'est une application de la proposition 12. $\square$

Exemple 25 Si $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, on pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$e^{\gamma x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)).$$

La fonction $e^{\gamma x}$ est dérivable et sa dérivée est $\gamma e^{\gamma x}$.

Proposition 17 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Si F est une primitive de f , alors l'ensemble des primitives de f (à valeurs dans $\mathbb{K}$) est constitué des fonctions de la forme $F + C^{\text{ste}}$ avec $C^{\text{ste}} \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, cette proposition a été démontrée en L1. Il est alors facile de la démontrer pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 54 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple 26 Si $\gamma \neq 0$, la fonction $\frac{1}{\gamma} e^{\gamma x}$ est une primitive de $e^{\gamma x}$.

Théorème 60 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur I . Soit $a \in I$. La fonction

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est une primitive de f sur I .

Démonstration.

Premier cas : On suppose que f est à valeurs réelles. $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$.

Comme f est continue, il existe ξ compris entre x_0 et x tel que (théorème 57) $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} =$

$f(\xi)$. Or ξ tend vers x_0 lorsque x tend vers x_0 . Donc, par continuité de f en x_0 , $f(\xi)$ tend vers $f(x_0)$.

Deuxième cas : Le premier cas s'applique à $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \left(\int_a^x f(t)dt\right)' &= \left(\int_a^x \operatorname{Re}(f)(t)dt + i \int_a^x \operatorname{Im}(f)(t)dt\right)' \\ &= \left(\int_a^x \operatorname{Re}(f)(t)dt\right)' + i \left(\int_a^x \operatorname{Im}(f)(t)dt\right)' \\ &= \operatorname{Re}(f)(x) + i \operatorname{Im}(f)(x) = f(x). \end{aligned}$$

□

Corollaire 61 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur I . Soient $a, b \in I$. Si H est une primitive de f sur I , on a

$$\int_a^b f(t)dt = H(b) - H(a).$$

Notation : On note $\int f(t)dt = F(t) + C^{ste}$ pour signifier que F est une primitive de f et que les autres primitives s'obtiennent par addition d'une constante. Abusivement, on écrit aussi $\int f(t)dt = F(t)$.

Théorème 62 (intégration par parties) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe C^1 . On a

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Démonstration. Cela découle de la formule $(fg)' = f'g + fg'$. □

Théorème 63 (Changement de variables) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $\phi : [a, b] \rightarrow J$ de classe C^1 .

$$\int_a^b (f \circ \phi)(x)\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt.$$

On dit que l'on a réalisé le changement de variables $t = \phi(x)$.

Remarque 30 Si ϕ est bijectif, la formule précédente peut s'écrire : soient α et β dans $\phi([a, b])$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\phi^{-1}(\alpha)}^{\phi^{-1}(\beta)} f \circ \phi(x)\phi'(x)dx$$

Démonstration. On définit

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \\ G : [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)dt \\ H : [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(t)dt. \end{aligned}$$

F étant une primitive de f , la formule $H = F \circ \phi - F \circ \phi(a)$ permet de calculer aisément la dérivée de H . On a $H' = (f \circ \phi) \times \phi' = G'$. Les fonctions G et H

- ont la même dérivée sur l'intervalle $[a, b]$.
- coïncident en a .

Elles sont donc égales. $\square$

5.4 Calcul des primitives

Rappelons les primitives des fonctions usuelles. Voici quelques exemples où on note $\int f(t) dt$ une primitive de la fonction f sur un domaine où cette fonction est continue et où a, α, β sont des constantes réelles avec $a \neq 0$ et $\alpha + i\beta \neq 0$:

$$\text{Fonctions puissance : } \int e^{(\alpha+i\beta)t} dt = \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{(\alpha+i\beta)}, \quad \int \frac{dt}{t} = \ln|x|, \quad \int t^\alpha dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1).$$

Fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned} \int \sin t dt &= -\cos x, & \int \cos t dt &= \sin x, & \int \tan t dt &= -\ln|\cos x| \\ \int \cotant dt &= \ln|\sin x|, & \int \frac{dt}{\sin t} &= \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|, & \int \frac{dt}{\cos t} &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \\ \int \frac{dt}{\cos^2 t} &= \tan x, & \int \frac{dt}{\sin^2 t} &= -\cotan x, & \int \frac{dt}{\sin t \cos t} &= \ln|\tan x|. \end{aligned}$$

Fonctions inverses :

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, \quad \int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$$

Exemple 27 Calcul de primitive d'un polynôme en $\cos t$ et $\sin t$:

En remplaçant toute puissance paire de $\sin t$ par la puissance moitié de $1 - \cos^2 t$, on se ramène à étudier les primitives de fonctions de la forme $P(\cos t) + Q(\cos t)\sin t$, où P et Q sont des polynômes.

La partie $Q(\cos t)\sin t$ s'intègre facilement au moyen du changement de variable défini par $u = \cos t$:

$$\int Q(\cos t)\sin t dt = \int Q(u) du,$$

et on est ramené au calcul d'une primitive du polynôme Q .

Pour intégrer la partie $P(\cos t)$, il suffit de connaître des primitives des fonctions $\cos^n t$ pour $n \in \mathbb{N}$. On utilise la linéarisation des fonctions $\cos^n t$:

$$\begin{aligned} 2^n (\cos t)^n &= (e^{it} + e^{-it})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-k)t} e^{-ikt} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^{-i(n-2k)t} \\ &= e^{int} + C_n^1 e^{i(n-2)t} + \dots + C_n^{n-1} e^{-i(n-2)t} + e^{-int} \\ &= 2[\cos nt + C_n^1 \cos(n-2)t + C_n^2 \cos(n-4)t + \dots]. \end{aligned}$$

On se ramène donc au calcul de primitives des fonctions $\sin nt$ et $\cos nt$ qui sont respectivement $-\frac{\cos nt}{n}$ et $\frac{\sin nt}{n}$.

On obtient ainsi par exemple :

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 t \, dt &= \int \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \\
\int \cos^2 t \, dt &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \\
\int \cos^4 t \, dt &= \int \frac{\cos^4 t + 4 \cos^2 t + 3}{8} \, dt = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} \\
\int \sin^3 t \, dt &= \int (1 - \cos^2 t) \sin t \, dt = \int (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}.
\end{aligned}$$

Expliquons maintenant comment intégrer une fraction rationnelle réelle.

Intégration des fractions rationnelles réelles

On appelle fraction rationnelle réelle tout quotient de polynômes à coefficients réels. Ainsi une fraction rationnelle réelle s'écrit $F = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Parmi les fractions rationnelles réelles, on distingue les éléments simples. Ce sont des fractions rationnelles spéciales classées en deux catégories.

Définition 55 On appelle élément simple de première espèce une fraction rationnelle du type $\frac{A}{(x-a)^n}$ où $A \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle élément simple de deuxième espèce une fraction rationnelle du type $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ où $A, B \in \mathbb{R}$, $(A, B) \neq (0, 0)$, $p^2 - 4q < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour intégrer une fraction rationnelle réelle, on la décompose en éléments simples. Cela veut dire qu'on l'écrit comme somme d'un polynôme et d'une combinaison linéaire d'éléments simples. Commençons par rappeler le théorème de décomposition en éléments simples que nous admettrons.

Théorème 64 Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle réelle. Le polynôme Q se décompose (de façon unique) en produit de polynômes irréductibles de la façon suivante

$$Q = a(X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_p)^{m_p} (X^2 + \beta_1 X + \gamma_1)^{n_1} \dots (X^2 + \beta_q X + \gamma_q)^{n_q}$$

avec

- $m_1, m_2, \dots, m_p, n_1, n_2, \dots, n_q \in \mathbb{N}^*$
- $a, r_1, \dots, r_p, \beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_q, \gamma_q \in \mathbb{R}$
- $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$ pour tout $i \in [1, q]$.

Alors, il existe

- un polynôme E
- des réels $(A_{i,j})_{i \in [1,p], j \in [1,m_p]}$
- des réels $(b_{i,j})_{i \in [1,q], j \in [1,n_q]}, (c_{i,j})_{i \in [1,q], j \in [1,n_q]}$

tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{i,j}}{(X - r_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \frac{b_{i,j}X + c_{i,j}}{(X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^j}.$$

Cette écriture est unique et s'appelle la décomposition de F en éléments simples. Le polynôme E s'appelle la partie entière de F .

Remarque 31 E est le quotient de la division euclidienne de P par Q .

Comme nous savons trouver une primitive d'un polynôme et d'un élément simple de première espèce, il nous reste à comprendre comment intégrer un élément simple de deuxième espèce pour savoir intégrer une fraction rationnelle.

Considérons donc un élément de deuxième espèce $\frac{BX+C}{(X^2+\beta X+\gamma)^i}$ avec $\beta^2-4\gamma < 0$. On écrit

$$\frac{BX+C}{(X^2+\beta X+\gamma)^i} = \frac{B}{2} \frac{2X+\beta}{(X^2+\beta X+\gamma)^i} + \frac{C-\frac{\beta B}{2}}{(X^2+\beta X+\gamma)^i}$$

Le terme $\frac{BX+C}{(X^2+\beta X+\gamma)^i}$ s'intègre sans problème puisqu'il est de la forme $\frac{u'}{u^i}$. Il nous reste à comprendre comment intégrer le terme $\frac{1}{(X^2+\beta X+\gamma)^i}$. On écrit

$$\frac{1}{(X^2+\beta X+\gamma)^i} = \frac{1}{\left((X+\frac{\beta}{2})^2 + (\gamma - \frac{\beta^2}{4})\right)^i}.$$

Par un changement de variable, on se ramène à intégrer $\frac{1}{(X^2+1)^i}$ c'est à dire à calculer sa primitive $J_i(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^i}$. Montrons la relation

$$(2i-2)J_i = \frac{x}{(1+x^2)^{i-1}} + (2i-3)J_{i-1}$$

qui permet de calculer les J_i par récurrence puisque $J_1 = \arctan(x)$.

On fait une intégration par parties, on pose $f'(t) = 1$ et $g(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{i-1}}$ de sorte que $f(t) = t$ et $g'(t) = \frac{-2(i-1)t}{(1+t^2)^i}$. Les fonctions f et g sont bien de classe C^1 . Il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^{i-1}} &= \frac{x}{(1+x^2)^{i-1}} + \int_0^x \frac{2(i-1)t^2}{(1+t^2)^i} dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^{i-1}} + 2(i-1) \int_0^x \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^i} dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^{i-1}} + 2(i-1) \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{i-1}} dt - 2(i-1) \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^i} dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^{i-1}} + 2(i-1)J_{i-1} - 2(i-1)J_i. \square \end{aligned}$$

5.5 Formules de Taylor

Commençons par donner la formule de Taylor intégrale. Elle est intéressante car son reste est explicite.

Théorème 65 (Formule de Taylor intégrale) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^{n+1} sur I . On a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Démonstration. La formule de Taylor intégrale a déjà été vue en L1. Elle se démontre par récurrence en faisant une intégration par parties. $\square$

On en déduit :

Théorème 66 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^{n+1} sur I telle que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur I . On pose $M = \sup\{|f^{(n+1)}(t)|, t \in I\}$. On a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Démonstration. On utilise l'inégalité triangulaire puis la remarque 28. On a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \left| \int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!} M dt \right|$$

Pour montrer que $\left| \int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!} M dt \right| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M$, on distingue les cas $a \leq x$ et $x \leq a$ et on fait le calcul. $\square$

Remarque 32

Attention : En L1, vous avez vu le théorème des accroissements finis :

Théorème 67 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Le théorème des accroissements finis est faux pour une fonction à valeurs complexes. Par exemple $f(x) = e^{ix}$. On a $f(2\pi) = f(0)$ alors que f' ne s'annule jamais.

Chapitre 6

Intégrales généralisées

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Généralités

Définition 56 1) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ localement intégrable. On dit que f est intégrable sur $[a, b[$ si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a une limite (finie réelle) lorsque x tend vers b . On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt.$$

$\int_a^b f(t)dt$ s'appelle intégrale généralisée de f sur $[a, b[$. Si $F(x)$ a une limite (finie réelle) lorsque x tend vers b , on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge. Dans le cas contraire, on dit qu'elle diverge.

2) Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ localement intégrable. On dit que f est intégrable sur $]a, b]$ si $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ a une limite (finie réelle) lorsque x tend vers a . On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t)dt.$$

$\int_a^b f(t)dt$ s'appelle intégrale généralisée de f sur $]a, b]$. Si $F(x)$ a une limite (finie réelle) lorsque x tend vers a , on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge. Dans le cas contraire, on dit qu'elle diverge.

Remarque 33 Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction localement intégrable et soit $c \in [a, b[$. La fonction f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si elle est intégrable sur $[c, b[$ et on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Démonstration. On a par la relation de Chasles :

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt.$$

$\int_a^x f(t)dt$ a une limite lorsque x tend vers b si et s'il en est de même de $\int_c^x f(t)dt$. On obtient la relation souhaitée par passage à la limite. $\square$

Exemple 28 $\int_x^1 \text{Ln}(t)dt = -x\text{Ln}(x) + x - 1$ Donc $\int_0^1 \text{Ln}(t)dt$ est convergente et vaut -1 .

Théorème 68 (*Intégrales de Riemann*)

1) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. 1) On calcule l'intégrale de $\frac{1}{t^\alpha}$ sur $[1, x]$:

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) \text{ si } \alpha \neq 1,$$

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x \text{ si } \alpha = 1.$$

Ces fonctions n'ont de limite quand $x \rightarrow +\infty$ que si $\alpha > 1$.

2) De la même façon, on calcule l'intégrale de $\frac{1}{(t-a)^\alpha}$ sur $]x, b]$, avec $a < x < b$:

$$\int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}} \right) \text{ si } \alpha \neq 1,$$

$$\int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt = \ln(b-a) - \ln(x-a) \text{ si } \alpha = 1.$$

Ces fonctions n'ont de limite quand $x \rightarrow a$ que si $\alpha < 1$. $\square$

Proposition 18 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. Si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_x^b f(t)dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers b .

On a une assertion analogue si f est intégrable sur $]a, b]$.

Démonstration. D'après la remarque 33, pour $x \in [a, b[$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt.$$

Lorsque x tend vers b , $\int_a^x f(t)dt$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$ puisque $\int_a^b f(t)dt$ converge. On en déduit que $\int_x^b f(t)dt$ tend vers 0. $\square$

Les intégrales généralisées sont plus générales que les intégrales de Riemann :

Proposition 19 Soient a et b deux réels. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ($a < b$) une fonction intégrable. Alors f est intégrable sur $[a, b[$, sur $]a, b]$. De plus,

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{]a,b]} f(t)dt = \int_{[a,b[} f(t)dt.$$

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

est continue sur $[a, b]$. Donc $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. $\square$

Proposition 20 Soient f et g deux fonctions localement intégrables définies sur $[a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$. Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$, alors $\lambda f + g$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

La même assertion est vraie si $]a, b]$.

Proposition 21 Une fonction $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)(t)dt.$$

On a le même résultat sur $]a, b]$.

Démonstration. Ce résultat s'obtient par passage à la limite dans la relation

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \operatorname{Re}(f)(t)dt + i \int_a^x \operatorname{Im}(f)(t)dt. \square$$

Définition 57 Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable sur $]a, b[$. On dit que f est intégrable sur $]a, b[$ si, étant donné $c \in]a, b[$, f est intégrable sur $]a, c]$ et sur $[c, b[$. On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Cette définition ne dépend pas du point c choisi.

Pour montrer la convergence d'une intégrale, on peut utiliser le critère de Cauchy.

Théorème 69 Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ localement intégrable. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(b), \quad x, x' \in V \implies \left| \int_x^{x'} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

On a une assertion analogue si f est localement intégrable sur $]a, b]$.

Démonstration. C'est le critère de Cauchy (théorème 10) appliqué à la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. $\square$

Théorème 70 Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$. Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Démonstration. Cela découle du critère de Cauchy et de l'inégalité $\left| \int_x^{x'} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x'} |f(t)|dt \right|$. $\square$

Définition 58 Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente. Si $\int_a^b f(t)dt$ est convergente alors que $\int_a^b |f(t)|dt$ ne l'est pas, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente.

Donnons maintenant un exemple d'intégrale semi-convergente.

Exemple 29 La fonction $g(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ est intégrable et non absolument intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[1, +\infty[$.

On fixe $x \in [1, +\infty[$ et on intègre par parties :

$$\int_1^x g(t) dt = \left[\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right]_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt.$$

La fonction $\left[\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right]_1^x = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \sin 1$ admet pour limite $-\sin 1$ en $+\infty$ et l'intégrale

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt$$

est absolument convergente en $+\infty$ par comparaison avec une intégrale de Riemann. On en déduit bien que la fonction g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour voir que g n'est pas absolument intégrable sur cet intervalle, on écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |g(t)| dt \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \int_0^\pi |\cos t| dt.$$

En sommant sur n , comme la série $\frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}$ est divergente, on voit que g n'est pas absolument intégrable sur $[\pi, +\infty[$ et donc pas non plus sur $[1, +\infty[$.

Contrairement au cas des séries numériques dont le terme général tend vers 0 lorsqu'elles convergent, l'intégrabilité d'une fonction sur $[a, +\infty[$ n'implique pas la convergence vers 0 de cette fonction lorsque $t \rightarrow +\infty$:

Exemple 30 La fonction $\cos t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et ne tend pas vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Soit $x \in [1, +\infty[$, alors, par un changement de variables et une intégration par parties, on peut écrire :

$$\int_1^x \cos t^2 dt = \int_1^{x^2} \frac{\cos s}{2\sqrt{s}} ds = \left[\frac{\sin s}{2\sqrt{s}} \right]_1^{x^2} + \frac{1}{4} \int_1^{x^2} \frac{\sin s}{s\sqrt{s}} ds.$$

Le terme tout intégré tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin s}{s\sqrt{s}} ds$ existe puisqu'elle est absolument convergente. On en déduit bien que la fonction $\cos t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors qu'elle ne tend pas vers 0 à l'infini.

Remarque 34 On n'énoncera pas de théorème d'intégration par parties ou de changement de variables dans le cas des intégrales généralisées. On fait l'opération sur les intégrales de Riemann et on fait tendre x vers b ou a selon le cas comme on a procédé dans les exemples précédents.

6.2 Intégrales généralisées de fonctions positives

L'absolue convergence impliquant la convergence, l'étude des intégrales généralisées de fonctions positives est particulièrement importante. Dans ce cas, on pourra utiliser des techniques de comparaison.

Théorème 71 Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable sur $[a, b[$ et positive au voisinage de b . L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si la fonction $\int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Démonstration. Si f est positive sur $[c, b[$, la fonction $F : [c, b[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ est croissante. Elle admet une limite si et seulement si elle est majorée. $\square$

Remarque 35 En adaptant les hypothèses du théorème, on a un résultat analogue sur $]a, b]$.

Remarque 36 Si f est négative au voisinage de b , on étudiera l'intégrale généralisée $\int_a^b -f(t) dt$ qui est de même nature que $\int_a^b f(t) dt$.

Théorème 72 . Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrables sur $[a, b[$. on suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$, on a

- f et g sont positives sur $[c, b[$
- $f \leq g$ sur $[c, b[$.

Alors

- a) Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.
- b) Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, l'intégrale $\int_a^b g(t) dt$ est divergente.

Démonstration. Il suffit de montrer la première propriété, la seconde étant la contraposée de la première.

Posons :

$$\forall x \in [c, b[, F(x) = \int_c^x f(t) dt \text{ et } G(x) = \int_c^x g(t) dt.$$

Alors, d'après les propriétés de l'intégrale de Riemann, les fonctions F et G sont croissantes comme intégrales de fonctions positives et de plus,

$$\forall x \in [c, b[, F(x) \leq G(x).$$

Si g est intégrable sur $[a, b]$, elle l'est sur $[c, b]$. La fonction $G(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow b$, donc elle est majorée sur $[c, b]$. Par suite, la fonction $F(x)$ est également majorée sur $[c, b]$ et comme elle est croissante, elle admet une limite quand $x \rightarrow b$ et ceci équivaut à dire que f est intégrable sur $[c, b]$ et donc sur $[a, b]$. $\square$

Exemple 31 La fonction $f(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}$ est absolument intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[1, +\infty[$. En effet

$$|f(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale de $\frac{1}{t^2}$ existe sur $[1, +\infty[$ par la proposition 68 et le théorème 72. Donc f est bien absolument intégrable sur $[1, +\infty[$.

Proposition 22 Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrables sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que pour tout $x \in [c, b]$, on a

- f est positive sur $[c, b]$ et g est strictement positive sur $[c, b]$
- $f = O(g)$ au voisinage de b .

Alors

- a) Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.
- b) Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ est divergente.

Démonstration. Si $f = O(g)$, il existe $M \geq 0$ tel que $f \leq Mg$ sur un voisinage élémentaire de b . Le résultat découle alors du théorème 72. $\square$

Remarque 37 Le résultat s'applique en particulier si $f = o(g)$.

Théorème 73 Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrables sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que pour tout $x \in [c, b]$, on a

- g est strictement positive sur $[c, b]$
- $f \sim g$ au voisinage de b .

Alors f est strictement positive au voisinage de b . Les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Démonstration. Sous les hypothèses du théorème, la fonction f est strictement positive au voisinage de b . On a $f = O(g)$ et $g = O(f)$.

Exemple 32 La fonction $f(t) = \frac{\ln(\cos \frac{1}{t})}{\ln t}$ est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[2, +\infty[$.

Cette fonction est négative sur $[2, +\infty[$. On va donc raisonner avec la fonction $-f$.

On montre, en faisant un développement limité, que la fonction $-\ln(\cos \frac{1}{t})$ est équivalente à $\frac{1}{2t^2}$ en $+\infty$. La fonction $-f(t)$ est donc équivalente à $\frac{1}{2t^2 \ln t}$ en $+\infty$.

Or $0 \leq \frac{1}{2t^2 \ln t} \leq \frac{1}{t^2}$ sur $[2, +\infty[$ et cette dernière fonction est intégrable en $+\infty$.

En appliquant successivement les théorèmes 72 et 73, on obtient que $-f$ et par suite f également, est intégrable sur $[2, +\infty[$.

Chapitre 7

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $D \subset \mathbb{K}$ une partie de $\mathbb{K}$. On notera $\mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

7.1 Suites de fonctions

Définition 59 Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D dans $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{K})$

$$\begin{aligned}(f_n) : \mathbb{N} &\rightarrow \mathcal{F}(D, \mathbb{K}) \\ n &\mapsto f_n.\end{aligned}$$

Définition 60 (convergence simple) Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D dans $\mathbb{K}$ converge simplement vers la fonction $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ si, pour tout $t \in D$, la suite numérique $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(t)$.

Exemple 33

La suite de fonctions continues définie pour tout $t \in [0, 1]$ par

$$f_n(t) = t^n,$$

converge simplement vers la fonction discontinue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ égale à 0 sur $[0, 1[$ et telle que $f(1)=1$.

Exemple 34

La suite de fonctions dérivables définie pour $n \geq 1$ et pour $t \in [0, \pi/2]$ par

$$f_n(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{n}},$$

converge simplement vers la fonction 0.

En revanche, la suites des dérivées

$$f'_n(t) = \frac{n \cos nt}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cos nt,$$

ne converge pas vers 0 qui est pourtant la dérivée de la limite des $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 35

La suite de fonctions définie par $f_n(t) = nt(1-t^2)^n$ pour tout $t \in [0, 1]$ converge simplement vers la fonction nulle. Par contre,

$$\int_0^1 f_n(t) dt = n \int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \frac{n}{2n+2}.$$

Cette suite converge vers $1/2$ qui n'est pas égal à l'intégrale de la limite des $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.

La convergence simple ne préserve pas les propriétés des f_n . On introduit donc une notion de convergence plus forte.

Notation : Si $f : D \rightarrow \mathbb{K}$, on pose $\|f\|_{\infty, D} = \sup_{x \in D} |f(x)| \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Cet élément s'appelle la norme infinie de f .

Définition 61 (convergence uniforme) Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D dans $\mathbb{K}$ converge uniformément vers la fonction $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ si la suite $(\|f_n - f\|_{\infty, D})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies (\forall t \in D, |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon)$$

Remarque 38 Si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , alors elle converge simplement vers f .

Démonstration. Cela découle de l'inégalité, pour $t_0 \in D$:

$$|f_n(t_0) - f(t_0)| \leq \sup_{t \in D} |f_n(t) - f(t)|.$$

Si $\sup_{t \in D} |f_n(t) - f(t)|$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, alors, pour t_0 fixé dans D , $f_n(t_0) - f(t_0)$ tend vers 0. $\square$

La réciproque est fausse comme le montre le contreexemple suivant. La suite de fonctions de l'exemple 33, $f_n(t) = t^n$ pour $t \in [0, 1]$ converge simplement vers la fonction f telle que $f(t) = 0$ si $t \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.

Or $\sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |t^n| = 1$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ donc cette suite ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Remarque 39 Si $D' \subset D$, on a les inégalités $0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, D'} \leq \|f_n - f\|_{\infty, D}$. Ainsi, si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D , elle converge uniformément vers f sur D' . **La réciproque est fausse**

Théorème 74 La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D dans $\mathbb{K}$ converge uniformément sur D si et seulement si elle est de Cauchy uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq n_0 \implies \|f_p - f_q\|_{\infty, D} \leq \varepsilon$$

Démonstration. i) Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D . Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \implies \forall t \in D, |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

D'où

$$p, q \geq N \implies \forall t \in D, |f_p(t) - f_q(t)| \leq |f_p(t) - f(t)| + |f_q(t) - f(t)| \leq 2\varepsilon.$$

On a donc bien le critère de Cauchy uniforme.

Réciproquement, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N \Rightarrow \forall t \in D, |f_p(t) - f_q(t)| \leq \varepsilon,$$

pour $t \in D$ fixé, la suite de nombres $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, donc converge vers un nombre $f(t)$. Dans le critère de Cauchy, on peut alors faire tendre q vers $+\infty$ et on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p \geq N \Rightarrow \forall t \in D, |f_p(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Théorème 75 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Soit $t_0 \in D$. On suppose

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en t_0 ,
 - (ii) la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$
- alors f est continue en a .

Démonstration. Puisque la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \forall t \in D, |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\varepsilon > 0$ étant fixé, la continuité de la fonction f_N en t_0 nous permet d'écrire :

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } |t - t_0| \leq \eta \Rightarrow |f_N(t) - f_N(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout $t \in D$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &= |f(t) - f_N(t) + f_N(t) - f_N(t_0) + f_N(t_0) - f(t_0)| \\ &\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)|. \end{aligned}$$

Donc si $|t - t_0| \leq \eta$, on a

$$|f(t) - f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité de f en t_0 . $\square$

Corollaire 76 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un domaine D et qui converge uniformément vers une fonction f sur D . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D , f est aussi continue sur D .

Théorème 77 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ ($a \leq b$) dans $\mathbb{K}$. On suppose

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[a, b]$
 - (ii) la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$
- alors f est continue donc intégrable sur $[a, b]$. De plus, la suite numérique $\left(\int_a^b f_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(t) dt$.

Démonstration. En utilisant les propriétés des intégrales, on a la suite d'inégalités suivantes

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq (b-a) \|f_n - f\|_{\infty, [a,b]}$$

Le théorème en découle.

Remarque 40

Le théorème 77 est faux sur un intervalle de longueur infini. Considérons par exemple la suite de fonctions $\left(\frac{e^{-nt}}{n}\right)_{n \geq 1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Elle converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ car $\left\|\frac{e^{-nt}}{n}\right\|_{\mathbb{R}_+, \infty} = \frac{1}{n}$. Pourtant la suite $\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n} dt\right)$ est constante égale à 1 et ne converge donc pas vers 0.

Théorème 78 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . On suppose

- (i) il existe $a \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- (ii) la suite de fonctions (f'_n) converge uniformément vers une fonction g sur I

Alors

- la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f dérivable sur I et telle que $f' = g$.
- La suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans I .

En fait la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. : Comme les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, les f'_n sont continues. La suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g , la fonction g est continue, donc intégrable. On pose $l_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a)$ et on définit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ comme suit

$$\forall x \in I, \quad f(x) = l_a + \int_a^x g(t) dt.$$

Comme g est continue, f est de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction f_n étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt.$$

On a $f_n(x) - f(x) = f_n(a) - l_a + \int_a^x (f'_n(t) - g(t)) dt$. En utilisant les propriétés de l'intégrale de Riemann (en particulier la remarque 28), on en déduit la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(a) - f(a)| + \left| \int_a^x |f'_n(t) - g(t)| dt \right| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + \left| \int_a^x \|f'_n - g\|_{\infty, D} dt \right| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + |x - a| \times \|f'_n - g\|_{\infty, D} \end{aligned}$$

On voit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

L'ensemble

$$\{|x - a| \mid x \in [\alpha, \beta]\}$$

est borné. On notera M une borne de cet ensemble.

$$\|f - f_n\|_{\infty, [\alpha, \beta]} \leq |f_n(a) - f(a)| + M \|f'_n - g\|_{\infty, D}$$

On en déduit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[\alpha, \beta]$.

Remarque 41 *Le théorème 78 reste vrai si les f'_n sont seulement dérivables (la fonction f est alors seulement dérivable) mais sa démonstration est plus compliquée (voir [1]).*

Remarquons que la convergence uniforme de la suite de fonctions ne suffit pas à assurer la dérivabilité de la limite :

Exemple 36 *La suite de fonctions dérivables $f_n(t) = (t^2 + \frac{1}{n^2})^{1/2}$, $n > 1$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $|t|$, qui n'est pas dérivable en 0.*

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$|t| \leq (t^2 + \frac{1}{n^2})^{1/2} \leq |t| + \frac{1}{n}.$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f_n(t) - |t|| \leq \frac{1}{n}.$$

Cette inégalité implique la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction $|t|$.

D'après le théorème 78, la suite des dérivées ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

7.2 Séries de fonctions

Définition 62 Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{K}$. La série de fonctions de terme général U_n (notée $\sum_{n \geq 0} U_n$ ou plus simplement $\sum U_n$) est la suite de fonctions des sommes partielles $\left(s_n = \sum_{k=0}^n U_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 63 (convergence simple) On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge simplement sur D et a pour somme $s : D \rightarrow \mathbb{K}$ si, pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge et a pour somme $s(x)$. La fonction s est notée $s = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.

Remarque 42 la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n$ converge simplement sur D si la suite de ses sommes partielles $\left(s_n = \sum_{k=0}^n U_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur D .

Exemple 37

(i) La série de fonctions continues définie pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, de terme général

$$u_n(t) = \sin^2 t \cos^n t,$$

converge simplement et a pour somme la fonction s , discontinue en 0, telle que :

$$\begin{cases} s(t) = \frac{\sin^2 t}{1 - \cos t} & \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ s(0) = 0. \end{cases}$$

(ii) La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} z^n$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ converge simplement sur $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Sa somme (définie sur $D(0, 1)$) est la fonction $\frac{1}{1-z}$.

(iii) Considérons la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\text{Ln}(x+n)}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Par le critère des séries alternées, elle converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Les notions introduites sur les suites de fonctions s'appliquent à la suite des sommes partielles d'une série de fonctions.

Définition 64 (convergence uniforme) On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n$ de terme général $U_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ converge uniformément sur D si la suite de fonctions de ses sommes partielles converge uniformément sur D .

Proposition 23 La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n$ de terme général $U_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ converge uniformément sur D si et seulement si

(i) La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n$ de terme général $U_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ converge simplement sur D
et

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, D} = 0$ où, pour tout $x \in D$, $R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} U_p(x)$ est le reste de la série numérique $\sum U_n(x)$.

Démonstration. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n$ de terme général $U_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ converge

simplement sur D vers $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$. Par ailleurs, notons s_n la somme partielle de $\sum U_n$. On a

$$\forall x \in D, \quad s_n(x) = \sum_{p=0}^n U_p(x) \quad \text{et} \quad (s - s_n)(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} U_p(x). \square$$

Exemple 38 Reprenons l'exemple de la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\text{Ln}(x+n)}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons vu qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la série numérique $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\text{Ln}(x+n)}$ étant alternée, son reste d'ordre n est majoré en valeur absolue par $\frac{1}{\text{Ln}(x+n+1)}$. On a donc $\|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{\text{Ln}(n+1)}$. La série de fonctions $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\text{Ln}(x+n)}$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 79 (*Critère de Cauchy uniforme*) La série de fonctions $\sum U_n$ définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge uniformément si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \quad \text{et} \quad r \in \mathbb{N} \implies \|U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+r}\|_{\infty, D} < \varepsilon.$$

Démonstration. c'est une conséquence directe du critère de Cauchy uniforme appliqué à la suite de fonctions des sommes partielles. $\square$

La convergence uniforme n'est pas facile à vérifier sur les séries de fonctions car on n'a pas toujours une majoration de $\|R_n\|_{\infty, D}$, la norme infinie du reste d'ordre n . On a souvent recours à la notion de convergence normale.

Définition 65 Soit $\sum U_n$ la série de terme général $U_n : D \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que la série de fonctions $\sum U_n$ converge normalement sur D si la série numérique $\sum \|U_n\|_{\infty, D}$ converge.

Théorème 80 Soit $\sum U_n$ la série de terme général $U_n : D \rightarrow \mathbb{K}$. Si la série de fonctions $\sum U_n$ converge normalement sur D , alors elle converge uniformément sur D .

Démonstration. On peut écrire :

$$\sup_{t \in D} \left| \sum_{i=q+1}^p u_i(t) \right| \leq \sum_{i=q+1}^p \sup_{t \in D} |u_i(t)|.$$

Si la série numérique de terme général $\sup_{t \in D} |u_n(t)|$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy et l'inégalité ci-dessus prouve que la série de terme général u_n vérifie le critère de Cauchy uniforme. Donc elle converge uniformément sur D . $\square$

Remarque 43 La réciproque de cette propriété est fausse : la série de fonctions de terme général $u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n+t}$, $n > 1$, est uniformément convergente mais non normalement convergente sur $[0, 1]$.

En effet, cette série de fonctions n'est pas normalement convergente car

$$\|u_n\|_{\infty, [0,1]} = \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{(-1)^n}{n+t} \right| = \frac{1}{n},$$

et cette série numérique est divergente. Elle est uniformément convergente car son reste d'ordre n en x vérifie l'inégalité $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$.

Les résultats vus sur les suites de fonctions s'appliquent aux séries de fonctions. Ils sont d'autant plus intéressants qu'ils permettent d'obtenir des informations sur la somme d'une série de fonctions (qu'on ne sait presque jamais calculer).

Théorème 81 Soit $\sum U_n$ la série de terme général $U_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in D$. On suppose

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction U_n est continue en a ,
- (ii) la série de fonctions $\sum U_n$ converge uniformément vers $s = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$

alors s est continue en a .

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 75 appliqué à la suite de fonctions des sommes partielles. $\square$

Théorème 82 Soit $\sum U_n$ la série de fonctions de terme général $U_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose

- (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction U_n est continue sur $[a, b]$
- (ii) la série de fonctions $\sum U_n$ converge uniformément vers $s = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \in \mathcal{F}([a, b], K)$

alors s est continue donc intégrable sur $[a, b]$. De plus, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b U_n(t) dt \right) = \int_a^b s(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(t) \right) dt. \square$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 77 appliqué à la suite de fonctions des sommes partielles. $\square$

Exemple 39

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(t) = (-1)t^{2n}$. elle converge simplement sur $] -1, 1[$ et normalement sur $[-r, r]$ pour $r \in [0, 1[$. D'après le théorème précédent, on a donc, pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^i t^{2i} dt = \int_0^x \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i t^{2i} dt = \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan(x).$$

Théorème 83 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\sum U_n$ la série de terme général $U_n : I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose

- (i) pour tout n , la fonction U_n est de classe C^1 sur I
- (ii) il existe $a \in I$ tel que la série numérique $\sum U_n(a)$ converge.
- (iii) la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément vers une fonction

$$g = \sum_{n=0}^{+\infty} U'_n \text{ sur } I$$

Alors

- la série de fonctions $\sum U_n$ converge simplement vers une fonction $s = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ dérivable sur I et telle que $s' = g$.
- La série $\sum U_n$ converge uniformément vers s sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans I .

On a donc

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} U'_n.$$

En fait la fonction s est de classe C^1 .

Démonstration. : C'est une conséquence du théorème 78.

Exemple 40 Soit $0 < r < 1$ et $I = [-r, +r]$. On considère la série de fonctions définies sur I , de terme général $u_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

La série numérique de terme général $u_n(0)$ converge (c'est la série nulle !) et la série des dérivées de terme général t^n converge normalement donc uniformément sur I .

La somme $s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$ est donc dérivable et sa dérivée vaut :

$$s'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

Comme $s(0) = 0$, on en déduit que $s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-t)$.

Chapitre 8

Séries trigonométriques

Ce chapitre a été rédigé par Sylvie Delabrière.

8.1 Définitions et convergence

Les séries trigonométriques sont des séries de fonctions d'une variable réelle t , d'une forme particulière.

Définition 66 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de scalaires, réels ou complexes. Une série trigonométrique est une série de fonctions de terme général :

$$u_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Puisque $\sin 0 = 0$, on peut supposer que $b_0 = 0$.

En utilisant les fonctions e^{int} et e^{-int} , on a une autre représentation de ces séries :

Proposition 24 Le terme général d'une série trigonométrique s'écrit :

$$u_0(t) = c_0 \text{ et } \forall n > 1, u_n(t) = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int},$$

où

$$c_0 = a_0 \text{ et } \forall n > 1, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Démonstration. On écrit $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$ et $e^{-int} = \cos nt - i \sin nt$. D'où en remplaçant : $c_n + c_{-n} = a_n$ et $c_n - c_{-n} = -ib_n$.

Nous utiliserons plutôt l'écriture exponentielle qui donne des calculs plus simples.

Notations : Nous conviendrons de noter

$$(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}),$$

une série trigonométrique définie par son terme général :

$$u_0(t) = c_0 \text{ et } \forall n > 1, u_n(t) = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}.$$

Il faut remarquer que l'entier $n = 0$ ne joue pas le même rôle que les autres entiers.

Dans les chapitres précédents, nous avons déjà rencontré des cas de convergence des séries trigonométriques :

Proposition 25 1) Si les séries numériques de terme général c_n et c_{-n} sont absolument convergentes, la série trigonométrique de terme général $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

2) Si les suites $(c_n)_{n>1}$ et $(c_{-n})_{n>1}$ sont positives décroissantes et si elles convergent vers 0, la série trigonométrique de terme général $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \alpha < \pi$.

Démonstration. 1) Si les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} sont absolument convergentes, on écrit :

$$\forall n > 1, \forall t \in \mathbb{R}, |u_n(t)| \leq |c_n| + |c_{-n}|.$$

La série de terme général u_n est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

2) On va utiliser la transformation d'Abel (théorème 33) :

On commence par majorer pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes

$$A_n(t) = \sum_{j=0}^n e^{ijt} \text{ et } A_n(-t) = \sum_{j=0}^n e^{-ijt},$$

sur l'intervalle $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \alpha < \pi$ sont fixés :

$$A_n(t) = \sum_{j=0}^n e^{ijt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t} \sin((n+1)\frac{t}{2})}{e^{i\frac{t}{2}} \sin\frac{t}{2}}.$$

On en déduit que pour $t \in [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$,

$$|A_n(t)| \leq \frac{1}{|\sin\frac{t}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}.$$

De la même façon, on obtient aussi : $\forall t \in [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$,

$$|A_n(-t)| \leq \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}.$$

On vérifie le critère de Cauchy uniforme (théorème 79) pour la suite des sommes partielles $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la série de terme général u_n , en écrivant : pour tout $t \in [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$,

$$\begin{aligned} s_q(t) - s_{p-1}(t) &= \sum_{n=p}^q u_n(t) = \sum_{n=p}^q (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) \\ &= \sum_{n=p}^q [(A_n - A_{n-1})(t) c_n + (A_n - A_{n-1})(-t) c_{-n}] \\ &= \sum_{n=p}^q [A_n(t) c_n + A_n(-t) c_{-n}] - \sum_{n=p}^q [A_{n-1}(t) c_n + A_{n-1}(-t) c_{-n}] \quad (8.1) \\ &= A_q(t) c_q + A_q(-t) c_{-q} - A_{p-1}(t) c_p - A_{p-1}(-t) c_{-p} \\ &\quad + \sum_{n=p}^{q-1} [A_n(t) (c_n - c_{n+1})] + \sum_{n=p}^{q-1} [A_n(-t) (c_{-n} - c_{-(n+1)})]. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^q u_n(t) \right| &\leq |A_q(t)| c_q + |A_{p-1}(t)| c_p + \sum_{n=p}^{q-1} |A_n(t)| (c_n - c_{n+1}) \\ &\quad + |A_q(-t)| c_{-q} + |A_{p-1}(-t)| c_{-p} + \sum_{n=p}^{q-1} |A_n(-t)| (c_{-n} - c_{-(n+1)}). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Donc pour tout $t \in [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^q u_n(t) \right| &\leq \frac{1}{|\sin \frac{\alpha}{2}|} [(c_p + c_q) + (c_{-p} + c_{-q}) + (c_p - c_q) + (c_{-p} - c_{-q})] \\ &= \frac{2(c_p + c_{-p})}{|\sin \frac{\alpha}{2}|}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Ce dernier terme tend vers 0 par hypothèse. La suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est uniformément de Cauchy sur l'intervalle $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ et donc convergente, ce qui veut bien dire que la série de terme général u_n converge uniformément sur cet intervalle.

Les résultats de la proposition 25 ont des analogues pour la représentation des séries trigonométriques avec les fonctions $\cos nt$ et $\sin nt$:

Proposition 26 (i) Si les séries numériques de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes, la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si les suites $(a_n)_{n>1}$ et $(b_n)_{n>1}$ sont positives décroissantes et si elles convergent vers 0, la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \alpha < \pi$.

Exemple 41 (i) Les séries de termes généraux $\frac{\sin nt}{n^2}$ et $\frac{\cos nt}{n^2}$ sont uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.

(ii) La série de terme général $\frac{\cos nt}{n}$ converge uniformément sur tous les intervalles de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, $0 < \alpha < \pi$. Elle converge donc simplement sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. On vérifie aisément qu'elle ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier, voir par exemple en $t = 0$.

(iii) La série de terme général $\frac{\sin nt}{n}$ converge uniformément sur tous les intervalles de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, $0 < \alpha < \pi$. Elle converge donc simplement sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. On vérifie aisément qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

8.2 Continuité, dérivation et intégration de la somme

Théorème 84 (i) Si les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} sont absolument convergentes, la somme de la série trigonométrique de terme général

$$(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si les suites numériques $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives décroissantes et si elles convergent vers 0, la somme de la série trigonométrique de terme général

$$(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$$

est continue sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 25 et du théorème 81. $\square$

Théorème 85 Si les séries numériques de termes généraux nc_n et nc_{-n} sont absolument convergentes, la somme de la série trigonométrique de terme général

$$(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la somme de la série de terme général

$$(inc_n e^{int} - inc_{-n} e^{-int}).$$

Démonstration. Par le théorème 21, l'hypothèse entraîne en particulier que les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} sont absolument convergentes. Les séries trigonométriques de termes généraux $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$ et $(nc_n e^{int} + nc_{-n} e^{-int})$ sont donc toutes les deux normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ et on peut appliquer le théorème 83. $\square$

Théorème 86 Si les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique de terme général

$$\left[\int_0^t (c_n e^{ins} + c_{-n} e^{-ins}) ds \right]$$

est convergente sur $\mathbb{R}$ et a pour somme

$$\int_0^t \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (c_n e^{ins} + c_{-n} e^{-ins}) \right] ds.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 82, puisque, sous cette hypothèse, la série trigonométrique de terme général $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. $\square$

On a bien entendu des résultats analogues pour la représentation des séries trigonométriques avec les fonctions $\cos nt$ et $\sin nt$:

Théorème 87 (i) Si les séries numériques de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes, la somme de la série trigonométrique de terme général

$$(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si les suites numériques $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives décroissantes et si elles convergent vers 0, la somme de la série trigonométrique de terme général

$$(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

est continue sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 88 Si les séries numériques de termes généraux na_n et nb_n sont absolument convergentes, la somme de la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la somme de la série de terme général $(-na_n \sin nt + nb_n \cos nt)$.

Théorème 89 Si les séries numériques de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes, alors la série de terme général

$$\left[\int_0^t (a_n \cos ns + b_n \sin ns) ds \right]$$

est convergente sur $\mathbb{R}$ et a pour somme

$$\int_0^t \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos ns + b_n \sin ns) \right] ds.$$

8.3 Développement en séries trigonométriques

Poser le problème du développement d'une fonction f donnée en série trigonométrique, c'est étudier l'existence d'une série trigonométrique dont f est la somme. Ce problème est difficile et nous n'étudierons ici que des solutions très partielles.

Étudions d'abord la somme d'une série trigonométrique normalement convergente :

Proposition 27 Supposons les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} absolument convergentes et soit s la somme de la série trigonométrique de terme général $(c_n e^{ins} + c_{-n} e^{-ins})$. Alors :

(i) La fonction $t \rightarrow s(t)$ est périodique de période 2π .

(ii) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $2\pi c_k = \int_0^{2\pi} s(t) e^{-ikt} dt$.

Démonstration. La propriété i) est évidente.

Pour démontrer la propriété ii), on commence par calculer, pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} p+q \neq 0, \quad \int_0^{2\pi} e^{ipt} e^{iqt} dt &= \left[\frac{e^{i(p+q)t}}{p+q} \right]_0^{2\pi} = 0 \\ p+q = 0, \quad \int_0^{2\pi} e^{ipt} e^{iqt} dt &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned} \quad (8.4)$$

On multiplie alors le terme général de la série trigonométrique par e^{int} ou e^{-int} , $n \in \mathbb{N}$ et en vertu du théorème 86, on peut l'intégrer terme à terme. Le calcul précédent donne le résultat immédiatement. $\square$

Corollaire 90 Supposons les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} absolument convergentes et soit s la somme de la série trigonométrique de terme général $(c_n e^{ins} + c_{-n} e^{-ins})$.

Si la fonction $t \rightarrow s(t)$ est paire sur $\mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{-n} = c_n$.

Si cette fonction est impaire sur $\mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{-n} = -c_n$.

Montrons les propriétés analogues pour la représentation des séries trigonométriques à l'aide des fonctions cos et sin :

Proposition 28 Supposons les séries numériques de termes généraux a_n et b_n absolument convergentes et soit s la somme de la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$. Alors :

- (i) La fonction $t \rightarrow s(t)$ est périodique de période 2π .
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi a_n = \int_0^{2\pi} s(t) \cos nt \, dt$ et $\pi b_n = \int_0^{2\pi} s(t) \sin nt \, dt$.
- (iii) $2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} s(t) \, dt$.

Démonstration. La propriété i) est évidente.

La propriété ii) est une conséquence du calcul suivant :

Nous avons vu que, pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(p+q)t} \, dt = 2\pi \delta_{p,-q}$$

Rappelons que $\delta_{p,-q} = 0$ si $p+q \neq 0$ et $= 1$ si $p+q = 0$.

Supposons maintenant que n et m sont deux entiers naturels non nuls et écrivons cette égalité pour les couples (n, m) et $(n, -m)$:

$$\int_0^{2\pi} [(\cos nt \cos mt - \sin nt \sin mt) + i(\sin nt \cos mt + \cos nt \sin mt)] \, dt = 2\pi \delta_{n,-m} = 0,$$

car $m+n \neq 0$.

$$\int_0^{2\pi} [(\cos nt \cos mt + \sin nt \sin mt) + i(\sin nt \cos mt - \cos nt \sin mt)] \, dt = 2\pi \delta_{n,m},$$

et cette expression vaut 0 dès que $n \neq m$.

En séparant les parties imaginaires et les parties réelles puis en faisant successivement des sommes et des différences, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos nt \cos mt \, dt &= \int_0^{2\pi} \sin nt \sin mt \, dt = 0 \text{ si } n \neq m, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 nt \, dt &= \int_0^{2\pi} \sin^2 nt \, dt = \pi, \\ \int_0^{2\pi} \cos nt \sin mt \, dt &= 0 \text{ pour tout } n, m \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{8.5}$$

On multiplie alors le terme général de la série trigonométrique par $\cos nt$ ou $\sin nt$ et en vertu du théorème 86, on peut l'intégrer terme à terme. Le calcul précédent donne le résultat immédiatement.

La propriété iii) est immédiate en intégrant terme à terme de 0 à 2π la série trigonométrique de somme s , ce que l'on a le droit de faire d'après le théorème 86. $\square$

Corollaire 91 Supposons les séries numériques de termes généraux a_n et b_n absolument convergentes et soit s la somme de la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$.

Si la fonction $t \rightarrow s(t)$ est paire sur $\mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$

Si cette fonction est impaire sur $\mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Démonstration. Supposons par exemple s paire.

Dans ce cas, la fonction $t \rightarrow s(t)\sin nt$ est impaire pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par périodicité, on peut écrire :

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} s(t)\sin nt \, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} s(t)\sin nt \, dt = 0.$$

La démonstration est analogue pour le cas impair. $\square$

Nous pouvons maintenant définir la série de Fourier d'une fonction périodique :

Définition 67 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π , intégrable sur $[0, 2\pi]$. On appelle série de Fourier de f et on note $SF(f)$ la série trigonométrique de terme général

$$(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}),$$

respectivement :

$$(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

où les coefficients, appelés coefficients de Fourier de f sont donnés par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, 2\pi c_n = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt,$$

respectivement :

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt, \pi b_n = \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt, 2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(t) \, dt.$$

En utilisant les calculs précédents, on obtient immédiatement :

Proposition 29 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π , intégrable sur $[0, 2\pi]$ et $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ sa série de Fourier.

Si la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ et $c_{-n} = c_n$.

Si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et $c_{-n} = -c_n$.

On peut établir un dictionnaire entre "fonctions 2π -périodiques" et coefficients de Fourier. Donnons par exemple la proposition suivante.

Proposition 30 Dans cette proposition les coefficients de Fourier d'une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localement intégrable et 2π -périodiques sont notés $c_n(g)$.

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ périodique, de classe C^1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c_n(f') = inc_n(f)$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Soit $a \in \mathbb{R}$: on définit la translatée de f par a

$$\begin{aligned} \tau_a(f) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(a+x) \end{aligned}$$

On a, pour tout entier n , $c_n(\tau_a(f)) = e^{ia} c_n(f)$.

Démonstration. Pour démontrer 1), on fait une intégration par parties. Pour démontrer 2), on fait un changement de variables. $\square$.

Nous allons étudier un cas de convergence des séries de Fourier. Donnons d'abord une notation :

Notation Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

Si la limite de $f(t)$ existe quand $t \rightarrow t_0$ par valeurs supérieures, on notera

$$f(t_0 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} f(t).$$

De même, si la limite de $f(t)$ existe quand $t \rightarrow t_0$ par valeurs inférieures, on notera

$$f(t_0 - 0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} f(t).$$

On a besoin d'un lemme :

Lemme 4 (lemme de Riemann-Lebesgue) Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$. On a :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos \lambda t dt = 0.$$

Démonstration. Supposons d'abord la fonction f en escalier, c'est-à-dire qu'il existe un découpage de l'intervalle $[a, b]$, tel que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ et f soit constante égale à α_j sur chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}[$. On peut alors écrire :

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} e^{i\lambda t} dt = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{e^{i\lambda a_{j+1}} - e^{i\lambda a_j}}{i\lambda}.$$

D'où

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \sum_{j=0}^k \frac{2|\alpha_j|}{|\lambda|}$$

Ce qui prouve bien que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

Si f est intégrable sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier φ et η sur $[a, b]$ telles que

$$\forall t \in [a, b], |f(t) - \varphi(t)| \leq \eta(t) \text{ et } \int_a^b \eta(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut alors écrire :

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt + \int_a^b [f(t) - \varphi(t)] e^{i\lambda t} dt.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| &\leq \left| \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| + \left| \int_a^b [f(t) - \varphi(t)] e^{i\lambda t} dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| + \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| dt \\ &\leq \left| \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Comme φ est en escalier, d'après la première partie de la démonstration, il existe $A > 0$ tel que si $\lambda \geq A$, alors

$$\left| \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que pour $\lambda \geq A$,

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

Les cas des fonctions $\sin \lambda t$ et $\cos \lambda t$ se traitent de la même façon.

Avant d'énoncer le théorème principal, on peut citer un corollaire de ce lemme :

Corollaire 92 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et intégrable sur $[0, 2\pi]$, alors les suites $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ [respectivement $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$] de ses coefficients de Fourier convergent vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Voici maintenant le théorème de Dirichlet :

Théorème 93 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π , intégrable sur $[0, 2\pi]$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

- (i) f admet une limite $f(t_0+)$ à droite de t_0 et une limite $f(t_0-)$ à gauche de t_0 .
 - (ii) Les limites $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0+0)}{h}$ et $\lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0-0)}{h}$ existent
- alors la série de Fourier de f converge au point t_0 et a pour somme

$$\frac{1}{2} [f(t_0+0) + f(t_0-0)].$$

En particulier si f est continue et dérivable en t_0 alors la série de Fourier de f converge au point t_0 et a pour somme $f(t_0)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n(t_0) = c_0 + \sum_{j=1}^n [c_j e^{ij t_0} + c_{-j} e^{-ij t_0}] = \sum_{j=-n}^{+n} c_j e^{ij t_0},$$

où les coefficients c_j pour $j \in \mathbb{Z}$ sont les coefficients de Fourier de la fonction f . D'après la définition 67, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_n(t_0) &= \sum_{j=-n}^{+n} e^{ij t_0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ij t} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=-n}^{+n} e^{ij t_0} e^{-ij t} f(t) \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{j=-n}^{+n} e^{ij(t_0-t)} \right] f(t) dt \quad (8.7) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{2\pi-t_0} \left[\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} \right] f(t_0+u) du, \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable $u = t - t_0$.

Comme la fonction à intégrer est périodique de période 2π , cette intégrale est encore égale à :

$$S_n(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} \right] f(t_0 + u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} \right] f(t_0 + u) du.$$

Comme dans la proposition 67, on peut calculer la somme $\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju}$:

pour $u \in 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} = 2n + 1,$$

pour $u \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} &= e^{-inu} \sum_{k=0}^{2n} e^{iku} = e^{-inu} \frac{1 - e^{(2n+1)iu}}{1 - e^{iu}} \\ &= e^{-inu} \frac{e^{\frac{(2n+1)}{2}iu} e^{-\frac{(2n+1)}{2}iu} - e^{\frac{(2n+1)}{2}iu}}{e^{\frac{iu}{2}} - e^{-\frac{iu}{2}}} = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}u}{\sin \frac{u}{2}}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

On remarque que

$$2n + 1 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}u}{\sin \frac{u}{2}},$$

donc les deux expressions de cette somme coïncident en $u = 0$.

Si la fonction $u \rightarrow \frac{f(t_0 + u)}{\sin \frac{u}{2}}$ était intégrable, on pourrait appliquer le lemme 4 et cela nous permettrait de conclure que $S_n(t_0)$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En général, sous les hypothèses du théorème, ce n'est pas le cas et nous devons considérer la fonction

$$u \rightarrow \frac{f(t_0 + u) - f(t_0 + 0)}{\sin \frac{u}{2}} = \frac{f(t_0 + u) - f(t_0 + 0)}{u} \frac{u}{\sin \frac{u}{2}},$$

qui elle, est continue en 0 par hypothèse et donc aussi intégrable sur $[0, \pi]$.

En appliquant le lemme 4, on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{f(t_0 + u) - f(t_0 + 0)}{\sin \frac{u}{2}} \sin \frac{2n+1}{2}u du = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{f(t_0 + 0)}{\sin \frac{u}{2}} \sin \frac{2n+1}{2}u du &= \int_0^\pi f(t_0 + 0) \left(\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} \right) du \\ &= f(t_0 + 0) \int_0^\pi \left(\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} \right) du = \pi f(t_0 + 0). \end{aligned} \quad (8.9)$$

On en conclut donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{f(t_0 + u)}{\sin \frac{u}{2}} \sin \frac{2n+1}{2}u du = \pi f(t_0 + 0).$$

De la même façon, on montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^0 \frac{f(t_0 + u)}{\sin \frac{u}{2}} \sin \frac{2n+1}{2} u \, du = \pi f(t_0 - 0).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)] . \square$$

Exemple 42 (i) Soit f la fonction de période 2π sur $\mathbb{R}$ définie par :
 $f(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi[$, $f(t) = -1$ pour $t \in]-\pi, 0[$, $f(0) = f(\pi) = f(-\pi) = 0$.
 Alors

$$[SF(f)](t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}.$$

(ii) Soit g la fonction de période 2π sur $\mathbb{R}$ telle que $g(t) = |t|$ pour $|t| \leq \pi$.
 Alors,

$$[SF(g)](t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}.$$

(iii) Soit h la fonction de période 2π sur $\mathbb{R}$ telle que $h(t) = t^2$ pour $|t| \leq \pi$.
 Alors,

$$[SF(h)](t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}.$$

Ces trois fonctions vérifient les hypothèses du théorème de Dirichlet en tout point $t \in \mathbb{R}$ et dans les trois cas, on a $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)] = f(t), \quad \frac{1}{2} [g(t+0) + g(t-0)] = g(t), \quad \frac{1}{2} [h(t+0) + h(t-0)] = h(t).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= [SF(f)](t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}, \\ \forall t \in \mathbb{R}, g(t) &= [SF(g)](t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}, \\ \forall t \in \mathbb{R}, h(t) &= [SF(h)](t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Exemple 43 Dans les trois exemples précédents, on obtient des identités remarquables :

$$\begin{aligned} i) \forall t \in]-\pi, +\pi[, \operatorname{sgnt} &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}. \\ ii) \forall t \in [-\pi, +\pi], |t| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

D'où en prenant $t = 0$,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En utilisant le calcul suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\text{iii) } \forall t \in [-\pi, +\pi], \quad t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}.$$

D'où en prenant $t = 0$,

$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Remarque 44 Le théorème de Dirichlet donne des conditions suffisantes pour qu'une série de Fourier converge en un point t_0 . Il s'agit donc d'une convergence simple. Dans un deuxième temps, on peut se poser la question de la convergence uniforme de cette série : dans l'exemple 42, on voit que la série de Fourier de f ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ alors que celle de g converge uniformément. Il n'y a pas de théorème général, pour étudier la convergence uniforme d'une série de Fourier, il faut étudier ces séries au cas par cas.

Nous citons sans démonstration un résultat qui est très utile dans la pratique, le théorème de Parseval :

Théorème 94 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π , intégrable sur $[0, 2\pi]$.

Soit $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$, [respectivement $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$] la série de Fourier de f . Alors :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi \left[|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) \right] = 2\pi |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

A titre d'exercice, on peut vérifier le théorème de Parseval lorsque la fonction f est de la forme : $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n e^{nit} + c_{-n} e^{-nit})$. En effet, dans ce cas :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n e^{nit} + c_{-n} e^{-nit}) \right) \left(\overline{c_0} + \sum_{m=1}^N (\overline{c_m} e^{-mit} + \overline{c_{-m}} e^{mit}) \right) dt.$$

Comme $\int_{-\pi}^{+\pi} e^{int} e^{imt} dt = 0$ si $n+m \neq 0$ et $\int_{-\pi}^{+\pi} e^{int} e^{imt} dt = 2\pi$ si $n+m = 0$, seuls les produits correspondant aux termes $c_n \overline{c_n}$ et $c_{-n} \overline{c_{-n}}$ ont une intégrale non nulle et on en déduit bien que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi \left[|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) \right].$$

Le cas des coefficients de Fourier $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se traite de la même façon.

Remarque 45 *Le théorème de Parseval est vrai même si f n'est pas la somme de sa série de Fourier.*

Exemple 44 *En utilisant les exemples 42 ii) et iii), le théorème de Parseval donne de nouvelles identités remarquables :*

$$ii) \int_{-\pi}^{\pi} |t|^2 dt = \frac{2}{3}\pi^3 = \pi \left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \right].$$

D'où

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

En utilisant le calcul suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{16p^4} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4},$$

on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

$$iii) \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{2}{5}\pi^5 = \pi \left[\frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right],$$

ce qui donne de nouveau d'une autre manière :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Bibliographie

- [1] Sylvie Guerre-Delabrière, *Suites, séries et intégrales*, Niveau 2, cours et exercices corrigés, Ellipses.
- [2] Jean Marie Trépreau, *Notes manuscrites*.