Sorbonne Université

Séries de fonctions et intégrales à paramètre (2M261), Janvier–Mai 2018.

Quiz 6, vendredi 9 mars 2018

Problème 1. Soit f un fonction 2π-périodique telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{si } x \in]\pi/2, 2\pi[\end{cases}$$

On considère le développement de f en série de Fourier de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \tag{$*$}$$

(a) Trouver le coefficient c_{2018}.

Solution : Pour $n \neq 0$, on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{e^{-inx}}{in}\Big|_{x=0}^{x=\pi/2}\right) = -\frac{1}{2\pi ni}(e^{-in\pi/2)} - 1).$$

Si $n = 2018$, $e^{-in\pi/2} = e^{-1009\pi i} = \left(e^{-\pi i}\right)^{1009} = (-1)^{1009} = -1$ et donc $c_{2018} = \frac{1}{2018\pi i} = -\frac{1}{2018\pi}i$.

Note : Cette argument ne marche pas pour $n = 0$, mais on vois facilement que $c_0 = \frac{1}{4}$.

(b) Est-ce que la série $(*)$ converge pour $x = \pi/2$? Si oui, trouver la valeur de $(*)$ pour $x = \pi/2$. Justifier succinctement vos réponses.

Solution : La fonction f est C^1 par morceaux et alors $(*)$ converge vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ (ou, plus simplement, vers $f(x)$ si f est continue en x).

Pour $x = \pi/2$, on a $f((\pi/2)^+) = 0$ et $f((\pi/2)^-) = 1$, donc la série converge vers $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.