Feuille 3
Polynômes

Exercice 1 — Soit $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une famille de polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ telle que $\deg(P_k) = k$ pour tout entier k entre 0 et n. Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2 — Soient $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ des $(n+1)$-uplets de $\mathbb{K}$ avec $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on a $P(a_i) = \alpha_i$.

Exercice 3 — Calculer la décomposition de $P = X^6 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4 — Calculer le reste de la division euclidienne de $P = [\cos(\theta) + X\sin(\theta)]^n$ par $X^2 + 1$

Exercice 5 — Calculer le PGCD de $P = X^{15} + 1$ et $Q = X^{21} + 1$.

Exercice 6 — Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme scindé. Montrer que P' est également scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 — Factoriser le polynôme $X^n - 2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 8 — Montrer que i est racine double de $P = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 9 — Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$

1. On suppose que 1 est racine de P. Montrer que 1 est racine double et calculer le reste de la division de P par $(X-1)^2$.
2. On suppose que -1 est racine de P. Montrer que -1 est racine double et calculer le reste de la division de P par $(X+1)^2$.

Exercice 10 — Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes
1) $\frac{6}{(X-1)(X+2)}$; 2) $\frac{X^3+2X^2+2X-3}{(X^2+1)^2}$; 3) $\frac{X+1}{(X^2-1)^3}$; 4) $\frac{1}{X^2(X^2+1)^2}$.