Contrôle d'Analyse Fonctionnelle - 24 février 2020. Durée : 1 heure 30

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est strictement interdit. Le sujet comporte quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Un exercice peut être poursuivi en admettant le(s) résultat(s) d'une question précédente.

Exercice 1. Dans cette question ν est une mesure sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.

a) (3 pts) Supposons que ν est une mesure de probabilité et soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. En utilisant l'inégalité de Jensen, montrer que

$$\infty > q > p \geqslant 1 \Longrightarrow \Big(\int f^p \, d\nu\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int f^q \, d\nu\Big)^{1/q}.$$

b) (1 pt) Montrer (en donnant un exemple) que l'affirmation dans a) peut être fausse si ν n'est pas une mesure de probabilité.

Solution de l'exercice 1.

a) Comme $q/p > 1$, la fonction $t \to \alpha(t) = t^{q/p}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$, puisque c'est une fonction C^1 dont la dérivée $\alpha'(t) = \frac{q}{p} t^{\frac{q}{p}-1}$ est croissante. Ainsi, si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, par l'inégalité de Jensen appliqué à la fonction convexe α sur $\mathbb{R}^+$, à la probabilité ν et à la fonction f^p à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ on a

$$\alpha\Big(\int f^p \, d\nu\Big) \leqslant \int \alpha(f^p) \, d\nu$$

ce qui s'écrit

$$\Big(\int f^p \, d\nu\Big)^{q/p} \leqslant \int f^q \, d\nu$$

ce qui est exactement l'inégalité voulue.
Note : Le plus souvent, la convexité d'une fonction ϕ est justifiée en établissant que ϕ'' est positive. Si on veut utiliser cet argument ici, il y a une petit problème : pour $\alpha''(0)$ existe seulement si $q/p \geqslant 2$. Un exemple d'une justification correcte : *la fonction $t \to \alpha(t) = t^{q/p}$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$, puisque α est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\alpha''(t) > 0$ pour $t > 0$.*

b) Soit $X = \mathbb{R}$, ν - mesure de Lebesgue, et $f = 1_{[0,b]}$ avec $b > 1$. Si $q > p$, on a $\|f\|_p = b^{1/p} > b^{1/q} = \|f\|_q$ comme requis.
Le même argument marche toujours quand $\exists A \in \mathcal{A}$ tel que $1 < \nu(A) < \infty$.
Un autre exemple : posons $f(x) = 1_{[1,\infty[} \cdot x^{1/p}$; on a $\int f^p \, d\nu = \int_1^\infty x^{-1} \, dx = \infty$, mais $\int f^q \, d\nu = \int_1^\infty x^{-q/p} \, dx < \infty$ parce que $q/p > 1$.

Exercice 2. On travaille avec la mesure de Lebesgue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Étant donné une fonction réelle f de carré intégrable sur $[a, b]$, on note $\|f\|_2 := \big(\int_{[a,b]} f^2\big)^{1/2}$, et pour f bornée on note $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$.

a) (2 pts) Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que pour tout $x, y \in [a, b]$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \|f'\|_2 \sqrt{|x - y|}.$$

b) (2 pts) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe un $c \in [a,b]$ tel que

$$|f(c)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{|b-a|}} \|f\|_2.$$

On pourra (par exemple) utiliser un théorème des valeurs intermédiaires.

c) (2 pts) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (dépendant seulement de $|b-a|$) telle que pour toute fonction réelle f de classe C^1 sur $[a,b]$ on ait :

$$\|f\|_\infty \leqslant C\,(\|f\|_2 + \|f'\|_2).$$

Solution de l'exercice 2. Sans perte de généralité, on va supposer que $a < b$.

a) On peut supposer $y < x$. Puisque f est C^1 sur $[a,b]$ et donc sur $[y,x]$, on a $f(x) - f(y) = \int_y^x f'$. Ensuite, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy- Schwarz,

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_{[x,y]} f'\right| \leqslant \int_{[x,y]} |f'| \leqslant \sqrt{|x-y|}\Big(\int_{[x,y]} |f'|^2\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{|x-y|}\Big(\int_{[a,b]} |f'|^2\Big)^{1/2}$$

b) Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$, et encore par l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy- Schwarz, on a $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant \sqrt{b-a}\left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{1/2}$, donc $f(c) \leqslant \frac{1}{b-a}\sqrt{b-a}\left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\|f\|_2$.

c) On se donne f de classe C^1 sur $[a,b]$ Par l'inégalité du b) on a, pour tout $x, y \in [a,b]$,

$$|f(x)| \leqslant |f(y)| + \|f'\|_2\sqrt{|x-y|} \leqslant |f(y)| + \sqrt{b-a}\|f'\|_2.$$

On applique cette inégalité avec $y = c$, le réel donné à la question b) pour notre fonction f. On a donc que pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{b-a}}\|f\|_2 + \sqrt{b-a}\|f'\|_2,$$

et donc

$$\|f\|_\infty \leqslant C\,(\|f\|_2 + \|f'\|_2)$$

en prenant $C = \max\{\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \sqrt{b-a}\}$.

Exercice 3. (3 pts) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $\phi \in L^\infty(\mu)$. Montrer que l'opérateur $M_\phi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ défini par $M_\phi(f) = \phi f$ pour tout $f \in L^2(\mu)$ est linéaire, continu, et donner une majoration de la norme d'opérateur $|||M_\phi|||$.

Solution de l'exercice 3. Premièrement, ϕf est mesurable comme le produit des fonctions mesurables. En plus, $\phi \in L^\infty(\mu) \implies \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $|\phi| \leqslant M$ μ-p.p. et donc $|\phi f| \leqslant M|f|$ μ-p.p. ; en particulier $\phi f \in L^2(\mu)$ si $f \in L^2(\mu)$. Alors $M_\phi(f) \in L^2(\mu)$ pour $f \in L^2(\mu)$; autrement dit, on a bien $M_\phi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$. Le même argument montre que en fait

$$\|M_\phi(f)\|_2 = \int |M_\phi(f)|^2 = \int |\phi f| \leqslant \int M^2|f|^2 = M^2\int |f|^2 = M^2\|f\|_2.$$

Autrement dit, $|||M_\phi||| \leqslant M$, et étant donné que la valeur optimale de M est égale à $\|\phi\|_\infty$ (par définition de $\|\cdot\|_\infty$), on obtient une majoration $|||M_\phi||| \leqslant \|\phi\|_\infty$. (Cette majoration devient une égalité si μ vérifie certains hypothèses naturelles de régularité.)

Nous n'avons pas encore étudié de la linéarité de M_ϕ, mais ça suit immédiatement de la définition d'un produit ou d'une somme de fonctions. Par exemple, $\big(M_\phi(f+g)\big)(x) = \phi(x)\big((f+g)(x)\big) =$

$\phi(x)\big(f(x)+g(x)\big) = \phi(x)f(x)+\phi(x)g(x) = \big(M_\phi(f)\big)(x) + \big(M_\phi(g)\big)(x) = \big(M_\phi(f)+\big(M_\phi(g)\big)(x)$ pour tout $x \in X$. Autrement dit, $M_\phi(f+g) = M_\phi(f)+M_\phi(g)$. [On n'exige pas d'un tel niveau de détail dans des solutions fournies par les étudiants, mais pour la note 3/3 il faut prendre en compte que $L^\infty(\mu)$ consiste des fonctions *essentiellement* bornées (et pas forcement bornées) ou que $\|\phi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|\phi|$ (et pas just $\sup|\phi|$).]

Exercice 4. Soit $E = \ell^1(\mathbb{N})$ l'espace des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $\sum |u_n| < \infty$. On considère les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur E définies pour $u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in E$ par $\|u\|_\infty = \sup_{n\geqslant 0}|u_n|$ et $\|u\|_1 = \sum_{n\geqslant 0}|u_n|$.

a) (3 pts) L'ensemble $A = \{u \in E,\ u_0 = 0\}$ est-il fermé dans E muni de la norme $\|\cdot\|_1$? Qu'en est-il si on munit E de $\|\cdot\|_\infty$?

b) (3 pts) L'ensemble $B = \big\{u \in E,\ \sum_{n\geqslant 0} u_n = 1\big\}$ est-il fermé dans E muni de la norme $\|\cdot\|_1$? Qu'en est-il si on munit E de $\|\cdot\|_\infty$?

c) (3 pts) Que dire de la continuité de l'application linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ définie par $T(u) := \sum_{n\geqslant 0} u_n$ si E est muni de $\|\cdot\|_\infty$? Cette application est-elle continue si on munit E de $\|\cdot\|_1$?

d) **Bonus :** (1 pt) On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. L'ensemble B est-il compact ?

Solution de l'exercice 4.

a) La forme linéaire $L(u) = u_0$ est continue par rapport à $\|\cdot\|_\infty$ et par rapport à $\|\cdot\|_1$ parce que $|L(u)| = |u_0| \leqslant \|u\|_\infty = \sup_n |u_n| \leqslant \sum_n |u_n| = \|u\|_1$. Par conséquent, $A = L^{-1}(0)$ est fermé dans chaque cas.
Pour un argument direct, on note que si $u^{(k)} = \big(u^{(k)}\big)_{n\geqslant 0} \in A$ (et alors $\big(u^{(k)}\big)_0 = 0$ pour tout k), on a
$$|u_0| = \big|\big(u^{(k)}\big)_0 - u_0\big| \leqslant \|u^{(k)} - u\|_\infty \leqslant \|u^{(k)} - u\|_1,$$
et alors $\lim_k \|u^{(k)} - u\|_\infty = 0$ (ou $\lim_k \|u^{(k)} - u\|_1 = 0$) entraîne $u_0 = 0$, autrement dit, $u \in A$.

b) Le même argument que en part a) marche pour $\|\cdot\|_1$: si $T(u) = \sum_{n\geqslant 0} u_n$, on a $|T(u)| = \big|\sum_{n\geqslant 0} u_n\big| \leqslant \sum_{n\geqslant 0}|u_n|$ et donc $B = T^{-1}(1)$ est fermé par rapport à $\|\cdot\|_1$.
Par contre, B n'est pas fermé par rapport à $\|\cdot\|_\infty$. Posons $u^{(N)} = (1/N, 1/N, \ldots, 1/N, 0, 0, \ldots)$, où le nombre des coordonées égales à $1/N$ est N. Par définition, $u^{(N)} \in B$ pour tout N. Par ailleurs, $\|u^{(N)}\|_\infty = 1/N$ et donc $u^{(N)} \to 0$ par rapport à $\|\cdot\|_\infty$, mais $0 \notin B$.
On peut également arriver à la même conclusion en utilisant le fait que les hyperplans $T^{-1}(a)$ sont fermés si et seulement si la forme linéaire T est continue (voir p. 25 du poly) et ici, pour $u^{(N)}$ définies ci-dessus, $\frac{|T(u^{(N)}|}{\|u^{(N)}\|_\infty} = \frac{1}{1/N} = N \to \infty$ et alors T n'est pas continue par rapport à $\|\cdot\|_\infty$ par 2.1.2, p. 17. (Mais étant donné que la partie “seulement si” n'a pas été démontrée dans le poly, la démonstration précédente est préférée.)

c) Il a été démontré dans la part b) que T est continue par rapport à $\|\cdot\|_1$ et (de deux manières différentes) que T n'est pas continue par rapport à $\|\cdot\|_\infty$.

d) Soit $e^{(k)} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ (la $k$ème coordonnée égale à 1 et toutes les autres nulles), alors $e^{(k)} \in B$ pour tout k, mais si $k \neq l$, $\|e^{(k)} - e^{(l)}\|_{\mathbb{1}} = 2$ et alors la suite $\big(e^{(k)}\big)$ ne contient pas d'une sous-suit convergentes (ou même Cauchy). Donc B n'est pas compact par rapport à $\|\cdot\|_1$ (et de même par rapport à $\|\cdot\|_\infty$).