

Rapport de stage :  
Frises

Adrien Laurent

Encadrante : Sophie Morier-Genoud

28 Avril 2014 - 27 Juin 2014

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Définition, premières propriétés</b>	<b>4</b>
1.1 Qu'est-ce qu'une frise ? . . . . .	4
1.2 Un réseau sur les frises . . . . .	5
1.3 Prolongement et périodicité des frises . . . . .	6
1.4 Quelques relations utiles . . . . .	8
<b>2 Frises et triangulations de polygones</b>	<b>10</b>
2.1 Caractérisation d'une frise entière . . . . .	10
2.2 Triangulations de polygones convexes . . . . .	12
2.3 Une bijection entre les triangulations des n-gones et les frises d'ordre n . . . . .	14
2.4 Étiquettes . . . . .	18
2.5 Arcs . . . . .	24
<b>3 Frises, polygones réguliers et suites de Farey</b>	<b>28</b>
3.1 Frises constantes . . . . .	28
3.2 Suites de Farey . . . . .	30
3.3 Correspondance entre les frises entières et les suites de Farey . . . . .	33
<b>4 Frises additives</b>	<b>36</b>
4.1 Définitions . . . . .	36
4.2 Une impression de déjà-vu . . . . .	37
4.3 Dénombrement de frises réelles . . . . .	40
4.4 Loi de groupe et frises additives constantes . . . . .	43
<b>5 2-Frises</b>	<b>48</b>
5.1 Définitions . . . . .	48
5.2 Relations importantes . . . . .	50
5.3 Périodicité des 2-frises closes . . . . .	53
<b>6 Autres frises</b>	<b>56</b>
6.1 Frises de NIM . . . . .	56
6.2 Frises tropicales . . . . .	58
<b>Conclusion</b>	<b>60</b>
<b>Remerciements</b>	<b>61</b>

<b>Bibliographie</b>	<b>62</b>
<b>Appendices</b>	<b>64</b>

# Introduction

Les frises sont un objet mathématique inventé dans les années 70 par Messieurs Coxeter et Conway.

Coxeter était un mathématicien britannique du 20ème siècle connu pour ses travaux en géométrie. Conway, également mathématicien britannique, s'est intéressé à beaucoup de domaines des mathématiques. Il est resté célèbre en particulier grâce à ses mathématiques amusantes comme la suite de Conway ou le jeu de la vie.

L'idée de la création des frises part juste d'une construction amusante. Elles connaissent néanmoins un regain d'intérêt depuis le récent développement de la théorie des algèbres amassées.

On étudiera d'abord les frises dites de Coxeter-Conway, qui furent les premières étudiées. On verra le lien surprenant entre les frises dont les coefficients sont entiers et les triangulations de polygones convexes.

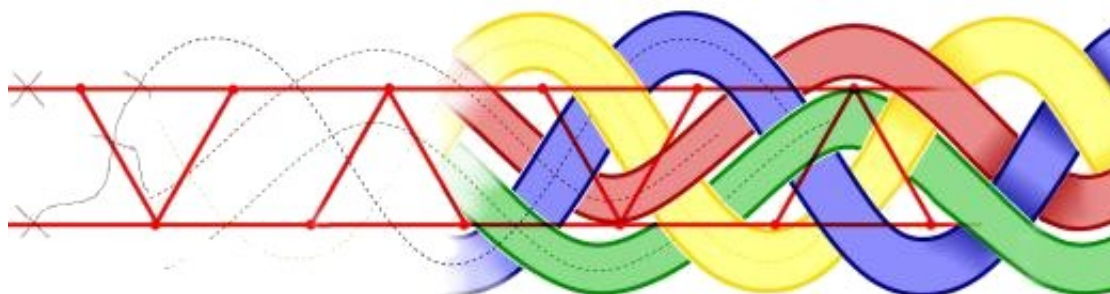
On continuera ensuite les comparaisons avec d'autres objets mathématiques connus tels que les suites de Farey.

Après avoir vu ces frises caractérisées par une loi du type  $ad - bc = 1$ , on étudiera les frises sur des lois du type  $a + d = b + c + e$ , puis des frises qui se recouvrent.

Pour finir, on s'interrogera sur la conservation de certaines propriétés des frises pour d'autres opérations un peu moins simples que l'addition et la multiplication.

Le mot d'ordre de ce rapport est la surprise. J'ai passé un très bon moment à chercher à comprendre le pourquoi de théorèmes un peu magiques sur les frises. J'espère que vous serez aussi étonné que je l'ai été.

Bonne lecture !



# Chapitre 1

## Définition, premières propriétés

### 1.1 Qu'est-ce qu'une frise ?

#### Définition 1.

- Les frises sont des arrangements de nombres réels positifs organisés en quinconce dans une bande infinie, de sorte que quatre entrées voisines forment une matrice  $2 \times 2$  de déterminant 1, et tels que la première rangée ne soit constituée que de 0, que les deuxième et dernière rangées ne contiennent que des 1, et que les nombres situés après la première ligne soient tous non-nuls.
- Le nombre de rangées  $n$  est appelé ordre de la frise ( $n \geq 3$ ).
- Le nombre de rangées  $m$  qui ne sont pas constituées seulement de 1 ou seulement de 0 est appelé largeur de la frise.

Exemple :

0	0	0	0	0	0	0	0	
...	1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	1	2	3	1	1	
...	1	5	2	1	5	2	...	
1	2	3	1	2	3	1	1	
...	1	1	1	1	1	1	1	...

Ici on a une frise d'ordre 6 et de largeur 3.

#### Proposition 1.

Pour toute frise,  $n = m + 3$ . C'est à dire que les seules rangées constituées uniquement de 0 ou uniquement de 1 sont les première, deuxième et dernière rangées.

*Démonstration.* Si  $m = 0$ ,  $n = 3$ .

Si  $m > 0$  prenons une autre rangée que la première, deuxième ou dernière. Celle-ci ne peut pas être constituée de 0 par définition. Supposons qu'elle soit composée uniquement de 1.

Alors on a un carré comme suit, situé dans la frise :  $\begin{matrix} & & & a & & \\ & & & 1 & & 1 \\ & & & b & & \\ & & & & & \end{matrix}$

Donc  $ab = 0$ . Donc  $a$  ou  $b$  égal 0. Or Il n'y a de zéros que sur la première ligne; donc on est sur la deuxième ligne et  $a = 0$ . C'est absurde, on a supposé être sur une autre ligne que la deuxième.  $\square$

## 1.2 Un réseau sur les frises

### Définition 2.

- On impose sur les frises un réseau en représentant chacun de ses éléments par un couple  $(r, s)$  d'entiers relatifs de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccc}
 (0, 0) & & (1, 1) & & (2, 2) & \dots \\
 \dots & (0, 1) & & (1, 2) & & (2, 3) \\
 (-1, 1) & & (0, 2) & & (1, 3) & \dots \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots \\
 (-2, n-4) & & (-1, n-3) & & (0, n-2) & \dots \\
 \dots & (-2, n-3) & & (-1, n-2) & & (0, n-1) \\
 (-3, n-3) & & (-2, n-2) & & (-1, n-1) & \dots
 \end{array}$$

- On nomme  $f_s$  le couple  $(-1, s)$  et  $g_s$  le couple  $(0, s)$  (les deux premières diagonales).
- On nomme  $a_s$  le couple  $(s-1, s+1)$  (la troisième ligne).

On peut rajouter une ligne de  $-1$  au dessus de la première ligne et une ligne de  $0$  puis de  $-1$  au dessous de la  $n$ -ième ligne. On ne perd pas de généralités et on obtient deux débuts d'une "antifrise". On ne peut pas compléter celle-ci à cause de la ligne de  $0$ .

On peut maintenant réécrire ce que l'on sait sur les frises avec les coordonnées du réseau.

### Proposition 2.

- Pour  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $(r, r) = 0$ ,  $(r, r+n) = 0$ ,  $(r, r+1) = 1$ ,  $(r+1, r+n) = 1$ ,  $(r, r-1) = -1$  et  $(r-1, r+n) = -1$ .
- règle unimodulaire :  $\forall r \in \mathbb{Z}$  et  $r < s < r+n$ ,  $(r, s) > 0$  et  $(r-1, s)(r, s+1) - (r, s)(r-1, s+1) = 1$ .
- $f_{-2} = g_{-1} = f_n = g_{n+1} = -1$ ,  $f_{-1} = g_0 = f_{n-1} = g_n = 0$  et  $f_0 = g_1 = f_{n-2} = g_{n-1} = 1$
- Pour  $-1 < r < n-1$ ,  $f_r g_{r+1} - f_{r+1} g_r = 1$

### Théorème 1.

$$\forall r, s \in \mathbb{Z} \text{ tels que } 0 \leq r \leq s \leq n-1, (r, s) = f_r g_s - f_s g_r.$$

*Démonstration.* Si  $r = 0$ , comme  $g_0 = 0$  et  $f_0 = 1$ ,  $(r, s) = g_s = 1 \times g_s - 0$ .  
On suppose que la propriété est vraie pour  $(0 \leq r' \leq r$  et  $r' \leq s' \leq r' + n)$  et  $(r' = r + 1$  et  $r' \leq s' \leq s)$ . (En fait, on fait une récurrence sur les diagonales  $r$  puis une sous-récurrence sur les coefficients de la diagonale la plus à droite, que l'on indice par  $s$ .)

Si  $r = s$ , alors  $(r + 1, s + 1) = 0 = f_{r+1}g_{r+1} - f_{r+1}g_{r+1}$ . (initialisation de la récurrence sur  $s$ )

Si non  $(r, s) = f_r g_s - f_s g_r \neq 0$ , d'où  $(r + 1, s + 1) = \frac{1 + (f_{r+1}g_s - f_s g_{r+1})(f_r g_{s+1} - f_{s+1}g_r)}{f_r g_s - f_s g_r}$  en appli-

$$(r + 1, s)$$

quant la loi unimodulaire au morceau de frise :  $(r, s) \quad (r + 1, s + 1) \quad .$

$$(r, s + 1)$$

Alors  $(r + 1, s + 1) = \frac{1 + f_r f_{r+1} g_s g_{s+1} + f_s f_{s+1} g_r g_{r+1} - f_r f_s g_{r+1} g_{s+1} - f_{r+1} f_{s+1} g_r g_s}{f_r g_s - f_s g_r}$ .

Or  $f_r g_{r+1} - f_{r+1} g_r = 1$ , donc  $(r + 1, s + 1) = \frac{1 + f_r f_{r+1} g_s g_{s+1} + f_s f_{s+1} g_r g_{r+1} - f_s g_{s+1} (1 + f_{r+1} g_r) - f_{s+1} g_s (f_r g_{r+1} - 1)}{f_r g_s - f_s g_r}$ .

$$(r + 1, s + 1) = \frac{1 - (f_s g_{s+1} - f_{s+1} g_s)}{f_r g_s - f_s g_r} + f_{r+1} g_{s+1} - f_{s+1} g_{r+1}$$

$$(r + 1, s + 1) = f_{r+1} g_{s+1} - f_{s+1} g_{r+1}$$

Par récurrence, la propriété est prouvée. □

### 1.3 Prolongement et périodicité des frises

On suppose maintenant que l'on peut prolonger les frises à l'infini en haut et en bas en rajoutant des rangées dont les coefficients vérifient  $\forall r, s \in \mathbb{Z}, (r, s) = f_r g_s - f_s g_r$ . Voyons si cela est possible et ce que cela implique.

#### Lemme 1.

$$\forall r, s, t, u \in \mathbb{Z}, (r, s)(t, u) + (r, t)(u, s) + (r, u)(s, t) = 0$$

#### Lemme 2.

$$\forall r, s \in \mathbb{Z}, (r, s) = -(s, r)$$

*Démonstration.* Les preuves sont simples. Il suffit de développer  $(r, s)$  en  $f_r g_s - f_s g_r$ .

1.  $(r, s)(t, u) = (f_r g_s - f_s g_r)(f_t g_u - f_u g_t) = f_r f_t g_s g_u - f_s f_t g_r g_u - f_r f_u g_s g_t + f_s f_u g_r g_t$   
 $(r, t)(u, s) = (f_r g_t - f_t g_r)(f_u g_s - f_s g_u) = f_r f_u g_s g_t - f_t f_u g_r g_s - f_r f_s g_t g_u + f_s f_t g_r g_u$   
 $(r, u)(s, t) = (f_r g_u - f_u g_r)(f_s g_t - f_t g_s) = f_r f_s g_t g_u - f_s f_u g_r g_t - f_r f_t g_s g_u + f_t f_u g_r g_s$

$$\text{Donc } (r, s)(t, u) + (r, t)(u, s) = f_r f_t g_s g_u + f_s f_u g_r g_t - f_t f_u g_r g_s - f_r f_s g_t g_u = -(r, u)(s, t)$$

2.  $(r, s) = f_r g_s - f_s g_r = -(f_s g_r - f_r g_s) = -(s, r)$

□

#### Théorème 2 (Périodicité des frises).

Pour une frise d'ordre  $n$ ,  $\forall r, s \in \mathbb{Z}, (r, s) = (s, r + n) = (s + n, r) = (r + n, s + n)$ .  
En particulier,  $\forall s \in \mathbb{Z}, f_{s+n} = f_s$  et  $a_{s+n} = a_s$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 1,  $\forall r, s, t, u \in \mathbb{Z}, (r, s)(t, u) + (r, t)(u, s) + (r, u)(s, t) = 0$ .

On pose  $t = r + 1$  et  $u = r + n$ .

$$(r, s)(r + 1, r + n) + (r, r + 1)(r + n, s) + (r, r + n)(s, r + 1) = 0$$

Or  $(r + 1, r + n) = 1, (r, r + 1) = 1$  et  $(r, r + n) = 0$  donc  $(r, s) + (r + n, s) = 0$ .

D'après le lemme 2,  $(r, s) = (s, r + n)$ .

En posant  $r' = s$  et  $s' = r + n$ , on a  $(r', s') = (r + n, s + n) = (r, s)$ ; et avec le lemme 2,  $(s + n, r) = (r, s) \Leftrightarrow (s, r) = (r, s + n)$ , ce que l'on vient de prouver!  $\square$

On peut donc bien prolonger la frise. Il nous suffit de faire d'abord le symétrique de la frise par rapport à la première ligne et de mettre des moins devant tous les coefficients ( $(r, s) = -(s, r)$ ) pour obtenir une "antifrise" qui vérifie la règle unimodulaire et  $(r, s) = f_r g_s - f_s g_r$ .

Puis on peut translater cette composition frise antifrise verticalement pour recouvrir l'espace ( $(r, s) = (s + n, r) = (s, r - n)$ ).

La règle unimodulaire est vérifiée partout. Les 0 reviennent toutes les  $n$  lignes et la positivité (respectivement négativité) est respectée dans chaque sous frise (respectivement sous antifrise).

Exemple :

...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0		0		0		0		0		0	
...	-1		-1		-1		-1		-1		...
-3		-1		-3		-1		-3		-1	
...	-2		-2		-2		-2		-2		...
-1		-3		-1		-3		-1		-3	
...	-1		-1		-1		-1		-1		...
0		0		0		0		0		0	
...	1		1		1		1		1		...
1		3		1		3		1		3	
...	2		2		2		2		2		...
3		1		3		1		3		1	
...	1		1		1		1		1		...
0		0		0		0		0		0	
...	-1		-1		-1		-1		-1		...
-3		-1		-3		-1		-3		-1	
...	-2		-2		-2		-2		-2		...
-1		-3		-1		-3		-1		-3	
...	-1		-1		-1		-1		-1		...
0		0		0		0		0		0	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Replaçons nous maintenant dans la frise non-prolongée. On voit que  $(r, s) = (r + n, s + n)$ . Donc la frise est périodique de période divisant  $n$ .

On a même mieux avec  $(r, s) = (s, r + n)$ . C'est un motif triangulaire, appelé triangle fondamental, qui engendre toute la frise. On pave la frise avec le triangle et son symétrique par rapport à l'axe horizontal (on ne le tourne pas!).



Avec un dessin, on voit mieux ce qui se passe :

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-2	-1	-4	-2	-1	-3	-2	-2	-1	-4	-2	-1	-3	-2	-2	-1	-3	-2
-1	-3	-7	-1	-2	-5	-3	-1	-3	-7	-1	-2	-5	-3	-1	-3	-7	-1
-1	-2	-5	-3	-1	-3	-7	-1	-2	-5	-3	-1	-3	-7	-1	-2	-5	-3
-1	-1	-3	-2	-2	-1	-4	-2	-1	-3	-2	-2	-1	-4	-2	-1	-3	-2
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	2	2	1	3	4	2	1	3	5	2	1	4	2	1	3	2
1	2	5	3	1	3	7	3	1	2	5	3	1	3	7	3	1	2
1	3	7	1	2	3	5	3	1	3	7	1	2	3	5	3	1	2
2	1	4	2	1	3	2	2	1	4	2	1	3	2	2	1	4	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

On comprend maintenant pourquoi on appelle ces objets des frises.

## 1.4 Quelques relations utiles

**Proposition 3.**

$\forall r, s \in \mathbb{Z}, (r, s + 1) = a_s(r, s) - (r, s - 1).$   
 En particulier,  $\forall s \in \mathbb{Z}, f_{s+1} + f_{s-1} = a_s f_s.$

*Démonstration.* D'après le lemme 1,  
 $\forall R, S, T, U \in \mathbb{Z}, (R, S)(T, U) + (R, T)(U, S) + (R, U)(S, T) = 0.$   
 On pose  $R = r, S = s, T = s - 1$  et  $U = s + 1.$   
 Alors  $(r, s)(s - 1, s + 1) + (s, s + 1)(s - 1, r) + (s + 1, r)(s - 1, s) = 0.$   
 Soit  $a_s(r, s) - (r, s - 1) - (r, s + 1) = 0,$  en utilisant le lemme 2. □

On a maintenant une relation exprimant les  $a_s$  en fonction des  $f_i.$  Essayons d'en trouver une qui exprime les  $f_s$  en fonction des  $a_i.$

**Proposition 4.**

$$\forall r, s \in \mathbb{Z} \text{ tels que } s \geq r + 2, (r, s) = \begin{vmatrix} a_{r+1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_{r+2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{r+3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{s-3} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_{s-2} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{s-1} \end{vmatrix}.$$

$$\text{En particulier } \forall s \in \mathbb{N}, f_{s+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{s-2} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_{s-1} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & a_s \end{vmatrix}.$$

*Démonstration.* On fixe  $r \in \mathbb{Z}$  quelconque. On va faire une récurrence double sur  $s$ .

$$(r, r + 2) = a_{r+1}$$

$$(r, r + 3) = a_{r+2}(r, r + 2) - (r, r + 1) \text{ (d'après la proposition 3)}$$

$$\text{Donc } (r, r + 3) = a_{r+2}a_{r+1} - 1 = \begin{vmatrix} a_{r+1} & 1 \\ 1 & a_{r+2} \end{vmatrix}$$

Maintenant supposons que la propriété est vraie au rang  $s$  et  $s + 1$  avec  $s \geq r + 2$ .

On développe par rapport à la dernière ligne.

$$\begin{vmatrix} a_{r+1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_{r+2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{r+3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{s-1} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_s & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{s+1} \end{vmatrix} = a_{s+1}(r, s+1) - \begin{vmatrix} a_{r+1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_{r+2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{r+3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{s-2} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_{s-1} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis on développe par rapport à la dernière colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{r+1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_{r+2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{r+3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{s-1} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_s & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{s+1} \end{vmatrix} = a_{s+1}(r, s+1) - (r, s) = (r, s+2)$$

Par récurrence, la propriété est prouvée.

En évaluant en  $r = -1$ , on obtient la propriété sur les  $f_s$ .  $\square$

## Chapitre 2

# Frises et triangulations de polygones

### 2.1 Caractérisation d'une frise entière

On oubliera ici les propriétés de prolongement des frises qui nous ont été utiles pour généraliser nos formules.

**Définition 3.**

Une frise entière est une frise dont tous les coefficients sont des entiers.

Attention toutes les frises ne sont pas entières.

Par exemple, 
$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \dots \\ \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$
 n'est pas une frise entière.

Mais qu'est-ce qui peut définir totalement une frise entière ?

Il est clair que si on a une diagonale fixée ( $f_{-1} = 0, f_0 = 1, \dots, f_{n-2} = 1$ ), alors on peut en déduire toute la frise en complétant chaque diagonale une par une (ou plus simplement en trouvant le triangle fondamental). On obtiendra bien une frise car les coefficients de la diagonale suivante s'expriment sous la forme  $\frac{1+x}{y}$  avec  $x$  et  $y$  positifs non nuls, donc tous les coefficients seront positifs non nuls.

Mais même si tous les  $f_s$  connus sont entiers, on n'est pas sûr d'obtenir une frise entière, car les coefficients des diagonales suivant ou précédant celle connue ont des coefficients s'exprimant comme fraction rationnelle des  $f_s$ .

Exemple : 
$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 3 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{2}{3} & \dots \\ \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$
 est une frise non-entière engendrée par la diagonale entière  $(0, 1, 3, 1)$ .

Si on nous donne la troisième ligne, les  $a_s$ , c'est un peu le contraire. Si les  $a_s$  sont entiers, les coefficients de la quatrième ligne seront entiers car de la forme  $a_s a_{s+1} - 1$ . On peut vérifier que tous les coefficients des lignes suivantes seront entiers.

Par contre, il n'est pas acquis que l'on obtienne une frise. Il faudrait obtenir une ligne de 1 et ne pas trouver de nombre négatifs ou nuls avant d'avoir atteint une nouvelle ligne de 1.

En général, on n'obtient pas de frise.

Exemple :

0	0	0	0	0	...
...	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	...
...	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	...
...	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	...
...	...	...	...	...	...

est engendré par la ligne  $(2, 2, 2, 2, \dots)$  mais n'est pas une frise (il n'y aura jamais de ligne de 1).

On a alors un résultat nous permettant d'avoir une caractérisation simple des frises entières.

**Proposition 5.**

On se donne une frise  $\mathcal{F}$  d'ordre  $n$ , on a équivalence entre ces trois propriétés :

1.  $\mathcal{F}$  est entière
2.  $\forall s \in \mathbb{Z}$  tel que  $-1 < s < n - 2$ ,  $f_s \in \mathbb{N}$  et  $f_s | f_{s-1} + f_{s+1}$
3.  $\forall s \in \mathbb{Z}$ ,  $a_s \in \mathbb{N}$

De plus si  $\mathcal{F}$  est entière,  $\forall r, s$  tels que  $r < s < r + n - 1$ ,  $(r, s) | (r, s - 1) + (r, s + 1)$ .

Il faut bien faire attention dans cette proposition au fait que l'on a pris une frise  $\mathcal{F}$  au départ, et non n'importe quel assemblage de nombres.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F}$  une frise d'ordre  $n$ .

On va faire une preuve triangulaire entre ces trois propriétés :

1.  $\forall r, s \in \mathbb{Z}$  tels que  $r < s < r + n - 1$ ,  $(r, s) \in \mathbb{N}$  et  $(r, s) | (r, s - 1) + (r, s + 1)$
2.  $\forall s \in \mathbb{Z}$  tel que  $-1 < s < n - 2$ ,  $f_s \in \mathbb{N}$  et  $f_s | f_{s-1} + f_{s+1}$
3.  $\forall s \in \mathbb{Z}$ ,  $a_s \in \mathbb{N}$

Il est clair que  $1 \implies 2$ .

$2 \implies 3$  se déduit de la relation  $f_s a_s = f_{s-1} + f_{s+1}$ .

$3 \implies 1$  :

Si  $s = r + 1$ ,  $(r, s) = 1 \in \mathbb{N}$ .

Si  $s \geq r + 2$ ,  $(r, s) = \begin{vmatrix} a_{r+1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_{r+2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_{r+3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{s-3} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_{s-2} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{s-1} \end{vmatrix}$ , donc  $(r, s)$  est entier car tous

les  $a_i$  sont entiers et le déterminant est un polynôme des coefficients de la matrice.

Comme on est dans une frise,  $(r, s)$  est un entier positif non nul.

On a donc bien  $\forall r, s \in \mathbb{Z}$  tels que  $r < s < r + n - 1$ ,  $(r, s - 1) + (r, s + 1) \in \mathbb{N}^*$ .

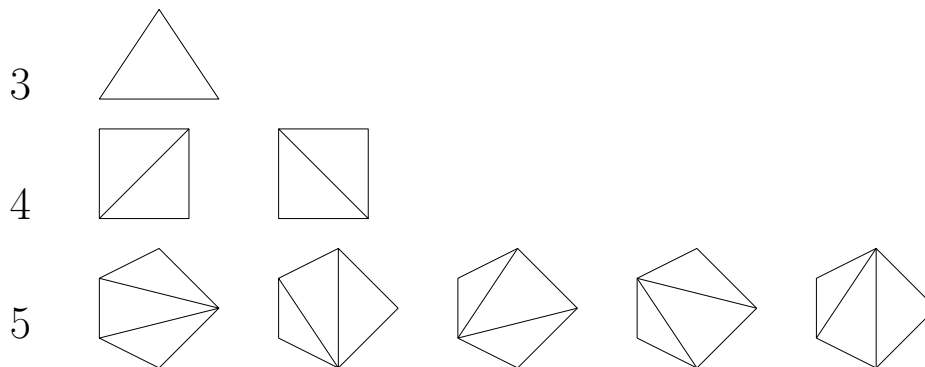
Or  $a_s(r, s) = (r, s + 1) + (r, s - 1)$ , donc  $(r, s) | ((r, s - 1) + (r, s + 1))$  □

## 2.2 Triangulations de polygones convexes

### Définition 4.

Une triangulation d'un polygone  $\mathcal{P}$  est une partition de  $\mathcal{P}$  en un ensemble de triangles qui ne se recouvrent pas, et dont l'union est  $\mathcal{P}$ . On impose que les sommets des triangles ne soient que les sommets de  $\mathcal{P}$ .

Exemple : Voici toutes les triangulations possibles pour un triangle, un carré et un pentagone.



### Proposition 6.

Un polygone triangulé à  $n$  sommets possède  $n - 2$  triangles et  $n - 3$  diagonales.

*Démonstration.* Pour  $n = 3$ , un triangle est bien composé de un triangle et pas de diagonales.

On suppose la propriété vraie pour tout  $k$  entre 3 et  $n$ . Montrons que la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

On prend une diagonale au hasard qui coupe notre polygone en deux sous polygones à respectivement  $k$  et  $n - k + 2$  sommets.

Alors d'après l'hypothèse de récurrence, ils ont respectivement  $k - 2$  et  $n - k$  triangles et  $k - 3$  et  $n - k - 1$  diagonales.

Donc le polygone a  $(k - 2) + (n - k) = n - 2$  triangles et  $1 + (k - 3) + (n - k - 1) = n - 3$  diagonales.

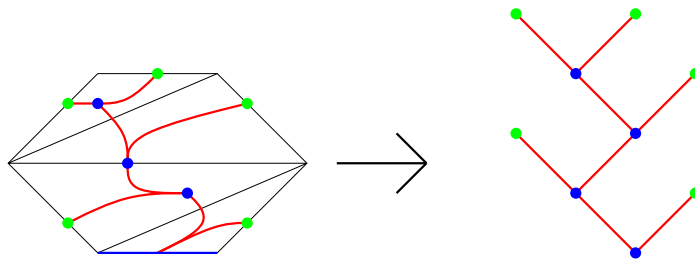
Par récurrence, la propriété est prouvée. □

Avant de relier les triangulations aux frises, on va essayer de déterminer le cardinal des triangulations d'un  $n$ -gone convexe. Pour cela, nous allons utiliser les arbres binaires. On rappelle juste qu'un arbre binaire est un arbre dont chaque nœud a deux fils ; les fils peuvent être soit des nœuds, soit des feuilles. On montre qu'il y a toujours une feuille de plus que ce qu'il y a de nœuds.

**Théorème 3.**

Soit  $n \geq 3$ , l'ensemble des  $n$ -gones convexes triangulés est en bijection avec l'ensemble des arbres binaires à  $n - 2$  nœuds (donc  $n - 1$  feuilles).

On ne fera pas la preuve de ce théorème. Un dessin est plus clair.



On fixe un côté du polygone, et pour chaque triangulation, on construit l'arbre associé comme montré sur le dessin, tout en faisant partir l'arbre du côté fixé.

Il se trouve que le nombre d'arbres binaires à  $n$  nœuds (et  $n + 1$  feuilles) est facile à compter. On note  $c(n)$  ce nombre.

Si  $n = 0$ ,  $c(0) = 1$  (il y a juste la racine).

Sinon on fixe la racine ; on a alors  $n - 1$  nœuds à répartir à gauche ou à droite. Si on en met  $k$  à gauche, on en met  $n - 1 - k$  à droite ; on a donc  $c(k)c(n - 1 - k)$  possibilités.

$$\text{D'où } \begin{cases} c(0) = 1 \\ c(n) = \sum_{k=0}^{n-1} c(k)c(n - 1 - k) \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Les  $c(n)$  sont appelés nombres de Catalan.

**Proposition 7.**

$$c(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

*Démonstration.* Soit la série génératrice  $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} c(k)c(n - 1 - k) \right) x^n + 1$ .

$$C(x) = 1 + c(0)c(0)x + (c(0)c(1) + c(1)c(0))x^2 + (c(0)c(2) + c(1)c(1) + c(2)c(0))x^3 + \dots$$

$$= 1 + x(c(0) + c(1)x + c(2)x^2 + \dots)(c(0) + c(1)x + c(2)x^2 + \dots)$$

D'où  $C(x) = 1 + xC(x)^2$ .

À  $x$  fixé non nul, c'est un polynôme du second degré dont les racines sont  $C_1(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$  et  $C_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ .

On a  $C(0) = c(0) = 1$ .

Par continuité,  $C(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .

Or  $C_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$ .

Donc  $C(x) = C_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ .

On développe en série la racine.

$$\text{Pour } x \neq 0, C(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x} \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4x)^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} \left(\frac{1}{2} - j\right) \right)$$

$$C(x) = -\frac{1}{2x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (4j - 2)$$

$$C(x) = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{i!} \prod_{j=1}^{i-1} (4j - 2) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{(i+1)!} \prod_{j=1}^i (4j - 2)$$

On identifie les coefficients. On a  $c(0) = 1$  et si  $n \geq 1$ ,  $c(n) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=1}^n (4j - 2)$ .

$$c(n) = 2^n \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{(n+1)!} = 2^n \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n+1)! 2n(2n-2)\dots 2}$$

$$c(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \square$$

On en déduit qu'il y a  $c(n-2) = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}$  triangulations possibles d'un  $n$ -gone convexe avec  $n \geq 3$ .

## 2.3 Une bijection entre les triangulations des $n$ -gones et les frises d'ordre $n$

On s'intéressera ici à ce théorème :

### Théorème 4.

L'ensemble des frises entières d'ordre  $n$  est en bijection avec l'ensemble des triangulations de  $n$ -gones convexes.

Pour prouver ce théorème, on a besoin de deux lemmes importants.

### Lemme 3.

Dans une frise entière  $\mathcal{F}$ , il y a au moins un des éléments de  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  égal à 1.

Remarque : On appelle  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  le cycle de quiddité de la frise. Pour  $n = 3$ , il vaut toujours  $(1, 1, 1)$ .

*Démonstration.* Supposons que tous les  $a_s$  soient supérieurs ou égaux à 2. Alors  $\forall s \in \mathbb{N}$  tel que  $s < n - 1$ ,  $a_s f_s = f_{s+1} + f_{s-1}$ .

Donc  $f_{s+1} \geq 2f_s - f_{s-1}$ .

$f_{s+1} - f_s \geq f_s - f_{s-1} \geq \dots \geq f_0 - f_{-1} = 1$

Donc  $f_s \geq s + 1$ . En particulier,  $f_{n-2} = 1 \geq n - 1$ .

C'est absurde donc au moins un des  $a_s$  vaut 1. □

**Lemme 4** (Extension et réduction de frise).

Si on connaît  $\mathcal{F}$  une frise entière d'ordre  $n$  ( $n \geq 4$ ) engendrée par un cycle de quiddité de la forme  $\dots t \ u \ v \ w \dots$ , alors le cycle  $\dots t \ u+1 \ 1 \ v+1 \ w \dots$  engendre une frise entière  $\mathcal{F}'$  d'ordre  $n + 1$ .

Réciproquement si on connaît  $\mathcal{F}'$  une frise d'ordre  $n$  ( $n \geq 5$ ) engendrée par un cycle de quiddité de la forme  $\dots t' \ u' \ 1 \ v' \ w' \dots$ , le cycle  $\dots t' \ u'-1 \ v'-1 \ w' \dots$  engendre une frise entière  $\mathcal{F}$  d'ordre  $n - 1$ .

Si  $n = 3$ ,  $(1, 1, 1)$  peut être étendu en  $(1, 2, 1, 2)$  et  $(2, 1, 2, 1)$  qui engendrent des frises entières et vice versa. Le lemme peut être étendu dans son principe à  $n = 3$  pour l'extension et  $n = 4$  pour la réduction.

*Démonstration.* Soit  $n \geq 4$ , soit  $\mathcal{F}$  une frise entière d'ordre  $n$  engendrée par un cycle de quiddité de la forme  $\dots t \ u \ v \ w \dots$ .

La diagonale des  $f_s$  de  $\mathcal{F}$  est de la forme  $\dots T \ U \ V \ W \dots$  avec  $u = \frac{T+V}{U}$  et  $v = \frac{U+W}{V}$  (d'après la proposition 3). Comme  $\mathcal{F}$  est entière,  $U|T + V$  et  $V|U + W$ .

Si on intercale  $U + V$  dans la diagonale, on a bien  $U + V|U + V$  et  $U + V \in \mathbb{N}^*$  donc la diagonale  $\dots T \ U \ U+V \ V \ W \dots$  engendre une frise entière d'ordre  $n + 1$ .

Le cycle de quiddité associé est  $\dots t \ u' \ x \ v' \ w' \dots$  avec  $u' = \frac{T+(U+V)}{U} = u + 1$ ,  $v' = \frac{(U+V)+W}{V} = v + 1$  et  $x = \frac{U+V}{U+V} = 1$ .

La "réciproque" se prouve de la même manière. □

**Définition 5.**

Soit  $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$  un  $n$ -gone convexe.

On définit  $\varphi_{P_0 P_1 \dots P_{n-1}}$  pour  $n \geq 3$ , l'application qui à une frise  $\mathcal{F}_n$  associe une triangulation de  $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ , définie par :  $\forall s \in \mathbb{N}$  avec  $0 \leq s \leq n - 1$ ,  $a_s$  est le nombre de triangles dont un des sommets est  $P_s$ .

Remarque : l'application dépend du polygone à trianguler.

Exemples :

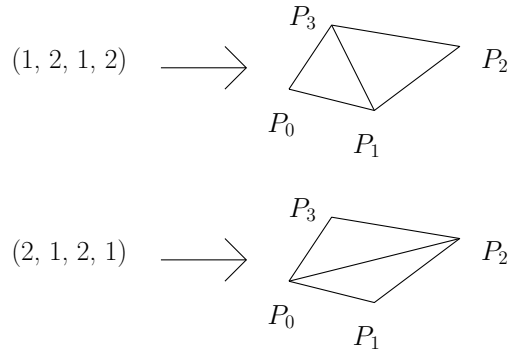
Pour  $n = 4$ , il n'y a que deux cycles de quiddité entiers possibles :  $(1, 2, 1, 2)$  et  $(2, 1, 2, 1)$ . En effet, on sait qu'il y a un 1 dans le cycle de quiddité, donc on obtient un motif de la forme :

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 1 & 1 \dots \\ 1 & x & y & z \\ \dots & 1 & 1 & 1 \dots \end{array}$$



Cela implique  $x = z = 2$  et  $y = 1$ .

D'un autre côté, il n'y a que deux triangulations possibles d'un quadrilatère convexe. On obtient alors les images de  $\varphi_{P_0P_1P_2P_3}$ .



**Proposition 8.**

$\varphi_{P_0P_1\dots P_{n-1}}$  est bien définie pour tout  $n \geq 3$  et tout polygone  $P_0P_1\dots P_{n-1}$ .

*Démonstration.* Le cycle de quiddité définit entièrement la frise donc une frise peut être associée à une triangulation.

On va faire une preuve par récurrence en "coupant" notre polygone.

Les cas de base ( $n = 3$  et  $n = 4$ ) ont été traités en exemple.

Maintenant on suppose que la propriété est vraie au rang  $n \geq 4$ .

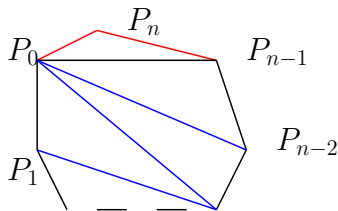
Soit  $P_0P_1\dots P_n$  un  $n + 1$ -gone et  $\mathcal{F}_{n+1}$  une frise entière d'ordre  $n + 1$ . Il faut montrer qu'il existe une unique triangulation de  $P_0P_1\dots P_n$  correspondant au cycle de quiddité de  $\mathcal{F}_{n+1}$ .

Quitte à tourner notre polygone, on peut supposer  $a_n = 1$  (cela décale la frise et on sait qu'il y a au moins un 1 dans le cycle de quiddité d'après le lemme 3).

On crée alors la frise entière  $\mathcal{F}_n$  engendrée par  $(a_0 - 1, a_1, \dots, a_{n-1} - 1)$  (en utilisant le lemme 4).

D'après l'hypothèse de récurrence,  $\varphi_{P_0P_1\dots P_{n-1}}$  est bien définie. Donc  $\varphi_{P_0P_1\dots P_{n-1}}(\mathcal{F}_n)$  est une triangulation de  $P_0P_1\dots P_{n-1}$ .

On construit alors une triangulation sur  $P_0P_1\dots P_n$  en rajoutant une "oreille" sur le côté  $P_0P_{n-1}$ .



Miraculeusement cette triangulation correspond à la frise  $\mathcal{F}_{n+1}$ . En effet, il y a bien  $(a_0-1)+1$  triangles touchant  $P_0$ ,  $(a_{n-1}-1)+1$  triangles touchant  $P_{n-1}$ ,  $a_n = 1$  triangle touchant  $P_n$  et  $a_s$  triangles touchant  $P_s$  pour les autres sommets.

L'existence est prouvée.

L'unicité tombe vite en disant que la triangulation sur  $P_0P_1\dots P_{n-1}$  est l'unique possible si on fixe le nombre de triangles touchant chaque sommet. Sur  $P_0P_1\dots P_n$ , on a donc cette même triangulation sur le sous polygone  $P_0P_1\dots P_{n-1}$ . On n'a plus le choix pour rajouter le point  $P_n$ , il faut rajouter le triangle  $P_0P_{n-1}P_n$ .

L'unicité est alors prouvée.

$\varphi_{P_0P_1\dots P_n}$  est donc bien définie.

La récurrence est prouvée. □

Remarque : Géométriquement, le lemme 4 consiste juste à rajouter un triangle sur le côté correspondant à  $\dots u v \dots$  dans le cycle de quiddité. C'est pourquoi ce lemme est très utile.

Passons maintenant à la preuve du théorème :

*Démonstration.* Montrons que  $\forall n \geq 3, \forall P_0P_1\dots P_{n-1}$  polygone convexe,  $\varphi_{P_0P_1\dots P_{n-1}}$  est une bijection.

Injectivité :

Soit  $\mathcal{F}_n$  et  $\mathcal{F}'_n$  deux frises entières d'ordre  $n$ . Si  $\varphi_{P_0P_1\dots P_{n-1}}(\mathcal{F}_n) = \varphi_{P_0P_1\dots P_{n-1}}(\mathcal{F}'_n)$ , alors le nombre de triangles touchant les sommets de  $P_0P_1\dots P_{n-1}$  sont les mêmes. Donc les cycles de quiddité de  $\mathcal{F}_n$  et  $\mathcal{F}'_n$  sont les mêmes. Or ceux-ci définissent entièrement une frise. Donc  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}'_n$  (l'égalité veut ici dire égalité de tous les coefficients).

Surjectivité :

On va raisonner ici de la même manière que dans la preuve précédente : on va démontrer notre polygone en lui enlevant des oreilles (les triangles sur les bords).

La surjectivité est vérifiée pour  $n = 3$  et  $n = 4$  ( $n = 3$  est évident ; voir exemple plus haut pour  $n = 4$ ).

On suppose que pour un  $n \geq 4, \forall P_0P_1\dots P_{n-1}$  polygone convexe,  $\varphi_{P_0P_1\dots P_{n-1}}$  est une surjection.

Alors soit  $P_0P_1\dots P_n$  un  $n+1$ -gone convexe. On peut lui associer le cycle  $(a_0, \dots, a_n)$  du nombre de triangles touchant chaque sommet.

On veut montrer que ce cycle engendre une frise.

Pour cela, on peut remarquer que au moins un des  $a_s$  vaut 1 car un polygone triangulé n'étant pas un triangle possède au moins deux oreilles (preuve simple par récurrence forte).

On peut donc utiliser le lemme 4 pour réduire le cycle de quiddité à une longueur de  $n$ .

Par hypothèse de récurrence, ce nouveau cycle engendre une frise entière d'ordre  $n$ . En réutilisant le lemme 4, on peut remonter au cycle  $(a_0, \dots, a_n)$  et celui-ci engendre bien une frise entière.

$\varphi_{P_0P_1\dots P_n}$  est une surjection. Donc la récurrence est prouvée.

On a bien  $\forall n \geq 3, \forall P_0P_1\dots P_{n-1}$  polygone convexe,  $\varphi_{P_0P_1\dots P_{n-1}}$  est une bijection. □

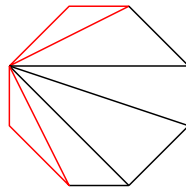
On déduit du théorème quelques résultats simples.

**Corollaire 1.**

Toute frise entière contient au moins deux 1 dans son cycle de quiddité. Ils ne sont pas consécutifs sauf dans le cas de l'ordre 3.

*Démonstration.* Comme un  $n$ -gone ( $n \geq 4$ ) convexe triangulé possède au moins deux oreilles, et qu'une oreille correspond à un 1 dans le cycle de quiddité de la frise entière associée, il y a au moins deux 1 dans le cycle de quiddité de toute frise d'ordre supérieur ou égal à 4.

Si ils se suivaient, on ne pourrait pas fermer le triangle en ces points.



un octogone à deux oreilles

Pour  $n = 3$ , le cycle de quiddité est toujours  $(1, 1, 1)$ . Il contient au moins deux 1. □

**Corollaire 2.**

Il y a exactement  $c(n - 2) = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}$  frises entières d'ordre  $n$  (pour  $n \geq 3$ ).

*Démonstration.* Il y a  $c(n - 2)$  triangulations d'un  $n$ -gone donc grâce à la bijection trouvée précédemment, il y a  $c(n - 2)$  frises entières d'ordre  $n$ . □

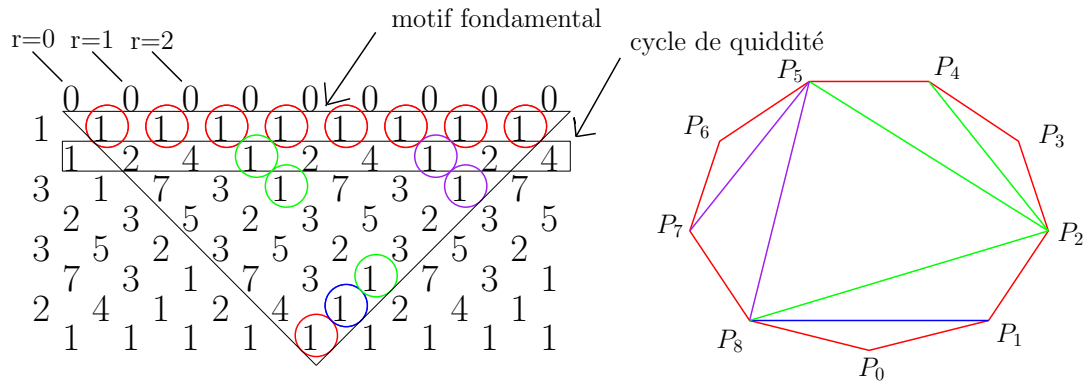
## 2.4 Étiquettes

**Proposition 9.**

L'image d'une frise entière  $\mathcal{F}_n$  par  $\varphi_{P_0 P_1 \dots P_{n-1}}$  est la triangulation de  $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$  créée de cette manière : pour  $r < s$ , on relie  $P_r$  et  $P_s$  si et seulement si  $(r, s) = 1$ .

Cette proposition permet de trouver facilement la triangulation associée à une frise.

Exemple :



On remarque que l'ancienne définition et la nouvelle sont bien compatibles ici.  
 On remarque aussi que la ligne de 1 du dessus et le 1 en bas du motif fondamental correspondent aux côtés du polygone.

Pour prouver cette assertion, on a besoin du concept d'étiquetage des polygones triangulés.

**Définition 6.**

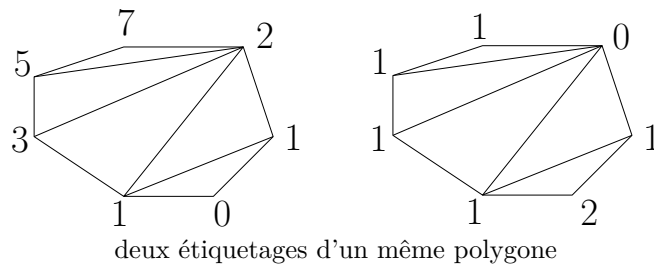
On se donne une frise entière  $\mathcal{F}_n$  et on lui associe la triangulation de  $P_0P_1\dots P_{n-1}$  par  $\varphi_{P_0P_1\dots P_{n-1}}$ .

Soit  $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on définit l'étiquetage à partir de  $P_r$  de  $P_0P_1\dots P_{n-1}$  comme la numérotation des sommets suivantes :

- $P_r$  est numéroté 0.
- Tout sommet relié à  $P_r$  par un côté ou une diagonale est numéroté 1.
- Quand un triangle a deux de ses sommets étiquetés, le troisième est étiqueté par la somme des étiquettes des deux premiers sommets.

Le  $n$ -uplet de la forme  $(0, 1, \dots, 1)$  contenant les étiquettes des sommets dans l'ordre est nommé étiquette de  $P_0P_1\dots P_{n-1}$  à partir de  $P_r$ .

Exemple :



**Théorème 5.**

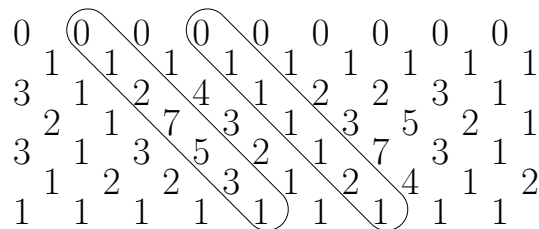
Si  $P_0P_1\dots P_{n-1}$  est le polygone associé à la frise entière  $\mathcal{F}_n$ , alors pour tout  $r$  entre 0 et  $n - 1$ , l'étiquette du polygone à partir de  $P_r$  est la  $r$ -ième diagonale de la frise.

*Démonstration.* (de la proposition précédente)

Avec le théorème, on obtient que pour  $r$  entre 0 et  $n - 1$ , les 1 de la  $r$ -ième diagonale représentent exactement les voisins de  $P_r$  sur le polygone, c'est à dire les points reliés à  $P_r$  par une diagonale ou un côté.

On peut de plus se restreindre au triangle fondamental (et ne pas rester sur les  $n - 1$  diagonales) car on a déjà accès à toutes les informations nécessaires avec le triangle.  $\square$

Voici la frise associée à la triangulation de l'exemple précédent. On voit les deux diagonales apparaître dans les étiquettes.



On peut donc déterminer la frise uniquement en faisant des dessins de polygones, sans jamais rien faire d'autre que des additions !

Maintenant prouvons le théorème.

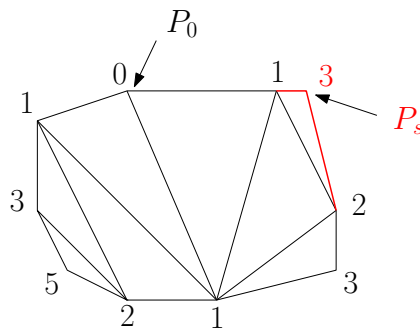
*Démonstration.* Pour  $n = 3$  ou  $n = 4$ , le théorème est vrai.

Supposons le théorème vrai pour  $n \geq 4$ .

On se donne  $P_0P_1\dots P_n$  un polygone triangulé associé à la frise entière  $\mathcal{F}_{n+1}$ . Soit  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on va prouver que la  $r$ -ième diagonale est l'étiquetage de  $P_0P_1\dots P_n$  à partir de  $P_r$ .

Quitte à tourner notre polygone et faire translater notre frise, on peut supposer  $r = 0$ .

On sait que le polygone a deux oreilles, donc on peut supposer l'existence de  $P_s$  un sommet différent de  $P_0$  tel que celui-ci soit le sommet d'une oreille.



Si on enlève cette oreille, on garde les mêmes étiquettes pour tous les autres sommets et on a un polygone à  $n$  sommets. On sait donc que la 0-ième diagonale de la frise  $\mathcal{F}_n$  associé à ce sous-polygone est l'étiquetage du polygone  $P_0P_1\dots P_{s-1}P_{s+1}\dots P_n$  à partir de  $P_0$ .

Cette diagonale est de la forme  $g_0, g_1, \dots, g_{s-1}, g_{s+1}, \dots$ .

On pose la nouvelle diagonale contenant  $g_s = g_{s-1} + g_{s+1}$ . Cette diagonale est donc exactement l'étiquette de  $P_0P_1\dots P_n$  à partir de  $P_0$ .

Il s'agit alors de montrer que cette diagonale engendre bien une frise et que celle-ci est  $\mathcal{F}_{n+1}$ .

On a vu dans la preuve du lemme 4 que si le cycle de quiddité  $\dots t u v w \dots$  engendre une frise entière alors  $\dots t u+1 1 v+1 w \dots$  en engendre une.

On a vu aussi que si la diagonale correspondante est  $\dots T U V W \dots$  alors  $\dots T U U+V V W \dots$  est la diagonale correspondante de la nouvelle frise

Ici c'est ce qu'on a fait, on a placé  $g_s = g_{s-1} + g_{s+1}$  entre  $g_{s-1}$  et  $g_{s+1}$ . On a donc bien créé une frise entière.

De plus, si le cycle de quiddité de  $P_0P_1\dots P_{s-1}P_{s+1}\dots P_n$  est  $a_0, \dots, a_{s-1}, a_{s+1}, \dots$  alors le cycle de quiddité de la nouvelle frise est  $a_0, \dots, a_{s-1}+1, 1, a_{s+1}+1, \dots$  qui correspond exactement à l'ajout d'une oreille dans la triangulation de  $P_0P_1\dots P_{s-1}P_{s+1}\dots P_n$  pour obtenir celle de  $P_0P_1\dots P_n$ .

Donc cette frise entière est celle triangulant  $P_0P_1\dots P_n$ , c'est à dire  $\mathcal{F}_{n+1}$ .

La 0-ième diagonale de  $\mathcal{F}_{n+1}$  est donc bien l'étiquette de  $P_0P_1\dots P_n$  à partir de  $P_0$ .

Par récurrence, la propriété est prouvée. □

### Corollaire 3.

Le motif fondamental d'une frise entière d'ordre  $n$  contient exactement  $2n - 3$  un et  $n - 3$  deux.

*Démonstration.* On utilise ici le fait qu'un polygone triangulé à  $n$  sommets a exactement  $n - 3$  diagonales.

On sait qu'un 1 dans le motif fondamental correspond à une diagonale ou à un côté. Donc il y a  $n + (n - 3)$  un dans le motif fondamental.

Pour les deux, c'est un peu plus compliqué.

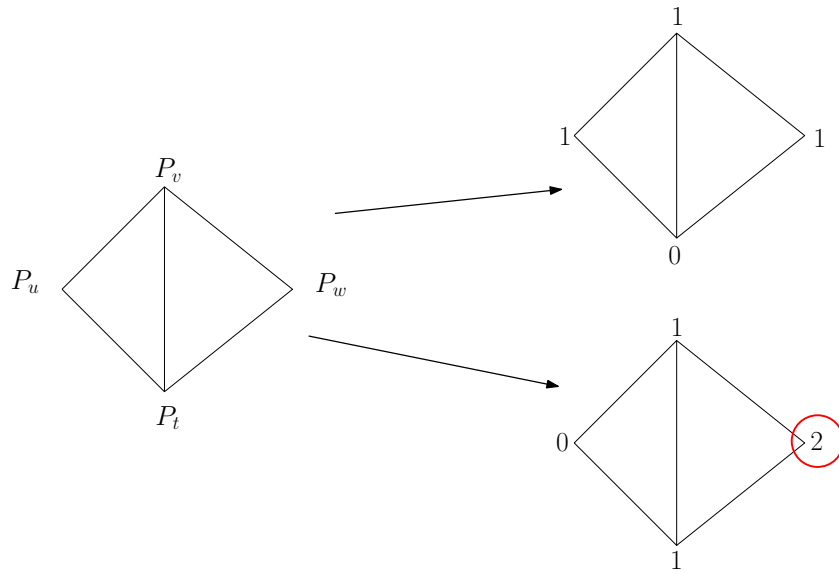
Une diagonale est le côté de deux triangles. Cela forme un "hamac" (voir figure suivante).

On suppose  $t < u < v < w$ . On voit qu'une diagonale engendre un 2. On peut penser qu'elle en engendrera un autre si on pose l'étiquette 0 en  $P_w$  mais ce 2 ne sera pas dans le motif fondamental.

On a donc au moins un 2 créé par chaque diagonale donc au moins  $n - 3$  deux en tout.

Mais on sait que  $2=1+1$  donc tout 2 n'est engendré que par un "hamac".

Il y a donc exactement  $n - 3$  deux dans le motif fondamental.

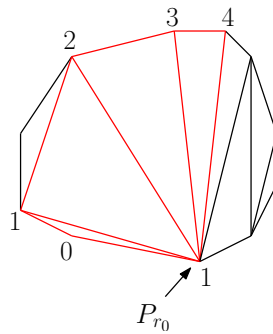


□

**Corollaire 4.**

Une frise entière contient au moins un 4 ou n'est constituée que de nombres de Fibonacci.

*Démonstration.* – Si  $\exists r_0 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_{r_0} > 3$ ,  
alors soit  $P_0P_1\dots P_{n-1}$  un polygone triangulé selon la frise donnée.  
Le point  $P_{r_0}$  touche au moins 4 triangles. On peut donc extraire un hexagone de  $P_0P_1\dots P_{n-1}$ .



Si on donne l'étiquette 0 à un point voisin de  $P_{r_0}$  dans l'hexagone, alors on obtient un point d'étiquette 4.

Si on rajoute les oreilles sur les côtés de l'hexagone, on ne changera pas les étiquettes des points de l'hexagone.

Donc on a un 4 dans la frise.

- Si  $\forall r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_r \leq 3$ ,

On sait qu'on peut obtenir toutes les triangulations d'un  $n+1$ -gone en ajoutant des oreilles à des triangulations de  $n$ -gones.

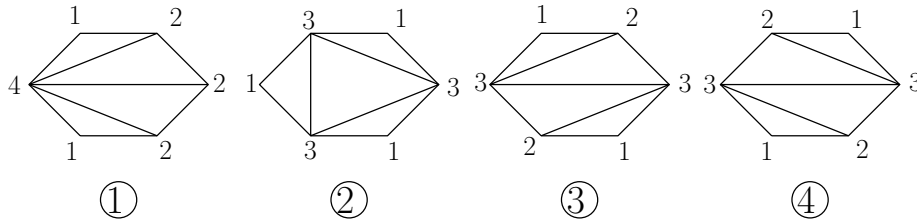
On va étudier les premiers cas. On va juste étudier les formes globales de triangulations : on identifiera les triangulations qui s'obtiennent en faisant une rotation d'une autre car celles-ci donneront les mêmes coefficients dans leur frise associée.

Le triangle a un cycle de quiddité  $(1, 1, 1)$  donc rentre dans les critères. Sa frise associée n'est constituée que de 0 et de 1, qui sont des nombres de Fibonacci.

Le carré a le cycle de quiddité  $(1, 2, 1, 2)$  à rotation près. Dans sa frise, il n'y a que des 0, des 1 et des 2.

Le pentagone n'a qu'une triangulation possible à rotation près. Elle a pour cycle de quiddité  $(1, 3, 1, 2, 2)$ . La frise associée ne contient que des 0, des 1, des 2 et des 3.

On arrive au cas intéressant. Il y a quatre triangulations possibles d'un hexagone à rotation près :

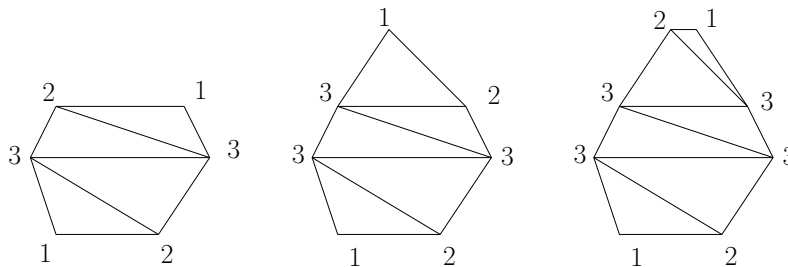


La 1° contient un 4 dans son cycle de quiddité, donc on ne s'y intéresse pas.

Pour la 2°, sa frise ne contient pas de 4 (il suffit d'écrire les étiquettes pour le voir).

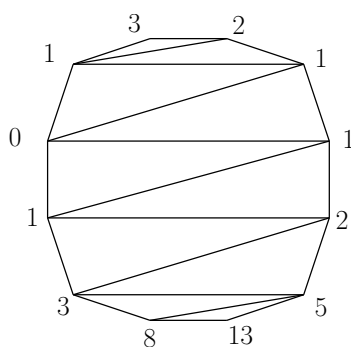
Mais il y a une autre propriété intéressante. Si on essaie d'ajouter une oreille sur n'importe quel côté, on aura un des sommets de l'oreille qui touchera 4 triangles (et donc un 4 dans le cycle de quiddité). On s'interdit donc d'étendre cet hexagone.

Les figures 3° et 4° sont des triangulations "zigzag". On remarque très vite que les seules extensions possibles pour ces figures gardant un cycle de quiddité sans entier supérieur à 3 conservent cette structure de zigzag.



On remarque alors que sur ces zigzags, peu importe où on met l'étiquette 0, on obtient des nombres de Fibonacci.





C'est compréhensible. Chaque nouvelle étiquette est la somme des deux précédentes trouvées (sauf pour les 1 mais ça ne change rien). C'est exactement la formule de récurrence définissant les nombres de Fibonacci.

Donc il n'y a que des nombres de Fibonacci dans la frise des polygones à zigzag.

Le fait que tous les polygones triangulés à plus de 7 sommets et vérifiant l'hypothèse soient en zigzag conclut la preuve. □

## 2.5 Arcs

Ici on étudiera une autre manière de lier les coefficients des frises avec les polygones triangulés. On s'inspirera grandement de l'article [6].

Quand on écrira  $P_i P_{i+1} \dots P_{j-1} P_j$ , si  $j < i$ , on voudra désigner l'objet  $P_i P_{i+1} \dots P_{n-1} P_0 \dots P_{j-1} P_j$ . Tous les abus de notations comme celui-ci se comprendront par la structure cyclique des sommets du polygone.

### Définition 7.

On se donne un polygone triangulé  $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ . Puis on se donne deux sommets de ce polygone  $P_i$  et  $P_j$ .

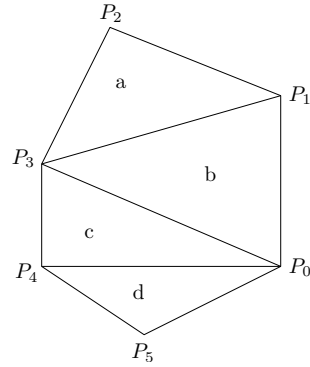
On appelle arc de  $P_i$  vers  $P_j$  une liste  $(Q_k)$  de sommets du polygone reliant  $P_i$  à  $P_j$  sur le polygone (sans passer par les diagonales); on le note  $P_i Q_1 \dots Q_r P_j$ .

Il n'y en a que deux pour tous les polygones :  $P_i P_{i+1} \dots P_{j-1} P_j$  et  $P_i P_{i-1} \dots P_{j+1} P_j$  (en tournant dans le sens direct ou indirect du polygone).

On appelle  $k$ -uplet pour l'arc  $P_i Q_1 \dots Q_k P_j$  un  $k$ -uplet de triangles tel que aucun triangle n'apparaisse plus d'une fois et le  $i$ -ème terme est un triangle ayant  $Q_i$  pour sommet.

On appelle  $N(P_i Q_1 \dots Q_k P_j)$  le nombre de  $k$ -uplet pour l'arc  $P_i Q_1 \dots Q_k P_j$  pouvant exister. On impose  $N(P_i P_j) = 1$ .

Exemple :



Intéressons nous à l'arc  $P_0P_1P_2P_3P_4$ .

On remarque déjà que  $P_2$  est un point particulier car il ne touche qu'un seul triangle. On appellera ces points des points spéciaux.

Ici il n'y a qu'un seul 3-uplet possible :  $(b, a, c)$  ; donc  $N(P_0P_1P_2P_3P_4) = 1$ .

Sur l'arc  $P_5P_0P_1$ , on a plusieurs 1-uplet possibles :  $(b)$ ,  $(c)$  et  $(d)$ , d'où  $N(P_5P_0P_1) = 3$ .

Sur l'arc  $P_5P_4P_3P_2P_1$ , les 3-uplets possibles sont  $(d, c, a)$ ,  $(d, b, a)$  et  $(c, b, a)$ .

Donc  $N(P_5P_4P_3P_2P_1) = 3$ .

On peut déjà remarquer que  $N(P_0P_1P_2P_3P_4) = N(P_0P_5P_4)$  et  $N(P_5P_0P_1) = N(P_5P_4P_3P_2P_1)$ .

#### Définition 8.

Si  $\mathcal{P}$  est un  $n$ -gone triangulé et  $S$  est un point spécial de  $\mathcal{P}$ , on définit  $\mathcal{P}/S$  comme le  $(n - 1)$ -gone triangulé contenant tous les sommets et diagonales de  $\mathcal{P}$  sauf  $S$  et ses côtés adjacents.

On appelle  $N'$  l'analogie de la fonction  $N$  sur  $\mathcal{P}/S$ .

#### Lemme 5.

Soit  $S$  un point spécial de  $\mathcal{P}$ , alors

– Si  $S$  n'est pas un point de l'arc  $P_iQ_1\dots Q_kP_j$ , alors

$$N(P_iQ_1\dots Q_kP_j) = N'(P_iQ_1\dots Q_kP_j).$$

– Si  $S = Q_r$  alors  $P_iQ_1\dots Q_{i-1}Q_{i+1}\dots Q_kP_j$  est un arc de  $\mathcal{P}/S$  et

$$N(P_iQ_1\dots Q_kP_j) = N'(P_iQ_1\dots Q_{i-1}Q_{i+1}\dots Q_kP_j).$$

*Démonstration.* Si  $S$  n'est pas un point de l'arc, alors le triangle dont il est un des sommets ne peut être dans aucun des  $k$ -uplets pour l'arc  $P_iQ_1\dots Q_kP_j$ . Ce triangle ne peut avoir pour sommets sur l'arc que  $P_i$  ou  $P_j$ , sinon ce triangle ne serait pas une oreille.

Si  $S = Q_r$ , il est clair que  $P_i Q_1 \dots Q_{i-1} Q_{i+1} \dots Q_k P_j$  est un arc de  $\mathcal{P}/S$ . On appelle  $t$  le triangle dont  $S$  est un des sommets. Soit  $(a_1, \dots, a_k)$  un  $k$ -uplet pour l'arc  $P_i Q_1 \dots Q_k P_j$ , alors  $(a_1, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_k)$  est un  $(k-1)$ -uplet pour  $P_i Q_1 \dots Q_{i-1} Q_{i+1} \dots Q_k P_j$ ; on a juste enlevé l'oreille touchant  $S$ .

Maintenant soit  $(b_1, \dots, b_{k-1})$  un  $(k-1)$ -uplet pour  $P_i Q_1 \dots Q_{i-1} Q_{i+1} \dots Q_k P_j$  alors  $(b_1, \dots, b_{r-1}, t, b_{r+1}, \dots, b_{k-1})$  est un  $k$ -uplet pour l'arc  $P_i Q_1 \dots Q_k P_j$ .  $\square$

### Théorème 6.

Soit  $\mathcal{P}$  un polygone triangulé,  $\mathcal{F}$  la frise associée,  $P_i$  et  $P_j$  deux points du polygone,  $P_i Q_1 \dots Q_k P_j$  et  $P_i R_1 \dots R_s P_j$  les deux arcs reliant  $P_i$  et  $P_j$ .

Alors  $N(P_i Q_1 \dots Q_k P_j) = (i, j) = N(P_i R_1 \dots R_s P_j)$  si  $i < j$   
et  $N(P_i Q_1 \dots Q_k P_j) = (j, i) = N(P_i R_1 \dots R_s P_j)$  si  $j < i$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ .

Si  $n = 3$ , peu importe qui sont  $P_i$  ou  $P_j$ , pour tout arc, la valeur par  $N$  de cet arc est 1. Cela correspond bien aux 1 de la frise.

Supposons la propriété vraie au rang  $n$ .

Soient  $\mathcal{P}$  un  $(n+1)$ -gone triangulé,  $P_i$  et  $P_j$  deux points du polygone et  $P_i Q_1 \dots Q_k P_j$  et  $P_i R_1 \dots R_s P_j$  les deux arcs reliant  $P_i$  et  $P_j$ .

Ce polygone a au moins deux oreilles donc deux points spéciaux.

On suppose  $i < j$  ici, l'autre cas se traite de la même manière.

Premier cas :

Si un point spécial  $S$  est sur l'arc  $P_i Q_1 \dots Q_k P_j$  ( $S = Q_r$ ), alors on a

$N'(P_i Q_1 \dots Q_{r-1} Q_{r+1} \dots Q_k P_j) = (i, j)_{\mathcal{P}/S} = N'(P_i R_1 \dots R_s P_j)$  dans  $\mathcal{P}/S$  d'après l'hypothèse de récurrence.

Puis d'après le lemme précédent,  $N'(P_i Q_1 \dots Q_{r-1} Q_{r+1} \dots Q_k P_j) = N(P_i Q_1 \dots Q_k P_j)$  et

$N'(P_i R_1 \dots R_s P_j) = N(P_i R_1 \dots R_s P_j)$ .

Il nous reste donc juste à montrer que  $(i, j)_{\mathcal{P}/S} = (i, j)_{\mathcal{P}}$ .

Pour cela, il faut repenser au concept d'étiquette vu dans la section précédente. Je me fixe  $P_i$  comme début de mon étiquetage (donc d'étiquette 0). Je numérote mes sommets normalement dans les deux polygones. Mais comme le triangle que l'on a enlevé est une oreille, il est numéroté en dernier, et surtout il n'a aucune incidence sur l'étiquetage des autres points. Il est donc clair que  $(i, j)_{\mathcal{P}/S} = (i, j)_{\mathcal{P}}$ .

Le raisonnement est le même si le point spécial est sur l'arc  $P_i R_1 \dots R_s P_j$ .

Deuxième cas :

Si le polygone n'a que deux points spéciaux et que ceux ci sont  $P_i$  et  $P_j$ .

En utilisant l'hypothèse de récurrence, sur  $\mathcal{P}/P_j$ , on a  $N'(P_i Q_1 \dots Q_k) = (i, j-1)_{\mathcal{P}/P_j}$  et

$N'(P_i Q_1 \dots Q_k R_s) = (i, j+1)_{\mathcal{P}/P_j}$ .

On appelle  $t$  le triangle  $Q_k P_j R_s$ .

Un  $k$ -uplet pour l'arc  $P_i Q_1 \dots Q_k P_j$  ne contenant pas l'élément  $t$  correspond exactement à un  $k$ -uplet pour l'arc  $P_i Q_1 \dots Q_k R_s$  dans  $\mathcal{P}/P_j$ . C'est la même liste de triangles, cela ne change rien.

De la même manière, un  $k$ -uplet pour l'arc  $P_i Q_1 \dots Q_k P_j$  contenant l'élément  $t$  en dernière position correspond exactement à un  $k$ -uplet pour l'arc  $P_i Q_1 \dots Q_k$  dans  $\mathcal{P}/P_j$ .

Donc  $N(P_i Q_1 \dots Q_k P_j) = N'(P_i Q_1 \dots Q_k) + N'(P_i Q_1 \dots Q_k R_s) = (i, j-1)_{\mathcal{P}/P_j} + (i, j+1)_{\mathcal{P}/P_j}$ .

Par le même raisonnement qu'au dessus, on trouve  $N(P_i Q_1 \dots Q_k P_j) = (i, j - 1)_{\mathcal{P}} + (i, j + 1)_{\mathcal{P}}$ .  
 $N(P_i Q_1 \dots Q_k P_j) = a_j(i, j)_{\mathcal{P}} = (i, j)_{\mathcal{P}}$  d'après la proposition 3 et  $a_j = 1$  car  $P_j$  ne touche qu'un seul triangle.

Le résultat pour l'autre arc se prouve de la même manière.

Par récurrence, la propriété est prouvée. □

**Corollaire 5.**

$$N(P_i P_{i+1} \dots P_{i-2} P_{i-1}) = 1$$

Cela veut dire que si on prend deux sommets adjacents, il existe un unique  $(n - 2)$ -uplet pour l'arc concerné (avec  $n$  le nombre de sommets). C'est cohérent, on a prouvé qu'un  $n$ -gone triangulé avait exactement  $n - 2$  triangles. Il est tout de même étonnant qu'il existe toujours au moins un  $(n - 2)$ -uplet.

# Chapitre 3

## Frises, polygones réguliers et suites de Farey

### 3.1 Frises constantes

**Définition 9.**

On appelle frise constante, une frise de période 1.

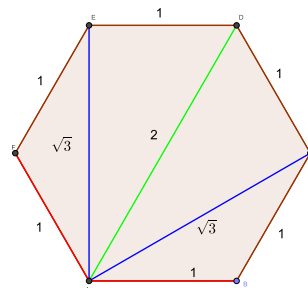
On va tenter ici de prouver le théorème suivant :

**Théorème 7.**

Tout polygone  $P_0P_1\dots P_{n-1}$  régulier convexe de côté 1 peut être associé à une frise constante si  $n \geq 3$ . Il suffit de donner à tous les coefficients de la  $r$ -ième ligne la valeur de la longueur de la diagonale reliant  $P_0$  à  $P_r$ , c'est à dire  $\frac{\sin(\frac{r\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ . Cette frise est l'unique frise constante d'ordre  $n$ .

Exemple :

0	0	0	0	...
...	1	1	1	1
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	...
...	2	2	2	2
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	...
...	1	1	1	1



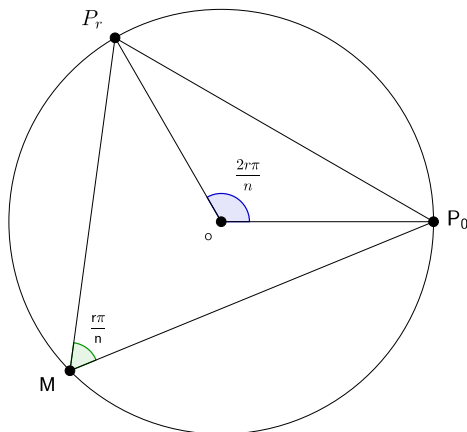
*Démonstration.* 1. Calculons d'abord la longueur des diagonales reliant  $P_0$  à  $P_r$ .

Si  $r = 0$ , on se dit que la longueur est 0.

Sinon, on sait que notre  $n$ -gone est inscrit dans un cercle de centre  $O$ . On sait aussi que l'angle  $\widehat{P_0OP_r}$  vaut  $\frac{2r\pi}{n}$ .

On peut rajouter un point  $M$  sur le cercle qui ne soit pas confondu avec les 2 points déjà présents. D'après le théorème de l'angle au centre, l'angle  $\widehat{P_0MP_r}$  vaut  $\frac{r\pi}{n}$ .

On a la figure suivante :



Alors d'après la loi des sinus, on a  $\frac{P_0P_r}{\sin(\frac{r\pi}{n})} = 2R$  avec  $R$  le rayon du cercle. En  $r = 1$ , on a  $2R = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ , donc  $P_0P_r = \frac{\sin(\frac{r\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ .

2. Montrons que la diagonale  $(f_r)$  ( $-1 \leq r \leq n-2$ ) où  $f_r = \frac{\sin(\frac{(r+1)\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}$  engendre une diagonale  $(g_r)$  à sa droite identique à celle des  $(f_{r-1})$  (il faut prendre en compte le décalage d'indice).

Cela prouvera que la frise obtenue est constante (en translatant la diagonale et en refaisant le même raisonnement à gauche).

Pour cela, on fait une récurrence sur les  $g_r$  en montrant que  $g_r = \frac{\sin(\frac{r\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ .

$$g_0 = 0 = \frac{\sin(\frac{0\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

Si la propriété est vraie au rang  $r \geq 0$ , on sait que  $g_{r+1} = \frac{1+g_r f_{r+1}}{f_r}$ .

$$\text{Donc } g_{r+1} = \frac{1 + \frac{\sin(\frac{r\pi}{n})\sin(\frac{(r+2)\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})^2}}{\frac{\sin(\frac{(r+1)\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}}$$

$$g_{r+1} = \frac{\sin(\frac{\pi}{n})^2 + \frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{n}) - \frac{1}{2}\cos(\frac{2(r+1)\pi}{n})}{\sin(\frac{(r+1)\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})}$$

$$\text{Or } \sin(\frac{\pi}{n})^2 = \frac{1 - \cos(\frac{2\pi}{n})}{2}$$

$$\text{Donc } g_{r+1} = \frac{\frac{1 - \cos(\frac{2(r+1)\pi}{n})}{2}}{\sin(\frac{(r+1)\pi}{n})\sin(\frac{\pi}{n})}$$

Soit  $g_{r+1} = \frac{\sin(\frac{(r+1)\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ .

3. Montrons que cette forme de frise constante est l'unique possible.

Soit  $\mathcal{F}$ , une frise d'ordre  $n$  constante. On s'intéresse à la diagonale des  $(f_s)$ .

On sait que  $f_{-1} = 0$  et  $f_0 = 1$ . On pose  $f_1 = 2x$ .

On a alors pour tout  $s \in \llbracket -1, n-3 \rrbracket$ ,  $f_{s+2} = 2xf_{s+1} - f_s$ .

D'où les  $f_s$  sont des polynômes en  $x$  et même les  $f_s$  sont des polynômes de Tchebychev de deuxième espèce! (Magie!)

On sait alors que  $f_{n-1}(x) = 0$ . Or les racines du  $(n-1)$ -ième polynôme de Tchebychev sont les  $\cos(\frac{k\pi}{n})$  avec  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

Nécessairement  $f_1$  est de la forme  $2\cos(\frac{k\pi}{n})$

Un autre résultat sur les polynômes de Tchebychev nous dit que  $f_s(\cos(\theta)) = \frac{\sin((s+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ .

Donc si on fixe  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a accès aux  $f_s$  :  $f_s = \frac{\sin(\frac{(s+1)k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}$ .

Maintenant que l'on a les coefficients possibles de frises constantes d'ordre  $n$ , il faut voir quels coefficients engendrent une frise constante.

Le problème ne vient pas de la règle unimodulaire, ni du fait que les frises obtenues sont constantes, mais plutôt de la positivité des coefficients.

En effet, on doit s'assurer que tous les  $f_s$  sont positifs non nuls pour  $s \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

Or  $\sin(\frac{k\pi}{n})$  est toujours positif donc il faut que  $\sin(\frac{sk\pi}{n})$  soit positif non nul pour tout  $s \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

- Si  $k = 1$ , on a vu au dessus que l'on obtenait une frise constante.

- Si  $k = 2$ , on pose  $s_0 = n-1$ .

Alors  $\sin(\frac{2s_0\pi}{n}) = \sin(2\pi - \frac{2\pi}{n})$

Or  $0 < 2 < n$  donc  $\sin(\frac{2s_0\pi}{n}) < 0$ .

Donc on n'obtient pas une frise car au moins un coefficient est négatif ou nul.

- Si  $k \geq 3$ , on fait la division euclidienne de  $n$  par  $k$  :  $n = kq + r$  avec  $0 \leq r < k$ .

On a  $q \leq \frac{n}{k} \leq \frac{n}{3}$ .

Or  $\frac{n}{3} \leq n-2 \iff n \geq 3 \iff VRAI$ , donc  $q \leq n-2$ .

On peut donc poser  $s_0 = q+1$  et alors  $s_0 \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

On obtient donc  $\sin(\frac{s_0 k \pi}{n}) = \sin(\frac{(n-r+1)\pi}{n}) = \sin(\pi + \frac{(k-r)\pi}{n})$ .

Comme  $n > k-r > 0$ ,  $\sin(\frac{s_0 k \pi}{n}) < 0$ .

Donc on n'obtient pas une frise car au moins un coefficient est négatif ou nul.

La seule frise constante d'ordre  $n$  est donc bien celle construite géométriquement avec le polygone ( $k = 1$ ).

□

## 3.2 Suites de Farey

On a vu le lien qu'ont les frises avec les triangulations de polygone. Il existe un autre lien, celui avec les suites de Farey. Mais pour commencer, on va d'abord étudier ces suites de plus près.

**Définition 10.**

On appelle  $F_n$  la  $n$ -ième suite de Farey. C'est la suite croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 dont le dénominateur est inférieur ou égal à  $n$ .

Par exemple,  $F_1 = (0, 1)$  et  $F_2 = (0, \frac{1}{2}, 1)$ .

**Proposition 10.**

Soient  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$  deux termes successifs de  $F_n$  alors :

- la première fraction apparaissant entre  $\frac{p_1}{q_1}$  et  $\frac{p_2}{q_2}$  dans les suites de Farey suivantes  $F_n$  est  $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$ ,
- $p_2q_1 - p_1q_2 = 1$ .

**Lemme 6.**

Soient  $\frac{p_1}{q_1}$  et  $\frac{p_2}{q_2}$  deux rationnels positifs tels que  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$  et  $p_2q_1 - p_1q_2 = 1$ , alors pour tout nombre rationnel  $\frac{a}{b}$  tel que  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{a}{b} < \frac{p_2}{q_2}$ , il existe  $u$  et  $v$  deux entiers dans  $\mathbb{N}^*$  tels que  $a = p_1u + p_2v$  et  $b = q_1u + q_2v$ .

*Démonstration.* Soit  $\frac{a}{b}$  une fraction telle que  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{a}{b} < \frac{p_2}{q_2}$ . On pose  $u = bp_2 - aq_2$  et  $v = q_1a - p_1b$ , alors  $a = p_2v + p_1u$  et  $b = q_1u + q_2v$  car  $p_2q_1 - p_1q_2 = 1$  (il suffit de développer pour le voir). Puis  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{a}{b} < \frac{p_2}{q_2}$  donc  $u$  et  $v$  sont positifs strictement.  $\square$

On peut maintenant prouver la proposition précédente.

*Démonstration.* - Soient  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$  deux termes successifs de  $F_n$ . Soit  $\frac{a}{b}$  une fraction irréductible telle que  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{a}{b} < \frac{p_2}{q_2}$ .

On déduit du lemme précédent que il existe  $u$  et  $v$  tels que  $a = p_1u + p_2v$  et  $b = q_1u + q_2v$ , donc  $b \geq q_1 + q_2$ .

Comme on a supposé que  $\frac{a}{b}$  était irréductible, on en déduit que si il existe une fraction irréductible de dénominateur  $q_1 + q_2$  située entre  $\frac{p_1}{q_1}$  et  $\frac{p_2}{q_2}$  alors celle-ci apparaît en premier dans les suites de Farey suivant  $F_n$ .

Si il existe une telle fraction alors elle vérifie  $u = v = 1$ , donc cette fraction est  $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$ .

On a alors  $q_1(p_1 + p_2) - p_1(q_1 + q_2) = 1$  donc c'est une fraction irréductible.

Puis  $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_1q_1+p_2q_1-p_1q_1-p_1q_2}{q_1(q_1+q_2)} = \frac{1}{q_1(q_1+q_2)} > 0$  et  $\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} = \frac{p_2q_1+p_2q_2-p_1q_2-p_2q_2}{q_2(q_1+q_2)} = \frac{1}{q_2(q_1+q_2)} > 0$  donc  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} < \frac{p_2}{q_2}$ .

On a donc bien le résultat voulu :  $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$  est la première fraction apparaissant entre  $\frac{p_1}{q_1}$  et  $\frac{p_2}{q_2}$ .

On remarque qu'elle apparaît pour la première fois dans la suite  $F_{q_1+q_2}$  et qu'elle est alors l'unique nouvelle fraction entre  $\frac{p_1}{q_1}$  et  $\frac{p_2}{q_2}$ .

- La seconde propriété de la proposition est vraie pour  $n=1$ .

Soit  $n \geq 1$ , on suppose la propriété vraie pour tous les nombres rationnels dans  $F_n$ .



Soient  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$  deux termes successifs de  $F_{n+1}$ .

Ces fractions ne peuvent pas être présentes toutes les deux dans  $F_{n+1}$  et absentes dans  $F_n$  car on a vu dans la première partie de cette preuve que dans  $F_{n+1}$ , on ne peut rajouter au maximum qu'un seul terme entre deux éléments consécutifs qui étaient présents dans  $F_n$ .

Si  $\frac{p_1}{q_1}$  et  $\frac{p_2}{q_2}$  sont dans  $F_n$  alors  $p_2q_1 - p_1q_2 = 1$  par hypothèse de récurrence.

Si une des deux fractions n'est pas dans  $F_n$ , par exemple  $\frac{p_1}{q_1}$ , alors celle-ci est comprise entre deux termes consécutifs de  $F_n$ ,  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{p_2}{q_2}$ .

On a  $p_1 = a + p_2$  et  $q_1 = b + q_2$  et  $bp_2 - aq_2 = 1$ .

On a alors  $p_1b - q_1a = ab + p_2b - ab - q_2a = 1$ , puis  $p_2q_1 - p_1q_2 = p_2b + p_2q_2 - aq_2 - p_2q_2 = 1$ .

Par récurrence, la propriété est prouvée. □

On peut maintenant étendre les suites de Farey sur les rationnels entre 0 et  $\infty$ . Pour cela, on a juste à redéfinir  $F_n$  comme la suite croissante des rationnels positifs dont le dénominateur et le numérateur sont inférieurs ou égaux à  $n$ . On rajoute en plus le dernier terme comme " $\frac{1}{0} = \infty$ ". On gardera les mêmes notations.

On remarque qu'on a juste rajouté le "symétrique" par rapport à 1.

Par exemple, on le voit sur  $F_3 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0})$ .

La conservation des propriétés de la proposition précédente sur ces nouvelles suites est alors évidente.

**Définition 11.**

On définit la distance de Farey  $d$  sur  $\mathbb{Q} \cup \{\frac{1}{0}\}$  comme suit :

soient  $m_1 = \frac{a_1}{b_1}$  et  $m_2 = \frac{a_2}{b_2}$  dans  $\mathbb{Q} \cup \{\frac{1}{0}\}$ , alors  $d(m_1, m_2) = |a_1b_2 - a_2b_1|$ .

Si  $d(m_1, m_2) = 1$ , on dit que  $m_1$  et  $m_2$  sont voisins.

Remarque : ce n'est pas du tout une distance au sens topologique. L'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée.

**Définition 12.**

On construit le diagramme de Farey d'ordre  $n$  comme le graphe de l'ensemble des points de  $F_n$  que l'on relie par des arêtes suivant ce qui suit.

Dans le diagramme d'ordre 1, on relie 0 à 1, 0 à  $\infty$  et 1 à  $\infty$ .

Les arêtes du diagramme d'ordre  $n + 1$  sont celles du diagramme d'ordre  $n$  auxquelles on rajoute les arêtes reliant les nouveaux points à leur successeur et leur prédécesseur dans la suite.

**Proposition 11.**

Deux sommets sont reliés dans un diagramme de Farey si et seulement si la distance de Farey entre ces deux sommets vaut 1.

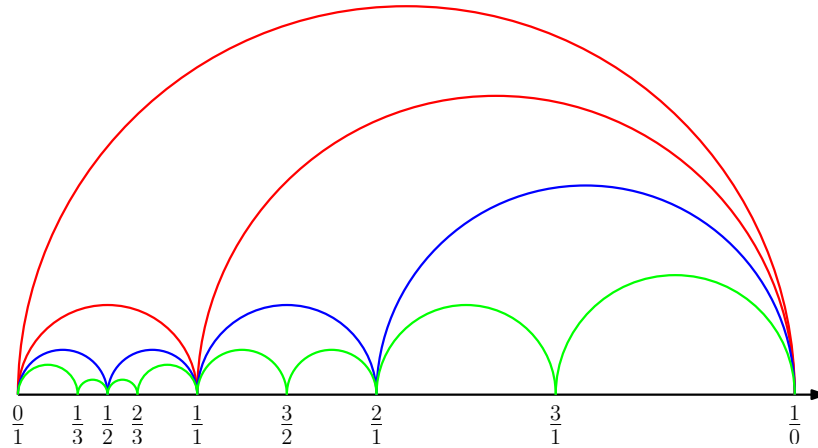
*Démonstration.* La première implication a déjà été prouvée.  
Prouvons la deuxième.

Soient  $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$  deux nombres rationnels positifs tels que  $p_2q_1 - q_2p_1 = 1$ .

Soit  $\frac{a}{b}$  une fraction comprise entre  $\frac{p_1}{q_1}$  et  $\frac{p_2}{q_2}$ . D'après le lemme 6,  $b \geq q_1 + q_2$ .

On en déduit que dans  $F_{\max(p_1, p_2, q_1, q_2)}$ ,  $\frac{p_1}{q_1}$  et  $\frac{p_2}{q_2}$  sont voisins, donc sont reliés par une arête.  $\square$

On peut représenter simplement les diagrammes avec des arcs de cercles.  
Par exemple, voici une telle représentation du diagramme d'ordre 3.



### 3.3 Correspondance entre les frises entières et les suites de Farey

**Définition 13.**

On appelle suite extraite de  $F_n$  une partie ordonnée de  $F_n$  dont tous les éléments sont reliés à leurs voisins sur le diagramme de Farey d'ordre  $n$  et contenant  $\frac{0}{1}$  et  $\frac{1}{0}$ .

Par exemple, une suite extraite de  $F_3$  (dont le diagramme est juste au dessus) est  $(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0})$ .  
On peut adapter nos diagrammes de Farey à ces suites extraites en ne conservant que les points présents dans la suite.

On remarque que, pour que la règle unimodulaire soit vérifiée, le deuxième terme d'une suite extraite est nécessairement de la forme  $\frac{1}{a}$  et l'avant dernier terme est de la forme  $\frac{b}{1}$ .

### Théorème 8.

On peut créer une bijection entre les frises entières d'ordre  $n$  et les suites extraites à  $n$  éléments.

Pour cela, il suffit d'écrire les deux diagonales  $(f_r)$  et  $(g_r)$  de cette manière :  $(\frac{0}{1}, \frac{1}{f_1}, \frac{g_2}{f_2}, \dots, \frac{g_i}{f_i}, \dots, \frac{g_{n-2}}{1}, \frac{1}{0})$ . On obtient alors la suite extraite correspondante, et vice versa.

*Démonstration.* 1. On se donne les deux diagonales  $(f_r)$  et  $(g_r)$  d'une frise d'ordre  $n$  et on veut montrer que la suite  $(\frac{g_0}{f_0}, \dots, \frac{g_{n-1}}{f_{n-1}})$  est une suite extraite de  $F_{\max((f_i) \cup (g_i))}$ .

Pour cela, on doit d'abord montrer que pour tout  $i$ ,  $\frac{g_{i+1}}{f_{i+1}} > \frac{g_i}{f_i}$ . C'est vrai car  $g_{i+1}f_i - f_{i+1}g_i = 1 > 0$ .

Il faut ensuite montrer que les termes sont tous reliés sur le diagramme de Farey correspondant, mais cela est évident car les termes de la frise vérifient la règle unimodulaire, donc  $d(\frac{g_{i+1}}{f_{i+1}}, \frac{g_i}{f_i}) = g_{i+1}f_i - f_{i+1}g_i = 1$ .

2. Soit une suite extraite de longueur  $n$  de la forme  $(\frac{g_0}{f_0}, \dots, \frac{g_{n-1}}{f_{n-1}})$ .

On s'intéresse à la frise engendrée par les deux diagonales  $(f_r)$  et  $(g_r)$ . La règle unimodulaire est respectée ainsi que les conditions au bord.

Il nous reste à montrer que la frise est entière. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout  $i$ ,  $f_i | f_{i+1} + f_{i-1}$ .

On a  $g_{i+1}f_i - f_{i+1}g_i = 1$  et  $g_i f_{i-1} - f_i g_{i-1} = 1$ , donc en soustrayant une équation à l'autre,  $(f_{i+1} + f_{i-1})g_i = f_i(g_{i-1} + g_{i+1})$ . On a bien le résultat voulu.

Le théorème est ainsi prouvé. □

Remarque : la formule  $(f_{i+1} + f_{i-1})g_i = f_i(g_{i-1} + g_{i+1})$  nous donne aussi que si l'on triangule un  $n$ -gone  $P_0P_1\dots P_{n-1}$  suivant la frise entière dont les premières diagonales sont  $(f_r)$  et  $(g_r)$ , alors le nombre de triangles au point  $P_i$  est donné par  $\frac{g_{i-1} + g_{i+1}}{g_i}$ .

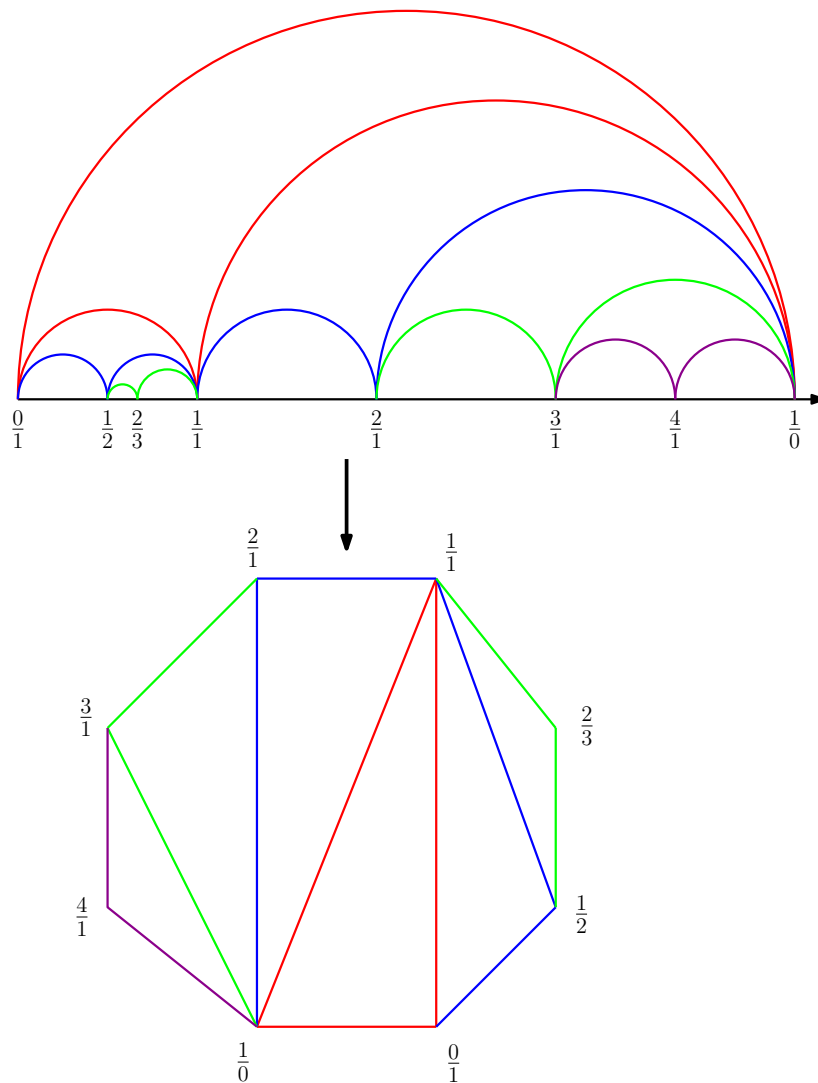
On a de plus  $d(\frac{g_{i-1}}{f_{i-1}}, \frac{g_{i+1}}{f_{i+1}}) = f_{i-1}g_{i+1} - f_{i+1}g_{i-1} = \frac{1+f_i g_{i-1}}{g_i} g_{i+1} - \frac{f_i g_{i+1} - 1}{g_i} g_{i-1} = \frac{g_{i-1} + g_{i+1}}{g_i}$ .

Le nombre de triangles au point  $P_i$  est donné par  $d(\frac{g_{i-1}}{f_{i-1}}, \frac{g_{i+1}}{f_{i+1}})$ .

Maintenant on peut transformer nos diagrammes de Farey pour y voir le rapport avec les triangulations.

Chaque nombre rationnel est associé à un sommet du polygone, et ceci dans l'ordre ( $\frac{0}{1}$  correspond au premier sommet et  $\frac{1}{0}$  au dernier). Deux sommets sont reliés dans le polygone si et seulement si les fractions correspondantes sont reliées dans le diagramme de Farey.

Avec un exemple, cela donne ça :



Cette triangulation correspond en fait exactement à celle donnée par la frise associée aux suites extraites par la bijection précédente.

On va prouver cette assertion.

Soit  $P_r$  et  $P_s$  deux sommets d'un n-gone.

Si on suit la triangulation selon la frise,  $P_r$  et  $P_s$  sont reliés si et seulement si  $(r, s) = 1$ .

Si on suit la triangulation selon le diagramme,  $P_r$  et  $P_s$  sont reliés si et seulement si  $d(\frac{f_r}{g_r}, \frac{f_s}{g_s}) = 1$ .

Or  $d(\frac{f_r}{g_r}, \frac{f_s}{g_s}) = |f_r g_s - f_s g_r| = |(r, s)| = (r, s)$ .

Ce sont donc bien les mêmes triangulations !

# Chapitre 4

## Frises additives

### 4.1 Définitions

On a étudié jusqu'ici des arrangements de nombres vérifiant une loi de la forme  $ad - bc = 1$ . On peut se demander ce que cela ferait si on imposait  $ad - bc = e$  mais on voit vite qu'il y aura des problèmes dès la première ligne (sauf si  $e = 0$  et on va voir ce cas ici). On remarque aussi que l'on aurait pu se placer sur un corps  $(K, +, \times)$  et on aurait gardé la majeure partie des propriétés prouvées.

Pour étudier des situations nouvelles, on va étudier ce type de relation :  $a + d = b + c + e$ .

#### Définition 14.

Soit  $(G, +)$  un groupe commutatif et  $e$  un élément de ce groupe.

- Les frises additives sont des arrangements d'éléments de  $G$  organisés en quinconce dans une bande infinie, de sorte que quatre entrées voisines  $a$   $c$   $d$   $b$  vérifient  $a + d = b + c + e$ , et tels que les première et dernière rangées ne soient constituées que de 0.
- Le nombre de rangées est  $n + 1$ , où  $n$  est appelé ordre de la frise ( $n \geq 2$ ).
- $e$  est appelé l'indice de la frise.

Remarques : les frises étudiées dans les chapitres précédents seront nommées frises multiplicatives.

On ne demande plus de positivité des coefficients, cela n'a plus de sens dans un groupe quelconque.

Exemple : ci-dessous, une frise additive sur  $(\mathbb{R}, +)$  d'ordre 4 et d'indice 1.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...	3	0	1	2	3	0	1	2	...
4	2	0	2	4	2	0	2	4	
...	2	1	0	3	2	1	0	3	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

On remarque déjà que les frises additives pourraient être périodiques.

On va maintenant introduire une loi de groupe particulière nommée la loi de NIM.

**Définition 15.**

Soit  $a, b \in \mathbb{N}$ , on note  $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i$  et  $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i 2^i$  les décompositions en binaire de  $a$  et  $b$ .  
 La loi  $XOR$  est définie sur  $\{0, 1\}^2$  par  $XOR(0, 0) = XOR(1, 1) = 0$  et  $XOR(1, 0) = XOR(0, 1) = 1$ .  
 On définit alors l'addition de NIM  $a \oplus b$  par  $\sum_{i=0}^{\infty} XOR(a_i, b_i) 2^i$ .

**Proposition 12.**

$(\mathbb{N}, \oplus)$  est un groupe commutatif de neutre 0.  
 $\forall p \in \mathbb{N}, p \oplus p = 0$  et  $(2p) \oplus (2p + 1) = 1$

On se servira de cette loi pour quelques exemples ou contre-exemples.  
 Sur la page web donnée par [15], on peut trouver un programme calculant automatiquement les additions de NIM.

**Définition 16.**

On impose maintenant sur les frises additives le même réseau que sur les frises multiplicatives.  
 On nomme  $a_i = (i, i + 1)$  les éléments de la deuxième ligne.

On ne définira pas de prolongement des frises, donc les éléments de la frise  $(r, s)$  ont des coordonnées évoluant dans  $\mathbb{Z} \times \llbracket r, r + n \rrbracket$ .

**Définition 17.**

On se fixe un élément du groupe  $e$  (l'indice de la frise). On appelle entier tout élément du groupe s'exprimant comme  $k.e = e + e + \dots + e$  ( $k$  fois).

Par exemple, dans le groupe de NIM, si on fixe  $e$ , les seuls entiers sont 0 et  $e$ .

## 4.2 Une impression de déjà-vu

On garde les propriétés de caractérisation des frises vues précédemment. C'est à dire que si on connaît une diagonale ou une ligne de la frise, on peut reconstruire toute la frise. Mais on a mieux, on a encore des relations entre les éléments de la frise.

**Proposition 13** (analogue de la proposition 4).

$\forall r \in \mathbb{Z}, s \in \llbracket r, r+n \rrbracket, (r, s) = \sum_{i=r}^{s-1} a_i - t_{s-1-r} \cdot e$ , avec  $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$  les nombres triangulaires et la convention qu'une somme vide vaut 0.

*Démonstration.* On va faire une récurrence sur les lignes.

Si  $s = r$ , la relation est vraie ( $0 = 0$ ).

Si  $s - r = 1$ ,  $(r, r+1) = a_r$ .

On suppose la propriété vraie pour  $s - r \leq k$  où  $k \geq 1$  (et pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ ).

Alors on a le motif suivant  $\begin{matrix} & & (r+1, s) \\ & (r, s) & \\ & & (r+1, s+1) \end{matrix}$  présent dans la frise.

Donc  $(r, s+1) = (r, s) + (r+1, s+1) - e - (r+1, s)$

$$(r, s+1) = \sum_{i=r}^{s-1} a_i + \sum_{i=r+1}^s a_i - \sum_{i=r+1}^{s-1} a_i - 2t_{s-1-r} \cdot e + t_{s-2-r} \cdot e - e$$

$$(r, s+1) = \sum_{i=r}^s a_i + \frac{(s-2-r)(s-1-r) - 2(s-1-r)(s-r) - 2}{2} \cdot e$$

$$(r, s+1) = \sum_{i=r}^s a_i - \frac{(s-r-1)(s-r+2)+2}{2} \cdot e$$

$$(r, s+1) = \sum_{i=r}^s a_i - \frac{s^2 - 2rs + r^2 + s - r}{2} \cdot e$$

$$(r, s+1) = \sum_{i=r}^s a_i - \frac{(s-r)(s-r+1)+2}{2} \cdot e$$

$$(r, s+1) = \sum_{i=r}^s a_i - t_{s-r} \cdot e$$

Par récurrence, la propriété est prouvée.  $\square$

**Corollaire 6.**

Une frise additive est entière si et seulement si sa deuxième ligne est entière.

La démonstration est évidente.

**Corollaire 7** (condition de création d'une frise).

Dans une frise additive d'ordre  $n$  et d'indice  $e$ ,  $\forall r \in \mathbb{Z}, \sum_{i=r}^{r+n-1} a_i = t_{n-1} \cdot e$ .

De plus si on se donne les  $a_i$ , si on complète les lignes suivantes en suivant la loi de frise, alors on obtiendra une frise d'ordre  $n$  si et seulement si le critère ci-dessus est vérifié.

*Démonstration.* Pour obtenir une frise d'ordre  $n$  en connaissant la deuxième ligne, il faut et il suffit que la  $(n+1)$ -ème ligne ne soit constituée que de 0.

Soit  $\forall r \in \mathbb{Z}, (r, r+n) = 0 = \sum_{i=r}^{r+n-1} a_i - t_{n-1} \cdot e$ .  $\square$

**Proposition 14** (analogue de la proposition 3).

$$\forall r \in \mathbb{Z} \text{ et } r \leq s \leq r + n - 1, (r, s + 1) - (r, s) + (s - r).e = a_s.$$

*Démonstration.*  $(r, s + 1) - (r, s) + (s - r).e = \sum_{i=r}^s a_i - \sum_{i=r}^{s-1} a_i - t_{s-r}.e + t_{s-1-r}.e + (s - r).e$   
 $(r, s + 1) - (r, s) + (s - r).e = a_s + \frac{(s-1-r)(s-r) - (s+1-r)(s-r) + 2(s-r)}{2}.e$   
 $(r, s + 1) - (r, s) + (s - r).e = a_s$

□

**Théorème 9.**

Une frise additive d'ordre  $n$  est périodique de période divisant  $n$ .

*Démonstration.* Soit  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $(k, k + n) = 0 = \sum_{i=k}^{k+n-1} a_i - t_{n-2}.e$

$$(k + 1, k + n + 1) = 0 = \sum_{i=k+1}^{k+n} a_i - t_{n-2}.e$$

$$\text{Donc } t_{n-2}.e = \sum_{i=k+1}^{k+n} a_i = \sum_{i=k}^{k+n-1} a_i.$$

D'où  $a_k = a_{k+n}$ .

$$\text{Puis } (r + n, s + n) = \sum_{i=r+n}^{s+n-1} a_i - t_{s+n-1-(r+n)}.e$$

$$(r + n, s + n) = \sum_{i=r}^{s-1} a_i - t_{s-1-r}.e$$

$$(r + n, s + n) = (r, s)$$

□

Le théorème est exactement le même que pour les frises multiplicatives !  
 On appelle donc  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  le cycle de quiddité pour continuer l'analogie.

Exemple :

Une frise additive sur  $(\mathbb{N}, \oplus)$  d'ordre 4, d'indice 1 et de période 4 :

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...	2	3	5	4	2	3	5	4	...
7	0	7	0	7	0	7	0	7	0
...	4	5	3	2	4	5	3	2	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Remarquons que l'on a bien  $2 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 4 = 0 = t_3.1$ .

**Corollaire 8** (réécriture des corollaires précédents).

Pour obtenir une frise additive d'ordre  $n$  et d'indice  $e$  à partir d'un cycle de quiddité potentiel, il faut et il suffit que  $a_0 + \dots + a_{n-1} = t_{n-1}.e$ . La frise est entière si et seulement si le cycle de quiddité est entier.



**Proposition 15** (analogue du lemme 4).

En rajoutant  $n.e$  dans le cycle de quiddité d'une frise d'ordre  $n$ , on obtient le cycle de quiddité d'une frise d'ordre  $n + 1$ .

*Démonstration.* Si  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  est le cycle de quiddité de la frise d'ordre  $n$ , on a  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = t_{n-1}.e$ .

Donc  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i + n.e = \frac{(n-1)n+2n}{2}.e = t_n.e$ .

On a bien une frise d'ordre  $n + 1$  engendrée par ce nouveau cycle de quiddité □

Remarque : On n'obtient pas toutes les frises entières par cette méthode, alors que c'était le cas pour les frises multiplicatives.

### 4.3 Dénombrement de frises réelles

On peut se demander combien il existe de frises additives entières d'ordre  $n$  et d'indice  $e$ .

On a vu qu'il suffisait de choisir un cycle de quiddité  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  entier vérifiant  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = t_{n-1}.e$  pour obtenir une frise d'ordre  $n$  entière.

Il suffit donc de regarder tous les éléments du groupe vérifiant cette propriété.

On conclut vite qu'un groupe fini n'engendre qu'un nombre fini de frises entières.

Mais demandons-nous combien de frises entières réelles existent pour  $e \in \mathbb{N}$ .

Il y en a une infinité car on peut fixer un cycle de quiddité qui marche, par exemple,  $(t_{n-1}e, 0, \dots, 0)$ , et le changer en  $(t_{n-1}e - k, k, 0, \dots, 0)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Voyons plutôt les frises additives entières positives d'ordre  $n$  et d'indice 1.

D'abord, combien existe-t-il de cycles de quiddité entiers et positifs tels que  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = t_{n-1}$  ?

**Lemme 7.**

Il existe  $\binom{n-1+\frac{(n-1)n}{2}}{n-1}$  moyens de choisir  $n$  entiers positifs  $a_i$  de telle manière que  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = t_{n-1}$ .

*Démonstration.* Pour cela, il faut voir le problème de manière différente.

On a  $n$  cases séparées par  $n - 1$  barrières (en ligne). On doit mettre  $\frac{(n-1)n}{2}$  balles dans ces cases.

Ce problème revient à choisir  $n - 1$  barrières parmi  $n - 1 + \frac{(n-1)n}{2}$  objets.

Le résultat est bien  $\binom{n-1+\frac{(n-1)n}{2}}{n-1}$ . □

Mais on a oublié quelque chose ! Ce n'est pas parce que le cycle de quiddité est positif que la frise est forcément positive !

**Proposition 16.**

Une frise additive réelle d'ordre  $n$  et d'indice 1 n'est constituée que d'entiers positifs (ou nuls) si et seulement si les  $a_i$  sont entiers et vérifient  $\forall r, s \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{i=r}^{r+s} a_i \geq t_s$ .

*Démonstration.* On sait que  $(r, r+k) = \sum_{i=r}^{r+k-1} a_i - t_{k-1}$ . Donc si  $\sum_{i=r}^{r+k-1} a_i \geq t_{k-1}$ , on a bien  $(r, r+k) \geq 0$ . La réciproque se déduit de la même formule.  $\square$

A priori, on n'a pas de formule explicite permettant de dire combien il existe de frises additives entières positives d'ordre  $n$ .

On peut se dire qu'il y en a au moins  $n!$  car les permutations des entiers dans  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  vérifient toutes les deux propriétés demandées, à savoir :

1.  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = t_{n-1}$
2.  $\forall r, s \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{i=r}^{r+s} a_i \geq t_s$

Néanmoins, il y en a en général plus que  $n!$  ; par exemple, la frise engendrée par  $(1, 1, 1)$  est une frise additive entière positive d'ordre 3 et  $(1, 1, 1)$  n'est pas une permutation de  $(0, 1, 2)$ .

On va donc calculer avec un programme les premiers termes de la suite dénombrant le nombre de frises additives entières positives.

Le programme donnera aussi tous les cycles de quiddité correspondants.

Le premier programme en annexe A est un programme naïf.

1. On commence par créer la gigantesque matrice contenant dans ses lignes tous les  $n$ -uplets dont les coefficients sont entiers et dans  $\llbracket 0, \frac{n(n-1)}{2} \rrbracket$ .
2. On trie ce tableau en ne gardant que les lignes dont les coefficients  $a_i$  vérifient  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = t_{n-1}$ .
3. On trie ensuite selon la deuxième condition :  $\forall r, s \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{i=r}^{r+s} a_i \geq t_s$ .

On a ainsi obtenu l'ensemble des cycles de quiddité engendrant des frises entières positives. Il suffit de compter le nombres de lignes pour obtenir le nombre de frises entière positive de l'ordre choisi.

Le point faible de cet algorithme est le tableau créé au début ; sa taille est de  $(\frac{n(n-1)}{2} + 1)^n$  par  $n$ . Pour  $n = 7$ , le tableau a 17 460 505 216 cases ! C'est pourquoi *Scilab* ne veut pas calculer pour  $n$  trop grand. Il s'arrête à  $n = 6$ .

Les premiers termes de la suite sont 1, 2, 7, 40, 331 et 3660 (le premier terme est la frise nulle).

Apparemment l'OEIS ([16] dans la bibliographie) ne connaît pas de suite contenant ces nombres. Je n'ai donc pas trouvé de rapport amusant avec un autre objet mathématique comme nous l'avons fait dans la première partie.

Après ces calculs, j'ai cherché à optimiser mon programme. Le résultat se trouve en annexe B. Voyons en quoi il consiste.

Le premier but de ce programme était de créer un tableau moins grand au départ. Pour cela, j'ai utilisé le concept de portes qui s'inspire de la démonstration faite dans le lemme 7. Je place  $\frac{n(n-1)}{2}$  uns séparés par des portes. Les portes peuvent être ouvertes (O) ou fermées (F).

Étant donné une suite de 1 séparés par des portes, on peut la transformer en une liste de nombres entiers positifs dont la somme vaut  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Si la porte est ouverte, on somme ; si elle est fermée, on sépare.

Exemples :

1O1O1 donne (3).  
 1F1O1 donne (1, 2).  
 1F1F1 donne (1, 1, 1).  
 1O1F1 donne (2, 1).

Ces listes engendrent notre tableau dont toutes les lignes vérifient  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = t_{n-1}$ . Pour cela, il faut d'abord enlever les listes trop longues, puis rajouter des zéros. Par exemple, (1, 2) donne (1, 2, 0), (1, 0, 2) et (0, 1, 2).

Rajouter les zéros est une étape assez compliquée, on préfère donc mettre des zéros à la fin de notre liste puis calculer l'ensemble des permutations des éléments de cette liste. Enfin on teste si les éléments vérifient  $\forall r, s \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{i=r}^{r+s} a_i \geq t_s$ , puis on enlève les doublons et on obtient une partie du tableau voulu. Ce sont des calculs lourds, mais comme les variables sont locales, on ne manque pas de place pour stocker les données.

Une fois que les entrées données par chaque liste extraite d'une porte sont mises dans une matrice, on enlève les derniers doublons. La taille de cette matrice donne le résultat tant attendu.

La matrice prenant le plus de place est celle contenant les portes (que l'on code par 0 ou 1 selon qu'elle sont ouvertes ou fermées) ; elle est de taille  $2^{\binom{n-1}{2}} - 1$  par  $\frac{n(n-1)}{2} - 1$ . Pour  $n = 7$ , le tableau a 20 971 520 cases, ce qui représente une nette amélioration en terme de stockage de donnée par rapport au tableau du premier algorithme ! Mais comme dit précédemment, cette amélioration est compensée par le temps conséquent pris par le traitement de chaque liste obtenue par le traitement d'une ligne de 1 et de portes, ainsi que le temps pris par la suppression des doublons.

Grâce à ce travail, on peut calculer un nouveau terme de la suite, mais il faudrait un temps énorme. J'ai préféré chercher une autre solution.

J'ai rencontré d'autres chercheurs qui m'ont conseillé un programme nommé *latte*, qui peut calculer exactement ce que je veux.

En fait, les équations que je cherche à résoudre définissent un polytope, et je cherche à dénombrer les points à coordonnées entières placés dans celui-ci.

Après d'épiques tribulations pour installer ce logiciel, on peut finalement compléter notre suite! Les premiers termes de la suite sont donc 1, 2, 7, 40, 331, 3660, 50695, 844700, 16425655, 364819260 et 9104382475.

Ensuite le logiciel *latte* lui-même met trop de temps pour calculer et mon ordinateur n'a pas assez de mémoire.

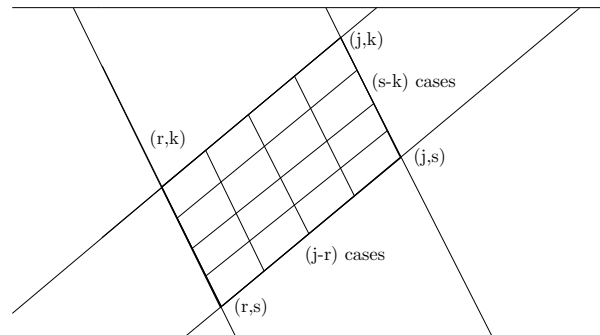
## 4.4 Loi de groupe et frises additives constantes

### A - Théorème de sommation d'une frise et de son translaté

#### Proposition 17.

Soit quatre entiers  $r, j, k, s$  tels que  $r < j \leq k < s \leq r + n$ , alors les points  $(j, k)$ ,  $(j, s)$ ,  $(r, s)$  et  $(r, k)$  sont les sommets d'un parallélogramme d'aire  $(j - r)(s - k)$  si on se donne que chacune des "cases" composant la frise a une aire valant 1.  
De plus,  $(j, k) + (r, s) = (j, s) + (r, k) - (j - r)(s - k).e$ .

*Démonstration.* La figure ci-dessous nous donne tout de suite la propriété géométrique de cette proposition.



$$\begin{aligned}
 & \text{Puis } (j, s) + (r, k) - (j - r)(s - k).e = \sum_{i=r}^{k-1} a_i + \sum_{i=j}^{s-1} a_i - \frac{(k-r-1)(k-r) + (s-j-1)(s-j) + 2js + 2rk - 2rs - 2jk}{2}.e \\
 &= \sum_{i=r}^{s-1} a_i + \sum_{i=j}^{k-1} a_i - \frac{k^2 - 2rk + r^2 + r - k + s^2 + j^2 - 2sj + j - s + 2js + 2rk - 2rs - 2jk}{2}.e \\
 &= \sum_{i=r}^{s-1} a_i + \sum_{i=j}^{k-1} a_i - \left( \frac{k^2 + j^2 - 2jk + j - k}{2} + \frac{r^2 + s^2 - 2rs + r - s}{2} \right).e \\
 &= \sum_{i=r}^{s-1} a_i + \sum_{i=j}^{k-1} a_i - t_{k-1-j}.e - t_{s-1-r}.e \\
 & \text{D'où } (j, k) + (r, s) = (j, s) + (r, k) - (j - r)(s - k).e. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Définition 18.**

On définit la loi de composition interne suivante sur les frises additives de même ordre. Soit  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  deux frises d'ordre  $n$ , alors  $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} + \mathcal{F}'$  est la frise d'ordre  $n$  dont les coefficients sont  $(r, s)_{\mathcal{F}''} = (r, s)_{\mathcal{F}} + (r, s)_{\mathcal{F}'}$ .

**Proposition 18.**

- Cette loi est bien définie.
- Soit  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  deux frises d'ordre  $n$  et d'indice  $e$  et  $e'$ , alors  $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} + \mathcal{F}'$  est une frise d'ordre  $n$  et d'indice  $(e + e')$ .
- Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont entières alors  $\mathcal{F} + \mathcal{F}'$  est entière.
- C'est une loi de groupe commutative sur l'ensemble des frises additives d'ordre  $n$ .

*Démonstration.* Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  le cycle de quiddité de  $\mathcal{F}$ , et  $(a'_0, \dots, a'_{n-1})$  celui de  $\mathcal{F}'$ . Pour prouver les deux premières propriétés, il nous suffit de calculer la somme des éléments du cycle de quiddité de  $\mathcal{F}''$ .

$$(a_0 + a'_0) + \dots + (a_{n-1} + a'_{n-1}) = (a_0 + \dots + a_{n-1}) + (a'_0 + \dots + a'_{n-1}) = t_{n-1} \cdot e + t_{n-1} \cdot e' = t_{n-1} \cdot (e + e')$$

La somme des frises est donc bien une frise et elle a pour indice  $e + e'$ .

La troisième propriété est évidente.

La quatrième découle directement du fait que la loi  $+$  du groupe auquel appartiennent les coefficients des frises est une loi de groupe commutative.

Le neutre pour cette loi est la frise dont tous les coefficients sont nuls. □

Remarque : Sur les frises réelles, on peut rajouter l'opération de multiplication des frises par une constante réelle. Cela confie aux frises additives réelles une structure d'espace vectoriel. De plus si  $\mathcal{F}$  est une frise d'indice  $e$ , alors  $k \times \mathcal{F}$  est une frise d'indice  $ke$ .

**Théorème 10.**

Soit  $\mathcal{F}$  une frise d'ordre  $n$  et d'indice  $e$ , on appelle  $\mathcal{F}^*$  la frise  $\mathcal{F}$  à qui on a fait subir une translation de  $\frac{n}{2}$  cases à droite suivie d'une symétrie axiale par rapport à la ligne horizontale du centre de la frise. C'est à dire  $(r, s)_{\mathcal{F}^*} = (s, r + n)_{\mathcal{F}}$ .

Alors  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} + \mathcal{F}^*$  est une frise constante entière d'indice  $2e$  et d'ordre  $n$ .

De plus, les coefficients de la  $i$ -ème ligne de cette frise valent  $(i - 1)(n - i + 1) \cdot e$ .

Exemple : Reprenons la frise  $\mathcal{F}$  de NIM de la section 4.2.

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	...	3	2	4	5	3	2	4	5	...
$\mathcal{F}^*$ est alors	7	0	7	0	7	0	7	0	7	
	...	5	4	2	3	5	4	2	3	...
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

On en déduit la frise constante associée à  $\mathcal{F}$  :  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} + \mathcal{F}^*$ .

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Les lignes de  $\mathcal{F}_0$  portent bien les coefficients  $(i-1)(5-i).1$ .

*Démonstration.* On utilise la relation de la proposition 17.

On pose  $j = k$  et  $s = r + n$ , ainsi  $r < k \leq k < r + n$ .

On a  $(k, k) + (r, r + n) = (k, r + n) + (r, k) - (k - r)(r + n - k).e$ .

$(k, r + n) + (r, k) = (k - r)(r + n - k).e$  ( $\forall r \in \mathbb{Z}$  et  $r < k < r + n$ , mais on peut étendre cette formule à  $k = r$  et  $k = r + n$ ).

On en déduit que  $(r, k)_{\mathcal{F}} + (r, k)_{\mathcal{F}^*} = (k - r)(r + n - k).e$ .

Sur la ligne  $i$ ,  $k = r + i - 1$ , donc  $(r, r + i - 1)_{\mathcal{F}} + (r, r + i - 1)_{\mathcal{F}^*} = (i - 1)(n - i + 1).e$ .

On a bien une frise constante. Elle est d'indice  $2.e$  car  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^*$  sont d'indice  $e$ .

Pour finir les coefficients sont bien ceux annoncés. □

## B - Frises constantes réelles

Le but ici va être de prouver qu'il existe une unique frise constante additive réelle d'ordre  $n$ , par analogie avec les frises multiplicatives. On va ensuite mettre cette frise en relation avec un objet géométrique.

On sait déjà que pour tout  $n$ , pour tout  $e$ , il existe une frise constante réelle d'ordre  $n$  et d'indice  $e$ . En effet, il suffit de prendre une frise réelle quelconque d'indice  $e$  et d'ordre  $n$ , puis de la sommer avec son translaté pour obtenir une frise constante d'indice  $2e$ . Ensuite on multiplie tous les coefficients par  $\frac{1}{2}$  pour obtenir une frise constante réelle d'indice  $e$  et d'ordre  $n$ .

Prouvons maintenant l'unicité.

Soit  $\mathcal{F}_0$  une frise constante réelle d'ordre  $n$  et d'indice  $e$ . Notons  $a$  le coefficient de la deuxième ligne.

Alors  $(r, r + n) = 0 = na - t_{n-1}e$ . Donc  $na = \frac{n(n-1)}{2}e$ .

C'est maintenant que l'on utilise le fait que la frise est réelle, on obtient  $a = \frac{n-1}{2}e$ .

La première ligne étant fixée, il n'existe qu'une unique frise constante réelle d'ordre  $n$  et d'indice  $e$ .

### Théorème 11.

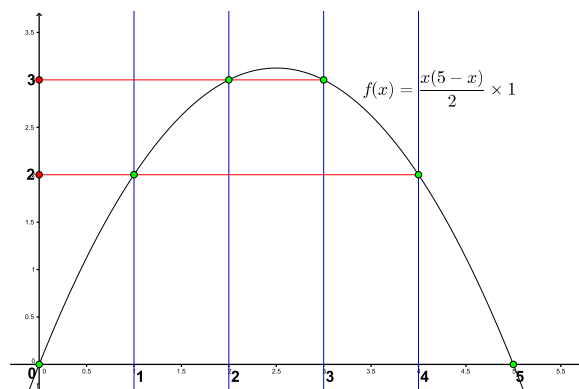
Il existe une unique frise réelle constante d'ordre  $n$  et d'indice  $e$  que l'on note  $\mathcal{F}_0^n(e)$ .  
Les coefficients de la ligne  $i$  sont données par  $\frac{(i-1)(n-i+1)}{2}e$ .

Le rapport avec la géométrie tient dans le fait qu'on peut faire correspondre à  $\mathcal{F}_0^n(e)$  la parabole d'équation  $f(x) = \frac{x(n-x)}{2}e$ .

Le coefficient de la  $i$ -ème ligne de  $\mathcal{F}_0^n(e)$  est alors donnée par  $f(i-1)$ .

Exemple :

0	0	0	0	...
...	2	2	2	2
3	3	3	3	...
...	3	3	3	3
2	2	2	2	...
...	0	0	0	0



**Corollaire 9 (seconde symétrie).**

Soit  $\mathcal{F}$  une frise d'ordre  $n$  et d'indice  $e$ , alors  $\mathcal{F} = 2\mathcal{F}_0^n(e) - \mathcal{F}^*$ .

Ce corollaire évident a acquis un intérêt grâce au fait que l'on connaît exactement  $\mathcal{F}_0^n(e)$ .

### C - Frises constantes de NIM

On a vu qu'il existait une unique frise constante réelle d'ordre  $n$ ; malheureusement l'analogie s'arrête lorsque l'on sort du cas réel. On va montrer ici qu'il existe souvent plusieurs frises constantes de NIM d'ordre  $n$ .

On se donne une frise  $\mathcal{F}_0$  constante de NIM d'ordre  $n$  et d'indice  $e$ . On note de la même manière qu'auparavant  $a$  l'élément de la seconde ligne.

Alors on a  $n.a = \frac{n(n-1)}{2}.e$ .

On ne peut pas en déduire grand chose car on ne peut simplifier par  $n$  en général. On va donc plutôt regarder à quoi ressembleront les coefficients ligne par ligne.

On note  $h_i$  le coefficient de la ligne  $i$ .

Avec quelques calculs, on obtient que la suite des  $h_i$  est  $(0, a, e, a+e, 0, a, e, a+e, 0, a, e, a+e, \dots)$ .

$$\text{D'où } \forall u \in \mathbb{N}, \begin{cases} h_{4u+1} &= 0 \\ h_{4u+2} &= a \\ h_{4u+3} &= e \\ h_{4u+4} &= a+e \end{cases}$$

1. Si  $n = 2p + 1$ , alors  $n.a = a = p(2p + 1).e = p.e$ . La frise est donc bien unique.
2. Si  $n = 4p$ , il faut que la  $(n + 1)$ -ème ligne ne soit constituée que de 0. Or  $h_{n+1} = h_{4p+1} = 0$ , donc c'est bon, on obtient bien une frise.

Par contre, on a pris  $a$  quelconque. L'unicité n'est pas vérifiée, on a une infinité (dénombrable) de frises de NIM constantes d'ordre  $n = 4p$  et d'indice  $e$ .

3. Si  $n = 4p + 2$ , il faut que  $h_{n+1} = 0$ . Or  $h_{n+1} = h_{4p+3} = e$ . Donc  $e = 0$ . On a encore une infinité (dénombrable) de frises possibles, mais ici on remarque qu'un motif binaire se répète dans la frise ; en effet, les lignes font  $(0, a, 0, a, 0, a, \dots)$ .

Les résultats d'unicité des frises constantes ne sont donc pas valables pour n'importe quelle frise additive.



# Chapitre 5

## 2-Frises

### 5.1 Définitions

**Définition 19.**

- Les 2-frises algébriques sont des grilles de fractions rationnelles réelles ou complexes telles que chacun de leurs coefficients  $e$  soit entouré d'une matrice  $2 \times 2$  de déterminant  $e$  formée par ses voisins, ou soit sur les bords de la frise.

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ a & e & d \\ & b & \end{array}$$
 C'est à dire  $a \quad e \quad d$  vérifie  $ad - bc = e$ .

Elle est bornée par une ligne de 0 suivie d'une ligne de 1 en haut.

- On peut comme précédemment imposer un réseau sur nos 2-frises (en fait c'est plutôt un réseau double, comme deux frises superposées l'une sur l'autre).

$$\begin{array}{cccccc} (0, 0) & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (1, 1) & (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) & (2, 2) & (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) \\ (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & (0, 1) & (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) & (1, 2) & (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) & (2, 3) \\ (-1, 1) & (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) & (0, 2) & (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) & (1, 3) & (\frac{3}{2}, \frac{7}{2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

- On appelle  $A_i$  le coefficient de la troisième ligne de la forme  $(i - 1, i + 1)$  et  $B_i$  le coefficient  $(i - \frac{1}{2}, i + \frac{3}{2})$ .
- On note  $\Delta_i$  le vecteur contenant (dans l'ordre) les éléments de la  $i$ -ième diagonale ( $i \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ ). C'est à dire que la  $j$ -ième coordonnée de  $\Delta_i$  est  $\Delta_i(j) = (i, i + j - 1)$  ( $j \geq 1$ ).
- De même, on note  $\overline{\Delta}_i$  le vecteur contenant l'antidiagonale, soit  $\overline{\Delta}_i(j) = (i - j + 1, i)$ .

On remarque que la connaissance de deux rangées consécutives permet d'accéder à tous les coefficients de la frise.

Les 2-frises sont donc déterminées complètement par les  $A_i$  et les  $B_i$ . C'est pourquoi on note une 2-frise  $\mathcal{F}(A_i, B_i)$ .

Mais plus intéressant que cela, on remarque que pour une 2-frise algébrique, les coefficients de toutes les lignes sont des polynômes en les  $A_i$  et les  $B_i$ .

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
A_0 & B_0 & A_1 & B_1 & A_2 & \dots \\
\dots & A_0A_1 - B_0 & B_0B_1 - A_1 & A_1A_2 - B_1 & B_1B_2 - A_2 & \dots \\
\dots & \dots & A_0A_1A_2 - A_0B_1 - B_0A_2 + 1 & B_0B_1B_2 - A_1B_2 - A_2B_0 + 1 & A_0A_1A_2A_3 - A_0A_1B_2 - A_0A_3B_1 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & -A_2A_3B_0 + B_0B_2 + A_0 + A_3 & \dots
\end{array}$$

Il en résulte que plutôt que de construire les 2-frises numériques, contenant des nombres réels, comme des grilles de nombres réels positifs et non nuls, on peut les construire comme l'évaluation de frises algébriques. On s'autorise ainsi des 0 dans la frise tout en gardant les propriétés algébriques.

On comprend mieux cela en complétant une frise soi-même : on a des relations du type  $ad = bc + e$ . Si on veut  $c$ , on sera obligé de diviser par  $b$ . Mais si  $b = 0$ , on peut mettre n'importe quoi pour  $c$ . L'astuce des polynômes est que l'on remarque que les coefficients ne sont en réalité que des polynômes et pas des fractions rationnelles en les  $A_i$  et les  $B_i$ . Il s'agit de ne pas déduire les coefficients de la  $k$ -ième ligne à partir de la  $(k-1)$ -ième, mais plutôt de tout déduire directement de la troisième ligne.

**Définition 20.**

Une 2-frise numérique est l'évaluation d'une 2-frise algébrique pour deux familles de réels ou complexes  $(a_i)$  et  $(b_i)$ .

On la note  $\mathcal{F}(A_i, B_i)|_{(A_i=a_i, B_i=b_i)} = \mathcal{F}(a_i, b_i)$ .

On dit que la frise est close si à un moment, on obtient une rangée de 1 suivie d'une rangée de 0.

Le nombre de rangées entre les deux rangées de 0 d'une frise close (en comptant celles avec les 0) est appelé ordre de la 2-frise. On le note  $n$ . Ces rangées sont appelées motif de la 2-frise.

Une 2-frise dont tous les coefficients sont entiers, positifs et non-nuls sera appelé 2-frise arithmétique.

Exemple : un motif de 2-frise arithmétique close de nombres réels d'ordre 6

On remarque que si on doit compléter notre motif au dessous et au dessus, on est obligé de mettre d'abord une ligne de 0.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
\dots & 1 & 1 & 4 & 6 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 & \dots \\
\dots & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 & 1 & 1 & 4 & 6 & 2 & 1 & \dots \\
\dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
\end{array}$$

Remarques :

- On a  $(r-1, s)(r, s+1) - (r, s)(r-1, s+1) = (r - \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2})$  pour  $r \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$  et  $s \geq r-1$ .
- La connaissance des  $a_i$  et des  $b_i$  nous permet de compléter une 2-frise (si on connaît la frise algébrique dont elle est issue). On peut les prendre quelconque, mais en général ils n'engendrent pas une 2-frise close (il ne donne pas de ligne de 1 suivie d'une ligne de 0).

- La connaissance de deux diagonales (ou deux antidiagonales) se touchant nous donne la connaissance de toute la frise. On peut les prendre quelconques. On verra plus loin les conditions pour obtenir une 2-frise close avec les diagonales.

## 5.2 Relations importantes

On va retrouver ici le même genre de relations que pour les frises de Coxeter-Conway. Mais pour les prouver, on va utiliser une nouvelle formule : la formule de Dodgson.

### Lemme 8 (Formule de Dodgson).

Si  $M$  est une matrice carrée,  $a, c, e, g$  sont des réels et  $b, d, f, h$  sont des vecteurs dont la taille est la largeur de  $M$ , alors

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ b & M & f \\ c & d & e \end{vmatrix} \times |M| = \begin{vmatrix} a & h \\ b & M \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M & f \\ d & e \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & M \\ c & d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} h & g \\ M & f \end{vmatrix}$$

*Démonstration.* Soit  $A = \begin{pmatrix} a & h & g \\ b & M & f \\ c & d & e \end{pmatrix}$  une matrice carrée  $n \times n$  avec  $n \geq 3$ , on appellera  $\Delta_{i,j}$  et  $\delta_{i,j}$  le cofacteur et le mineur ligne  $i$  et colonne  $j$  de  $A$ .

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta_{n,1} \\ \Delta_{1,2} & 1 & 0 & \dots & 0 & \Delta_{n,2} \\ \Delta_{1,3} & 0 & 1 & \dots & 0 & \Delta_{n,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{1,n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & \Delta_{n,n-1} \\ \Delta_{1,n} & 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ alors } AB = \begin{pmatrix} \det(A) & h & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & d & \det(A) \end{pmatrix}.$$

En effet, on sait que  $A \times \text{Com}(A)^T = \det(A)I_n$  donc en particulier  $A \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} \\ \Delta_{1,2} \\ \Delta_{1,3} \\ \vdots \\ \Delta_{1,n-1} \\ \Delta_{1,n} \end{pmatrix} = \det(A) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Il en va de même pour la dernière colonne de  $B$ .

On remarque alors que  $\det(AB) = \det(A)^2 \det(M)$ .

$$\text{Puis } \det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(A)(\Delta_{1,1}\Delta_{n,n} + (-1)^{n+1}\Delta_{n,1} \begin{pmatrix} \Delta_{1,2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta_{1,3} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1,n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \Delta_{1,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où  $\det(AB) = \det(A)(\delta_{1,1}\delta_{n,n} + \delta_{n,1}(-1)^n \Delta_{1,n})$ .

On divise par  $\det(A)$  des deux côtés de l'égalité pour obtenir le résultat voulu :  $\det(A)\det(M) = \delta_{1,1}\delta_{n,n} - \delta_{n,1}\delta_{1,n}$ . On peut diviser par  $\det(A)$  car on le considère comme un polynôme sur les coefficients de la matrice  $A$ , il est alors de degré positif.  $\square$

**Proposition 19.**

Dans une 2-frise algébrique,  $\forall r, s \in \mathbb{Z}$  tels que  $s \geq r + 2$ ,

$$(r, s) = \begin{vmatrix} A_{r+1} & B_{r+1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & A_{r+2} & B_{r+2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & A_{r+3} & B_{r+3} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & A_{s-3} & B_{s-3} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & A_{s-2} & B_{s-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & A_{s-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{et } (r + \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} B_{r+1} & A_{r+2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & B_{r+2} & A_{r+3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & B_{r+3} & A_{r+4} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & B_{s-3} & A_{s-2} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & B_{s-2} & A_{s-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & B_{s-1} \end{vmatrix}.$$

Remarque : Ce résultat concorde bien avec le fait que les coefficients de la frise sont des polynômes en les  $A_i$  et les  $B_i$ .

*Démonstration.* Pour  $s - r = 2$ ,  $(r, s) = A_{r+1} = |(A_{r+1})|$  et  $(r + \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}) = B_{r+1} = |(B_{r+1})|$ .

Pour  $s - r = 3$ ,  $(r, s) = A_{r+1}A_{r+2} - B_{r+1} = \begin{vmatrix} A_{r+1} & B_{r+1} \\ 1 & A_{r+2} \end{vmatrix}$  et  $(r + \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}) = B_{r+1}B_{r+2} - A_{r+2} = \begin{vmatrix} B_{r+1} & A_{r+2} \\ 1 & B_{r+2} \end{vmatrix}$ .

Pour  $s - r = 4$ , ça marche aussi.

On suppose la propriété vraie pour tout  $(r', s')$  tels que  $4 \leq s' - r' \leq k$ .

Soit  $r, s$  tels que  $s - r = k$ , alors observons  $(r, s + 1)$ .

On a  $(r, s)(r + 1, s + 1) - (r + 1, s)(r, s + 1) = (r + \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2})$ .

On appelle  $M$  la matrice associée à  $(r + 1, s)$ ,  $b$  le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $d$  le vecteur  $(0 \dots 0, 1)$ ,  $f$  le

vecteur  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ B_{s-1} \end{pmatrix}$ ,  $h$  le vecteur  $(B_{r+1}, 1, 0 \dots 0)$ .

On réécrit la formule précédente sous forme matricielle en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$(r, s + 1) \times |M| = \begin{vmatrix} A_{r+1} & h \\ b & M \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M & f \\ d & A_s \end{vmatrix} - \det \begin{pmatrix} h & 0 \\ M & f \end{pmatrix}^T$$

Puis  $\begin{vmatrix} b & M \\ 0 & d \end{vmatrix} = 1$  (matrice triangulaire n'ayant que des 1 sur la diagonale).

On a donc  $(r, s + 1) \times |M| = \begin{vmatrix} A_{r+1} & h \\ b & M \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M & f \\ d & A_s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h & 0 \\ M & f \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b & M \\ 0 & d \end{vmatrix}$ .

On peut alors utiliser la formule de Dodgson.

$$(r, s + 1)(r + 1, s) = \begin{vmatrix} A_{r+1} & h & 0 \\ b & M & f \\ 0 & d & A_s \end{vmatrix} (r + 1, s)$$

Comme  $(r+1, s)$  est un polynôme non nul (car de degré strictement supérieur à 0) en les  $A_i$  et

les  $B_i$ , on a  $(r, s + 1) = \begin{vmatrix} A_{r+1} & h & 0 \\ b & M & f \\ 0 & d & A_s \end{vmatrix}$  et c'est le résultat voulu.

Les calculs pour  $(r + \frac{1}{2}, s + \frac{3}{2})$  sont similaires.

Par récurrence, la propriété est prouvée.  $\square$

**Proposition 20.**

$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall j \geq 4$

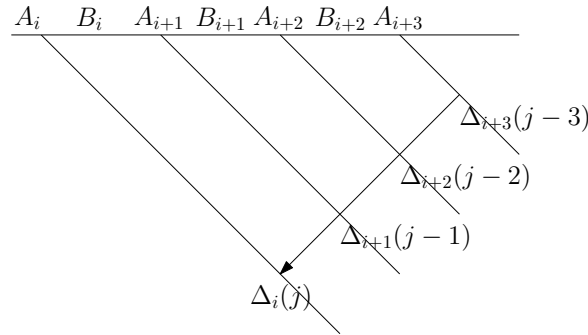
$$\Delta_i(j) = A_{i+1}\Delta_{i+1}(j-1) - B_{i+1}\Delta_{i+2}(j-2) + \Delta_{i+3}(j-3)$$

$$\overline{\Delta}_i(j) = A_{i-1}\overline{\Delta}_{i-1}(j-1) - B_{i-2}\overline{\Delta}_{i-2}(j-2) + \overline{\Delta}_{i-3}(j-3)$$

$$\Delta_{i+\frac{1}{2}}(j) = B_{i+1}\Delta_{i+\frac{3}{2}}(j-1) - A_{i+2}\Delta_{i+\frac{5}{2}}(j-2) + \Delta_{i+\frac{7}{2}}(j-3)$$

$$\overline{\Delta}_{i+\frac{1}{2}}(j) = B_{i-1}\overline{\Delta}_{i-\frac{1}{2}}(j-1) - A_{i-1}\overline{\Delta}_{i-\frac{3}{2}}(j-2) + \overline{\Delta}_{i-\frac{5}{2}}(j-3)$$

*Démonstration.* Il faut utiliser la formule précédente puis développer le déterminant par rapport aux lignes ou colonnes des matrices obtenues. Le résultat vient tout seul avec les calculs.  $\square$



On peut voir sur la figure ci-dessus une vision plus géométrique de la proposition précédente.

## 5.3 Périodicité des 2-frises closes

### Théorème 12.

Soit  $\mathcal{F}(a_i, b_i)$  une 2-frise numérique close d'ordre  $n$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  avec  $j \geq i$  alors

1. il y a  $2n$ -périodicité sur les lignes :  $(i + n, j + n) = (i, j)$ ,  $a_{i+n} = a_i$  et  $b_{i+n} = b_i$  ;
2. il y a  $n$ -périodicité sur les diagonales :  $(i + n, j) = (i, j)$  et  $(i, j + n) = (i, j)$  ;
3. il y a une symétrie pareille à celle vu sur les frises de Coxeter-Conway :  $(i, j) = (j + \frac{1}{2}, i + n - \frac{1}{2})$  (pour  $j \leq i + n - 1$ ).

*Démonstration.* 1. On utilise les deux premières relations de la proposition 20.

On s'intéresse à l'élément  $(i + 2, i + n - 1)$  placé sur la ligne suivie d'une ligne de 1 et de deux lignes de 0.

On a  $(i - 1, i + n - 1) = a_i(i, i + n - 1) - b_i(i + 1, i + n - 1) + (i + 2, i + n - 1)$  en suivant la diagonale  $\Delta_{i-1}$ .

Donc  $(i + 2, i + n - 1) = b_i$ .

Ensuite on refait la même chose en suivant l'antidiagonale passant par  $(i + 2, i + n - 1)$ .

On a  $(i + 2, i + n + 2) = a_{i+n+1}(i + 2, i + n + 1) - b_{i+n}(i + 2, i + n) + (i + 2, i + n - 1)$  en suivant la diagonale  $\Delta_{i+n+2}$ .

Donc  $(i + 2, i + n - 1) = b_{i+n}$ .

D'où  $b_{i+n} = b_i$ .

On déduit la même chose pour les  $a_i$  en répétant l'opération sur les diagonales à coordonnées non entières.

Les deux formules de la proposition 19 nous donnent alors facilement la  $2n$ -périodicité de toutes les lignes.

2. L'élément  $(i, i + n - 3)$  est suivie d'un 1, puis de deux 0 sur la diagonale  $\Delta_i$ . Par quoi est-il suivi ensuite ?

On utilise nos relations sur la diagonale  $\overline{\Delta_{i+n-3}}$  pour le savoir.

$$(i, i + n + 1) = a_{i+n}(i, i + n) - b_{i+n-1}(i, i + n - 1) + (i, i + n - 2) = 1$$

On regarde ensuite le coefficient suivant :  $(i, i + n + 2)$ .

$$(i, i + n + 2) = a_{i+n+1}(i, i + n + 1) - b_{i+n}(i, i + n) + (i, i + n - 1) = a_{i+n+1}$$

D'où  $(i, i + n + 2) = a_{i+n+1} = a_{i+1} = (i, i + 2)$ .

La relation de récurrence que suivent les coefficients de  $\Delta_i$  est périodique de période  $n$  car les  $a_i$  et les  $b_i$  sont périodiques. Or les trois premiers termes de la diagonale  $\Delta_i$  sont les mêmes que les  $(n + 1)$ ,  $(n + 2)$  et  $(n + 3)$ -ièmes termes  $(0, 1, a_{i+1})$ . Donc  $\Delta_i$  est périodique de période  $n$ .

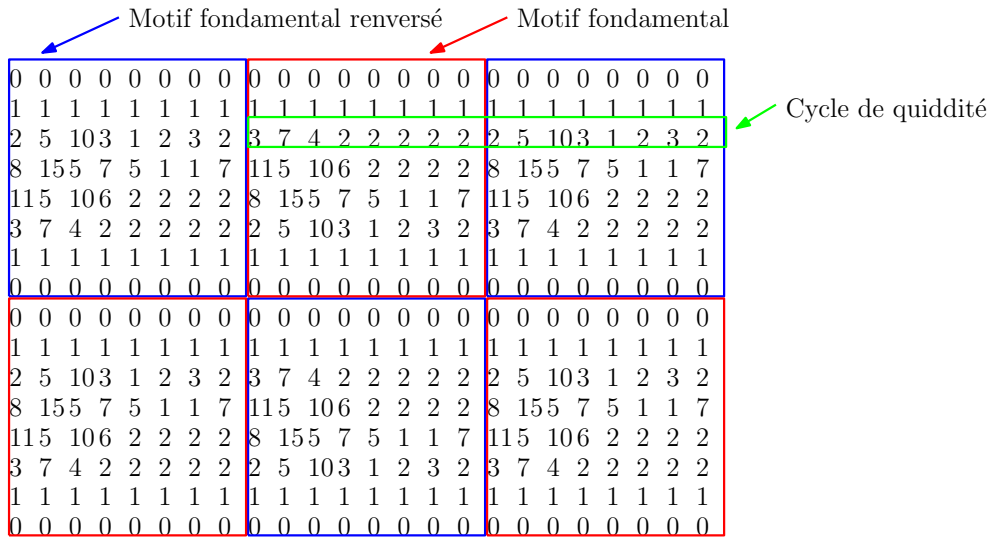
La périodicité des trois autres types de diagonales se prouve de la même manière.

3. Dans la première partie de cette preuve, on a vu que  $(i + 2, i + n - 1) = b_i$  donc  $(i + 2, i + n - 1) = (i - \frac{1}{2}, i + \frac{3}{2})$ .

Pour les  $a_i$ , on a  $(i + \frac{3}{2}, i + n - \frac{3}{2}) = a_i = (i - 1, i + 1)$ .



Exemple : un morceau d'une 2-frise arithmétique close d'ordre 8





# Chapitre 6

## Autres frises

### 6.1 Frises de NIM

A la toute fin de l'article [10], il est suggéré que l'on peut faire des frises avec l'addition de NIM (voir définition 15 au début du chapitre sur les frises additives). C'est à dire une frise dont la première ligne n'est constituée que de 0, la  $(n + 1)$ -ième ligne aussi (avec  $n$  l'ordre de la frise) et la règle unimodulaire est  $a \oplus d = b \oplus c + 1$ .

Ce type de frises proposé par Conway n'a apparemment pas été étudiée.

En faisant quelques exemples, on remarque que l'on garde la  $n$ -périodicité.

Exemple :

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...	1	4	9	2	6	1	4	9	...	...
6	4	12	10	3	6	4	12	10	...	...
...	0	3	12	10	2	0	3	12	...	...
7	6	2	15	4	7	6	2	15	...	...
...	0	0	0	0	0	0	0	0	...	...

On peut commencer par prouver la périodicité pour  $n = 2$ .

On remarque que les frises possibles sont uniquement de cette forme :

0	0	0	0	0	0	0	0
...	$2p$	$2p + 1$	$2p$	$2p + 1$	$2p$	...	...
0	0	0	0	0	0	0	0

Cela vient du fait que  $2p \oplus (2p + 1) = 1$ .

Pour  $n = 3$ , les calculs sont déjà difficiles.

On se donne la frise :

0	0	0	0	0
...	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$y$ ...
...	$a_1 \oplus a_2 - 1$	$a_2 \oplus a_3 - 1$	$x$	$z$
...	0	0	0	0 ...

On veut montrer que  $y = a_1$  et  $z = a_1 \oplus a_2 - 1$ .  
 On sait que  $(a_1 \oplus a_2 - 1) \oplus (a_2 \oplus a_3 - 1) = a_2 + 1$ , soit  $a_3 = a_2 \oplus ((a_1 \oplus a_2 - 1) \oplus (a_2 + 1) + 1)$ .  
 Pour que  $a_1 \oplus a_2 - 1$  et  $a_2 \oplus a_3 - 1$  soient définis, il faut que  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  soient distincts entre eux.

On a ensuite  $x = (a_3 + 1) \oplus (a_2 \oplus a_3 - 1)$ .  
 Puis  $y = a_3 \oplus (x + 1)$ .  
 En développant tous les  $a_3$ , on a

$$y = (a_2 \oplus ((a_1 \oplus a_2 - 1) \oplus (a_2 + 1) + 1)) \oplus ((a_2 \oplus ((a_1 \oplus a_2 - 1) \oplus (a_2 + 1) + 1) + 1) \oplus (a_2 + 1) \oplus (a_1 \oplus a_2 - 1) + 1).$$

Comme l'addition de NIM n'est pas distributive sur l'addition et vice versa, on ne peut apparemment pas simplifier cette expression...

J'ai tout de même créé un programme qui génère aléatoirement des triplets  $(a_1, a_2, a_3)$  vérifiant les conditions au dessus et qui regarde si  $y = a_1$  et  $z = a_1 \oplus a_2 - 1$  (voir en annexe C ; le programme test3 vérifie la propriété pour tous les triplets dont les composantes sont inférieures ou égales à l'entier donné en entrée de la fonction, alors que le programme test3rand est moins lourd et vérifie aléatoirement la propriété.).

Pour l'instant, la conjecture a l'air d'être vraie, au moins pour  $n \leq 3$ .

Une approche plus astucieuse consiste à se donner les deux coefficients de la première diagonale, puis regarder ce que cela donne.

On nomme  $(u_n)$  la suite des coefficients.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \dots & u_1 & & u_3 & & u_5 & & u_7 & \dots \\ u_0 & & u_2 & & u_4 & & u_6 & & u_8 \\ \dots & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \dots \end{array}$$

On voit vite que  $u_{n+2} = u_n \oplus (u_{n+1} + 1)$ . Le but est alors de démontrer que  $u_{n+6} = u_n$ , ou, plus simplement, que  $u_7 = u_1$  et que  $u_8 = u_2$ , ce qui est équivalent.

On obtient quelques relations et simplifications en considérant les 4 cas sur la parité et l'imparité de  $u_1$  et  $u_2$ .

En effet, on sait que si  $a$  est pair,  $a + 1 = a \oplus 1$  et on sait que la somme de NIM de deux nombres de même parité est paire, et sinon elle est impaire.

→ Si  $u_1$  est impair et  $u_2$  est pair,  
 $u_3 = u_1 \oplus (u_2 + 1) = u_1 \oplus u_2 \oplus 1$  et  $u_3$  est pair  
 $u_4 = u_2 \oplus (u_3 + 1) = u_2 \oplus u_1 \oplus u_2 \oplus 1 \oplus 1 = u_1$   
 $u_5 = u_3 \oplus (u_4 + 1) = u_1 \oplus u_2 \oplus 1 \oplus (u_1 + 1)$  et  $u_5$  est pair  
 $u_6 = u_4 \oplus (u_5 + 1) = u_1 \oplus u_1 \oplus u_2 \oplus 1 \oplus (u_1 + 1) \oplus 1 = u_2 \oplus (u_1 + 1)$  et  $u_6$  est pair  
 $u_7 = u_5 \oplus (u_6 + 1) = u_1 \oplus u_2 \oplus 1 \oplus (u_1 + 1) \oplus u_2 \oplus (u_1 + 1) \oplus 1 = u_1$   
 $u_8 = u_6 \oplus (u_7 + 1) = u_2 \oplus (u_1 + 1) \oplus (u_1 + 1) = u_2$   
 On a bien la périodicité.

→ Si  $u_1$  est pair et  $u_2$  est impair,  
 il suffit de faire tourner notre frise d'un demi tour pour revenir sur le cas précédent.  
 La propriété est donc toujours vraie.

→ Si  $u_1$  et  $u_2$  sont de même parité, je n'arrive pas à simplifier les expressions.

Je n'ai rien trouvé de plus sur les frises de NIM. La conjecture reste sans preuve. J'espère qu'un jour quelqu'un trouvera une preuve ou un contre-exemple.

## 6.2 Frises tropicales

### Définition 21.

Les frises tropicales sont des arrangements de nombres réels organisés en quinconce dans une bande infinie, de sorte que quatre entrées voisines  $a$   $\begin{matrix} c \\ d \end{matrix}$   $b$  vérifient  $a + d = \max(b + c, 0)$ , et tels que la première rangée soit composée uniquement de  $-\infty$ , et que les deuxième et dernière rangées ne soient constituées que de 0.

Remarque : Cela revient à construire des frises de Coxeter-Conway, mais en remplaçant l'addition par le max et la multiplication par l'addition.

L'ensemble  $K = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  muni du  $\max(\oplus)$  et de l'addition ( $\otimes$ ) a une structure de semi-corps. C'est à dire qu'il possède toute les propriétés d'un corps, sauf le symétrique pour le max.

Exemple :

$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	...
...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-3	3	6	-4	4	5	-3	...					
...	2	-2	9	2	-2	9	6	2	-4	...			
6	-4	4	5	-3	3	6	-4	...					
...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

### Théorème 13.

Tous les résultats du chapitre 1 s'appliquent aux frises tropicales (si on change les notations).

C'est un résultat surprenant étant donné qu'on ne possède pas la soustraction. On va tenter d'expliquer un peu ce résultat.

L'astuce est de considérer l'anneau  $R$  défini comme suit :  
 On se place dans  $(K^2, \oplus, \otimes)$  et on définit la relation d'équivalence  $\sim$  par  $(p, q) \sim (m, n)$  si et seulement si  $p \oplus n = m \oplus q$ .  
 Alors  $R = K^2 / \sim$ .

L'addition  $+$  est définie par  $(p, q) + (m, n) = (p \oplus m, q \oplus n)$  et la multiplication  $\times$  est définie par  $(p, q) \times (m, n) = (m \otimes p \oplus n \otimes q, m \otimes q \oplus n \otimes p)$ .

On peut alors montrer que  $(R, +, \times)$  est un anneau intègre.

En fait, il faut s'imaginer que  $(p, q) = p'' \ominus ''q$ .

On a alors  $K$  qui s'injecte dans  $R$  par  $\phi : p \longrightarrow (p, 0)$ .

De plus l'opposé dans  $R$  de  $(p, 0)$  est  $(0, p)$ .

On peut redémontrer facilement dans  $R$  toutes les relations du chapitre 1. Normalement il faut un corps, mais un anneau intègre suffit.

Ainsi, si on se donne une frise sur  $K$ , on peut observer son image par  $\phi$ , démontrer la périodicité, le prolongement, etc... sur la frise image, puis revenir sur la frise sur  $K$ .

C'est ainsi que l'on montre la majeure partie des propriétés vérifiées par les frises tropicales.

#### Corollaire 10.

Il existe une unique frise additive d'indice 0 dont tous les coefficients sont positifs ou nuls, c'est la frise nulle.

*Démonstration.* Une chose intéressante sur les frises tropicales est que si tous les coefficients de la frise sont positifs ou nuls, on obtient une frise additive d'indice 0 en enlevant la première ligne ( $a + d = \max(b + c, 0)$  devient  $a + d = b + c$ ). Néanmoins si la frise tropicale a  $n$  lignes, sa périodicité en tant que frise additive sera de  $n - 1$  alors qu'en tant que frise tropicale, elle sera de  $n$ .

On en déduit que pour que les deux résultats de périodicité soient cohérents, les seules frises additives à coefficients positifs ou nuls sont constantes.

Par de petits calculs sur les coefficients, on peut voir qu'il n'y a qu'une unique frise additive constante d'indice 0, c'est la frise nulle (en fait les coefficients sont strictement croissants suivant les lignes, donc on ne pourra jamais fermer la frise par une ligne de 0 si on ne met pas de 0 sur la deuxième ligne).  $\square$

# Conclusion

Nous avons vu les frises comme un objet mathématique construit sans aucune raison. Et pourtant cette construction des frises engendrait des relations importantes, notamment la bijection entre les frises entières et les triangulations de polygones convexes. Une définition locale amène souvent un comportement général insoupçonné. C'est en cela que les frises sont intéressantes ; elles sont construites simplement et des motifs apparaissent très vite.

Ce qui m'a le plus plu durant ce stage, et ce qui m'a pris le plus de temps, c'est de chercher par moi-même pourquoi certains théorèmes marchaient. Au départ, j'ai cherché à prouver les théorèmes sur les frises de Coxeter-Conway, tout en étant guidé par mes articles puis, la diversité des articles aidant, j'ai cherché ce qui manquait dans les documents que j'étudiais. Faire des conjectures, chercher des correspondances, griffonner des exemples fut très amusant. J'ai passé un très bon moment à chercher des solutions à des problèmes non-résolus.

D'ailleurs je suis toujours intéressé par une possible solution au problème des frises de NIM. Qui sait, peut-être que Madame Brisby passera par là pour m'aider !



Madame Brisby impatiente de découvrir tous les secrets de NIM

# Remerciements

Je remercie en premier lieu ma tutrice Sophie Morier-Genoud qui m'a assisté tout au long de mon stage, a su nourrir ma curiosité en me donnant tous les articles dont j'ai eu besoin et m'a montré à quoi ressemblait le vrai monde de la recherche.

Je remercie tous les chercheurs qui m'ont aidé à trouver des solutions pour mes programmes de dénombrement des frises additives. En particulier, je remercie Cyril Banderier qui a pris le temps de m'expliquer comment fonctionnait *latte*.

Je remercie toute l'équipe du couloir 15-25 du 5ème étage de Jussieu pour toutes les idées qu'ils m'ont données quand je cherchais à résoudre mes problèmes. Je les remercie (et les félicite) aussi pour leurs merveilleux gâteaux.

Je remercie Corentin Caillaud, qui m'a gentiment fait visiter Paris, m'a aidé sur les frises de NIM et a eu le courage de relire mon rapport, ainsi que Baptiste Huguet pour m'avoir fait profiter de sa connaissance du langage mystérieux de *Latex*.

J'en profite pour remercier tous les gens qui m'ont assisté dans la vie de tous les jours, et m'ont permis de me concentrer sur mon travail.

# Bibliographie

## Frises multiplicatives :

- [1] J. Conway et H. Coxeter, Triangulated polygons and frieze patterns, *Mathematical Gazette* 57, pp. 87–94 et 175–183, 1973.
- [2] H. S. M. Coxeter, Frieze patterns, *Acta Arithmetica* 18, pp. 297-310, 1971.
- [3] H. S. M. Coxeter et J. F. Rigby, Frieze Patterns, Triangulated Polygons and Dichromatic Symmetry, *The Lighter Side of Mathematics*, pp. 15-27, 1994.
- [4] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko et S. Tabachnikov,  $SL_2(\mathbb{Z})$ -Tilings of the Torus, Coxeter-Conway Friezes and Farey Triangulations, arXiv :1402.5536v2, 2014.
- [5] J. S. Fraser Martineau et D. Lavertu, Frises et Triangulations de Polygones, *CaMUS*, pp. 39–59, 2010.
- [6] D. Broline, D. W. Crowe et I. M. Isaacs, The Geometry of Frieze Patterns, *Geometriae Dedicata* 3, pp. 171-176, 1974
- [7] animation montrant les liens entres frises, triangulations et suites de Farey : [www.math.brown.edu/res/Java/Frieze/Main.html](http://www.math.brown.edu/res/Java/Frieze/Main.html)
- [8] Une jolie démonstration de géométrie élémentaire que j'ai adapté pour les frises constantes : [blogdemaths.wordpress.com/2013/12/02/produit-des-diagonales-dun-polygone-regulier/](http://blogdemaths.wordpress.com/2013/12/02/produit-des-diagonales-dun-polygone-regulier/)
- [9] Des démonstrations sympathiques sur les suites de Farey : [mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/96111116.pdf](http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/96111116.pdf)

## Frises additives :

- [10] G. C. Shephard, Additive Frieze Patterns and Multiplication Tables, *Mathematical Gazette* 60, no. 413, pp. 178-184, 1976.
- [11] J. F. Marceau, Pavages Additifs, *CaMUS* 3, 27 – 38.
- [12] le logiciel latte, disponible à l'adresse [www.math.ucdavis.edu/latte/](http://www.math.ucdavis.edu/latte/)

## 2-Frises :

- [13] S. Morier-Genoud, V. Ovsienko, S. Tabachnikov, 2-frieze patterns and the cluster structure of the space of polygons, *Ann. Inst. Fourier*, 62, 3 (2012) 937-987.

## Frises tropicales :

- [14] I. Assem et G. Dupont, *Friezes over Semirings and Tropicalisations*, 2013

## Autres documents :

- [15] calculateur de NIM : [math.ucsd.edu/~wgarner/math168a/nimaddition.htm](http://math.ucsd.edu/~wgarner/math168a/nimaddition.htm)  
[16] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences : [oeis.org/](http://oeis.org/)  
[17] un forum qui m'a beaucoup aidé : [math.stackexchange.com](http://math.stackexchange.com)  
[18] pour quelques définitions et la preuve de la formule de Dodgson : [en.wikipedia.org](http://en.wikipedia.org)  
[19] l'excellent dessin animé *Brisby et le secret de NIMH* !!! À regarder de toute urgence si vous ne connaissez pas!

Adrien LAURENT  
Étudiant à l'ENS Rennes  
[adrienlaurent28@gmail.com](mailto:adrienlaurent28@gmail.com)

Sophie Morier-Genoud  
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche  
Université Pierre et Marie Curie  
[sophie.morier-genoud@imj-prg.fr](mailto:sophie.morier-genoud@imj-prg.fr)



# Appendices

# A-Premier programme de dénombrement des frises additives entières positives

```
1. function tab=creetableau(n)
    tn =n*(n-1)/2;
    an =n*(n-1)/2+1;
    bn=an^n;

    tab=zeros(bn,n);

    for j=1:n
        for rep=1:an^(j-1)
            for k=0:tn
                for i=1:an^(n-j)
                    tab(i+((rep-1)*an+k)*an^(n-j),j)=k;
                end
            end
        end
    end
endfunction

2. function y=bin(k,n)
    y=factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k));
endfunction

3. function t=trietableau(n)

    tab=creetableau(n);

    tn =n*(n-1)/2;
    an =n*(n-1)/2+1;
    bn=an^n;

    t=zeros(bin(n-1,n-1+n*(n-1)/2),n);

    k=1;

    for i=1:bn
```

```

        if norm((tab(i,:))',1)==tn then t(k,:)=tab(i,:); k=k+1;
        end
    end
endfunction
4. function [k,top]=tableaufinal(n)
    t=trietableau(n);
    k=0;
    for i=1:bin(n-1,n-1+n*(n-1)/2)
        if test(t(i,:),n)==1 then top(k+1,:)=t(i,:); k=k+1
        end
    end
endfunction
5. function bo=test(x,n)
    y=zeros(1,2*n);
    y(1,1:n)=x;y(1,(n+1):(2*n))=x;
    bo=1;r=1;
    while (r<=n & bo==1) do
        for s=1:(n-1) do
            if norm((y(1,r:(r+s)))',1)<s*(s+1)/2 then bo=0
            end
        end
        r=r+1;
    end
endfunction

```

# B-Second programme de dénombrement des frises additives entières positives

```
1. function tab=creeportes(n)
    N =n*(n-1)/2;

    tab=zeros(2^(N-1),N-1);

    for j=1:(N-1)
        for rep=1:(2^(j-1))
            for i=1:(2^(N-j-1))
                tab(i+2^(N-j)*(rep-1)+2^(N-j-1),j)=1;
            end
        end
    end

endfunction

2. function tab=associecouple(t,N)
    k=1;
    j=1;
    i=0;

    while k+i<=N do
        while k+i<=N-1 & t(k+i)==0 do
            i=i+1
        end
        tab(1,j)=i+1;
        j=j+1;
        k=k+i+1;
        i=0
    end

endfunction

3. function tab=remplitzeros(ptab,n)
    q=length(ptab);
    tab=zeros(1,n);
    tab(1,1:q)=ptab(1,:)
```

```

endfunction
4. function tab=creetableau(n)
    t=creeportes(n);
    N=n*(n-1)/2;
    j=1
    for i=1:2^(N-1)
        t1=associecouple(t(i,:),N);
        if length(t1)<=n then
            t2=remlitzeros(t1,n);
            tab(j,:)=t2;
            j=j+1
        end
    end
endfunction
5. function tab=enlevedoublon(t)
    [l1,l2]=size(t);j=1
    for i=1:l1 do
        bo=1;k=1
        while bo==1 & k<j do
            if tab(k,:)==t(i,:) then
                bo=0
            else k=k+1
            end
        end
        if k==j then tab(j,:)=t(i,:);j=j+1
        end
    end
endfunction
6. function bo=test(x,n)
    y=zeros(1,2*n);
    y(1,1:n)=x;y(1,(n+1):(2*n))=x;
    bo=1;r=1;
    while (r<=n & bo==1) do
        for s=1:(n-1) do
            if norm((y(1,r:(r+s)))',1)<s*(s+1)/2 then bo=0
            end
        end
        r=r+1;
    end
endfunction
7. function tab=traiteligne(x,n)
    y=perms(x);
    [n1,n2]=size(y);
    k=1
    for i=1:n1
        if test(y(i,:),n)==1 then tab(k,:)=y(i,:); k=k+1
        end
    end
end

```

```

        tab=enlevedoublon(tab)
        if k==1 then tab=[]
        end
    endfunction
8. function [k,top]=tableaufinal(n)
    tab=creetableau(n);
    [n1,n2]=size(tab);
    k=1;
    top=zeros(1,n)
    for i=1:n1 do
        t=traiteligne(tab(i,:),n);
        [l1,l2]=size(t);
        if l1<>0 then
            top(k:(k+l1-1),:)=t; k=k+l1
        end
    end
    top=enlevedoublon(top);
    [k,q]=size(top)
endfunction

```

# C-Programme de vérification de la conjecture des frises de NIM pour $n=3$

```
1. function [q,r]=diveucl(a,b)
    q=floor(a/b);
    r=a-b*q
endfunction

2. function y=decompbin(x)
    q=x;i=1;r=0
    if q==0 then y=[0]
    else
        while q<>0 do
            [q,r]=diveucl(q,2);
            y(1,i)=r;
            i=i+1
        end
    end
endfunction

3. function x=recompbin(y)
    l=length(y);x=0
    for i=1:l do
        x=x+y(i)*2^(i-1)
    end
endfunction

4. function y=nim(a,b)
    a1=decompbin(a);b1=decompbin(b);
    la=length(a1);lb=length(b1);
    if la>lb then c=a1
        for i=1:lb do
            c(i)=modulo(c(i)+b1(i),2)
        end
    else c=b1
        for i=1:la do
            c(i)=modulo(c(i)+a1(i),2)
        end
    end
endfunction
```

```

    end
    y=recompbin(c)

endfunction

5. function bo=repet(t)
    if t(1,1)==t(1,2) | t(1,2)==t(1,3) | t(1,1)==t(1,3) then bo=1
    else bo=0
    end
endfunction

6. function tab=tri(t)
    [l1,l2]=size(t);j=1;tab=[]
    for i=1:l1 do
        if repet(t(i,:))==0 & (nim(nim(t(i,1),t(i,2))-1,nim(t(i,2),t(i,3))-1)==t(i,2)+1) the
            tab(j,:)=t(i,:);j=j+1
        end
    end
endfunction

7. function tab=creetableau(N)
    an =N+1;
    bn=an^N;

    tab=zeros(bn,3);

    for j=1:3
        for rep=1:an^(j-1)
            for k=0:N
                for i=1:an^(3-j)
                    tab(i+((rep-1)*an+k)*an^(3-j),j)=k;
                end
            end
        end
    end
    tab=tri(tab)

endfunction

8. function tab=creetableau2(N,p)
    for i=1:p do
        tab(i,1)=floor(rand(1)*N);
        tab(i,2)=floor(rand(1)*N);
        while tab(i,2)==tab(i,1) do
            tab(i,2)=floor(rand(1)*N)
        end
        tab(i,3)=nim(tab(i,2),1+nim(nim(tab(i,1),tab(i,2))-1,tab(i,2)+1))
    end
endfunction

9. function [bo,top]=test3(N)
    tab=creetableau(N);[l1,l2]=size(tab);
    bo=1;top=[];i=1;x=1;y=1;z=1

```



```

while i<=l1 & bo==1 do
    x=nim(tab(i,3)+1,nim(tab(i,2),tab(i,3))-1);
    y=nim(tab(i,3),x+1);
    z=nim(x,y+1)
    if y<>tab(i,1) | z<>(nim(tab(i,1),tab(i,2))-1) then
        bo=0;top=tab(i,:)
    end
    i=i+1
end
endfunction
10. function [bo,top]=test3rand(N,p)
    tab=creetableau2(N,p); [l1,l2]=size(tab);
    bo=1;top=[];i=1;x=1;y=1;z=1
    while i<=l1 & bo==1 do
        x=nim(tab(i,3)+1,nim(tab(i,2),tab(i,3))-1);
        y=nim(tab(i,3),x+1);
        z=nim(x,y+1)
        if y<>tab(i,1) | z<>(nim(tab(i,1),tab(i,2))-1) then
            bo=0;top=tab(i,:)
        end
        i=i+1
    end
end
endfunction

```