**Université Denis Diderot (Paris VII)** — **2008-2009**
**CM 3** — **Groupe Concours**

# Feuille 4
# Séries numériques

**Exercice** 1 — Etudier la nature des séries dont voici le terme général

1) $\frac{1}{n\log n}$ 2) $\frac{1+\log n}{n^2}$ 3) $\frac{2^n+5}{3^n-11}$ 4) $\frac{n+\ln n}{n^2+1}$
5) $n^{\ln(a)}$ $(a>0)$ 6) $e^{-\sqrt{n}}$ 7) $n^2\sin(\frac{1}{2^n})$ 8) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$
9) $\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ 10) $\left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$ 11) $\frac{(n+1)^4}{n!+1}$ 12) $\frac{1!+\cdots(n-1)!}{n!}$
13) $\frac{1!+\cdots(n-2)!}{n!}$ 14) $\frac{1}{(1+n)^\alpha}\ln(\cos(\frac{1}{n}))$ $(\alpha>0)$ 15) $n^{(n^{-k})}-1$ $(k\in\mathbb{R})$ 16) $n^{\frac{1}{1+n^2}}-1$
17) $n.n^{\frac{1}{n}}$ 18) $n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0)$ 19) $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ 20) $\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$
21) $(n^6+3)^a-(n^2+2)^{3a}$ $(a\in\mathbb{R})$ 22) $n^2e^{-\sqrt{n}}$ 23) $\frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ $(a>0,\alpha\in\mathbb{R})$

**Exercice** 2 — Soit $\alpha$ un nombre réel. Pour tout entier strictement positif $n$, on pose

$$u_n=\frac{1}{n^\alpha}\ ,\ v_n=\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\text{ et }w_n=\frac{1}{n^\alpha}-\frac{2}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$

1. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la suite $(u_n)$ est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la série de terme général $v_n$ est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la série de terme général $w_n$ est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

**Exercice** 3 — Pour tout entier positif $n$, on pose $u_n=\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ et $v_n=\dfrac{3}{(6n+1)(6n+4)}$.

1. Montrer que la série de terme général $v_n$ est convergente.
2. Calculer $u_{2n}+u_{2n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
3. Montrer que la série de terme général $u_n$ est convergente et que $\displaystyle\sum_0^{+\infty}u_n=\sum_0^{+\infty}v_n$.

**Exercice** 4 — Pour quelles valeurs de $a\in\mathbb{R}_+^*$ la série de terme général $u_n=\dfrac{\cosh(n)}{a^n}$ converge-t-elle ?

**Exercice** 5 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=u_0+\cdots+u_n$ et $v_n=\dfrac{u_n}{S_n}$.

1. Montrer que si la série de terme général $u_n$ est convergente, alors la série de terme général $v_n$ est convergente.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{k=1}^{n}(1-v_k) = \frac{u_0}{S_n}$.
3. On suppose que la série de terme général $v_n$ est convergente.
   (a) Quelle est la nature de la série de terme général $\log(1-v_n)$ ?
   (b) Montrer que la série de terme général $u_n$ est convergente.

**Exercice** 6 — Soient $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs. Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ la série de terme général $\frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}$ converge-t-elle ?

**Exercice** 7 — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de terme général $v_n$ est divergente.
2. La série de terme général $u_n$ est-elle convergente ?

**Exercice** 8 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes. On pose, pour $n > 0$, $v_n = u_n + u_{n+1} + \cdots u_{2n}$.

1. On suppose que $u_n = a^n$, avec $a \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que la série de terme général $u_n$ et la série de terme général $v_n$ sont de même nature.
   (b) Si la série de terme général $v_n$ est convergente, calculer sa somme.
2. On suppose que $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de terme général $v_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

**Exercice** 9 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? lesquelles sont fausses ? Justifier la réponse.

1. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la suite $(u_n)$ est décroissante et a pour limite 0, alors la série de terme général $u_n$ est convergente.
2. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général $u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)$ est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général $u_n$ est convergente, alors la série de terme général $\sqrt{u_n}$ est convergente.
4. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général $u_n$ est convergente, alors la série de terme général ${u_n}^2$ est convergente.
5. Si $\lim_{n\to+\infty}((-1)^n n u_n) = 1$ alors la série de terme général $u_n$ est convergente.
6. Si $\lim_{n\to+\infty}((-1)^n n^2 u_n) = 1$ alors la série de terme général $u_n$ est convergente.

**Exercice** 10 — Démontrer, à l'aide d'un développement limité, que la suite de terme général $u_n$ est convergente, avec $u_n = \sin(n\pi + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$.

**Exercice** 11 — Etudier, en fonction du paramètre $\alpha > 0$, la convergence des séries de terme général :

$$(a)\ \ n^{2-\alpha}\cos(\frac{1}{n})\,;\ (b)\ \ \alpha^{\frac{n+\sqrt{\ln n}}{2}}\,;\ (c)\ \ \frac{(-\alpha)^n}{\ln n}.$$

**Exercice** 12 — Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur $[-1,1]$ telle que $f(0)=0$, $f'(0)=f''(0)=1$. Etudier les séries de terme général

$$(a)\ \ f(\frac{1}{n})\,;\ (b)\ \ f(\frac{1}{n^2})\,;\ (c)\ \ f(\frac{(-1)^n}{n})\,;\ (d)\ \ f(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})\ \text{(ici } f \text{ est de classe } C^3).$$

**Exercice** 13 — Former le produit des séries de terme général $u_n$ et $v_n$ où

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

**Exercice** 14 — Soit $u_n$ une suite positive telle que la série de terme général $u_n$ converge. On pose $v_n = \dfrac{1}{1+n^2u_n}$.
Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la série de terme général $v_n$ est divergente.

**Exercice** 15 — Soient $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\sigma$ l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sigma(3p-2) = 2p-1\ ;\ \sigma(3p-1) = 4p-2\ ;\ \sigma(3p) = 4p.$$

1. Montrer que $\sigma$ est une bijection.
2. Comparer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

**Exercice** 16 — Calculer, si elles existent, les sommes des séries de terme général

$$(a)\ \ \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}\ (n>0)\,;\ (b)\ \ \ln(1-\frac{1}{n^2})\ (n>1)\,;\ (c)\ \ \arctan(\frac{1}{2n^2})\ (n>0).$$

**Exercice** 17 — Etudier la nature des series dont voici le terme général

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$ | 2) $(-1)^n\frac{1+n}{n}$ | 3) $\frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}$ | 4) $\frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ |
| 5) $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ | 6) $\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ | 7) $\frac{(-1)^n}{2n+\cos(n\pi)}$ | 8) $\frac{n+3}{(-1)^n\sqrt{n}-3n}$ |
| 9) $(-1)^n\cosh(\frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n})$ | 10) $\ln\left(n\cosh(\frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n})\right)$ | 11) $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$ | 12) $\left(\frac{1+n(2-i)}{n(3-2i)-3i}\right)^n$ |