Université Denis Diderot (Paris VII) **2008-2009**
CM 3 **Groupe Concours**

Feuille 6
Suites et Séries de fonctions

Exercice 1 — Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions définies par :
1) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ sur $[0,1]$; 2) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ sur $[0,1]$; 3) $f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{1+nx}$ sur $\mathbb{R}^+$;
4) $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $[0,\pi]$; 5) $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$ sur $[0,\pi]$; 6) $f_n(x) = (1-x)x^n$ sur $[0,1]$

Exercice 2 — Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes sur un segment $[a,b]$ et convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f continue sur $[a,b]$. Montrer qu'alors la convergence de la suite de fonctions est uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 3 — Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé , l'application $F_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x,y)$ est continue.
- Il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x,y) - F(x,y')| \leq k\,|y-y'|$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = F(x,0)$ et $f_n(x) = F(x, f_{n-1}(x))$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que les fonctions f_n sont continues pour tout n entier.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
4. Déduire de ce qui précède que la fonction limite f est continue sur $\mathbb{R}$;

Exercice 4 — Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \dfrac{xe^{-n^2x}}{1+n^2x}$.

1. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On dit que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est **simplement convergente sur** $\mathbb{R}_+$.
2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \text{Sup}\ \{|f_n(x)|,\quad x \in \mathbb{R}_+\}$ et $x_0 = (-1+\sqrt{5})/2$.
   (a) Montrer que f_n atteint la valeur u_n en l'unique point x_0/n^2.
   (b) En déduire une expression simple de u_n en fonction de x_0 et n.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge. On dit que la série de fonction $(\sum f_n)$ est **normalement convergente sur** $\mathbb{R}_+$**.**
4. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer la majoration suivante, en remarquant que $1 + n^2x \geq n^2x$:
$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\ x \in \mathbb{R}_+ \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}. \tag{1}$$
5. Quelle est la nature de la série de terme général $1/n^2$? La majoration (**??**) suffit donc à montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est normalement convergente : c'est une démonstration plus simple que celle de la question 2.

6. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que la fonction f ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5 — Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

1. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
2. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose $u_n = \text{Sup}\ \{|f_n(x)|,\quad x \in \mathbb{R}_+\}$. Calculer u_n.
3. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
4. Soit ε un réel strictement positif. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Exercice 6 — Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1+nx)}$.

1. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle convergente en 0 ? Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
2. On fixe un réel strictement positif ε. Soit $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction inverse : $h(x) = 1/x$.
   - Montrer que la fonction h est bornée sur $[\varepsilon, +\infty[$.
   - Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur $[\varepsilon, +\infty[$.
   - Montrer que la fonction f est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$.
3. Peut-on déduire de la question précédente les assertions suivantes ? Justifier votre réponse.
   - La fonction h est bornée sur $]0, +\infty[$.
   - la série de fonction $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur $]0, +\infty[$.
   - La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

On dit que les propriétés "être bornée " ou "être normalement convergente" sont des propriétés **globales**, tandis que la propriété "être continue" est **locale**. La propriété "être dérivable" est également locale.

Exercice 7 — Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(\frac{x}{n})$.

1. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}$? On appelle f la fonction somme de la série $(\sum f_n)$.
2. Soit a un réel strictement positif. Montrer que la série de fonction $(\sum f_n)$ est normalement convergente sur l'intervalle $[-a, a]$.
3. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 8 — Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Etude de la série de fonctions $(\sum f_n)$.

(a) Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
   On pose $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Calculer $f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

2. Etude de la série de fonctions $(\sum F_n)$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $F_n(x)$.
   (b) Montrer que la série de fonctions $(\sum F_n)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
   On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
   (c) Exprimer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ sous forme d'une somme de série.
3. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
4. En déduire l'identité suivante :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 9 — On reprend les fonctions $f_n(x)$ de l'exercice **??**, définies sur $\mathbb{R}_+$. On note f la fonction somme de la série $(\sum f_n)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Rappelons que la série de fonctions $(\sum f_n)$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. On souhaite néanmoins calculer la limite de f en 0. On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+kx)} \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que f est positive et décroissante.
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $S_n(x) \leq f(x)$.
3. Montrer qu'on a $S_n(\frac{1}{n}) \geq \frac{1}{2}\, H_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Quelle est la limite de la suite (H_n) ? En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} f(\frac{1}{n}) = +\infty$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, en utilisant les questions 1 et 4.

Exercice 10 — Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. Soit alors $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Montrer que f est une fonction paire et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n' est normalement convergente sur $[-a, a]$. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
4. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ posons $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Montrer que $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{n+1}$.
5. Montrer que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$.