Sorbonne Université

Séries de fonctions et intégrales à paramètre (2M261), Janvier–Mai 2018.

Quiz 9, lundi 7 mai 2018 – Corrigé

Question 1. Pour toute fonction donnée ci-dessous, trouver *le domaine* de sa transformation de Laplace. Justifier ! Il n'est pas nécessaire de calculer la transformation.

(a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < \pi \\ e^{-3t} & \text{si } t \geqslant \pi \end{cases}$

Réponse : $s \in]-3, \infty[$

Justification : $\mathcal{L}f(s) = \int_\pi^\infty e^{-3t} e^{-st}\, dt = \int_\pi^\infty e^{-(3+s)t}\, dt$ qui converge ssi $3 + s > 0$ ssi $s > -3$.

Notons que l'intégrande étant continue, $\int_\pi^\infty$ converge ssi $\int_0^\infty$ converge.

(b) $h(t) = e^{t^{3/2}}, t \geqslant 0$

Réponse : $\varnothing$

Justification : $\mathcal{L}h(s) = \int_0^\infty e^{t^{3/2}} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{t^{3/2} - st}\, dt$. Notons que $t^{3/2} \gg st$ (croissances comparées) et alors la nature d'l'intégrale sera la même que $\int_0^\infty e^{t^{3/2}}\, dt$ c'est-à-dire, toujours divergente.

Pour un argument rigoureux, notons que $\mathcal{L}h(s) = \int_0^\infty e^{t(t^{1/2} - s)}\, dt$ et que, pour $t \geqslant s^2$, on a $e^{t(t^{1/2}-s)} \geqslant 1$. Donc

$$\int_0^\infty e^{t(t^{1/2}-s)}\, dt = \int_0^{s^2} e^{t(t^{1/2}-s)}\, dt + \int_{s^2}^\infty e^{t(t^{1/2}-s)}\, dt \geqslant \int_0^{s^2} e^{t(t^{1/2}-s)}\, dt + \int_{s^2}^\infty dt$$

diverge pour tout $s \in \mathbb{R}$.