Résumé

Ce mémoire consiste en deux parties indépendantes. La première partie porte sur des généralisations des frises de Coxeter. On étudie en particulier une variante appelée 2-frises, en interaction avec la théorie des algèbres amassées. On établit une trialité entre les frises, les équations linéaires en différence et les espaces de modules de polygones. Cette trialité permet notamment d'utiliser la géométrie projective pour étudier les frises et les équations, mais aussi d'utiliser les algèbres amassées pour étudier les espaces de polygones. La transformée de Gale est définie dans le cadre de cette trialité, induisant des isomorphismes non triviaux entre différents espaces de frises ou différents espaces d'équations.

Dans la deuxième partie on étudie des algèbres non-associatives. On présente tout d'abord une série d'algèbres généralisant l'algèbre des octonions. Cette série est construite en utilisant une combinatoire binaire qui se révèle efficace dans la résolution du problème de Hurwitz sur les identités en sommes de carrés. On propose alors des constructions explicites de nouvelles identités. On termine en présentant une classe particulière d'algèbres de Jordan pour laquelle on développe la théorie des représentations et des exemples construits à partir de surfaces de Riemann marquées.

Abstract

This dissertation consists in two independent parts. The first part deals with generalizations of Coxeter friezes. We study the variant of so-called 2-friezes, using the theory of cluster algebras. We establish a "triality" between the spaces of friezes, the linear difference equations and the moduli spaces of polygons. This triality makes possible the use of projective geometry to study friezes and equations, as well as the use of cluster algebras to study the spaces of polygons. The combinatorial Gale transform is defined within this triality, and provides isomorphisms between different spaces of friezes and of difference equations.

In the second part, we study nonassociative algebras. We define a series of algebras generalizing the algebra of octonions. This series is constructed from binary combinatorics and it is applied to the classical Hurwitz problem of sums of squares identities. In particular, we give explicit constructions of new identities. In the end of the dissertation, we present a special class of Jordan superalgebras, for which we develop representation theory and construct examples based on punctured Riemann surfaces.