Université Denis Diderot (Paris VII) — **2008-2009**
CM 3 — **Groupe Concours**

Feuille 9
Equations et systèmes différentiels linéaires

Exercice 1 — Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y'(x)+4xy &= 0 \text{ pour un intervalle } I\subset\mathbb{R} &&(1)\\
xy'(x)-\alpha y(x) &= 0 \text{ avec } \alpha>0 \text{ sur } \mathbb{R} &&(2)\\
x(1+x^2)y'(x)-\alpha y(x) &= 0 \text{ sur } \mathbb{R} &&(3)\\
(1+x^2)y'(x)-(x-1)^2y(x) &= x^3-x^2+x+1 \text{ sur } \mathbb{R} &&(4)\\
y'(x)-\cos(x)y(x) &= \sin(x)\cos(x) \text{ sur } \mathbb{R} &&(5)
\end{aligned}$$

Exercice 2 — Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
y''-5y'+6y &= 0 &&(6)\\
y''+\omega^2y &= 0 &&(7)\\
y''-\omega^2y &= 0 &&(8)\\
y''-4y'+4y &= (x^2+1)e^x &&(9)\\
y''+y &= \cos^3(x) &&(10)
\end{aligned}$$

Exercice 3 — Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
y''-\frac{2x}{1+x^2}y'+\frac{2}{1+x^2}y &= 0 &&(11)\\
(x^2+1)y''-2y &= 0 &&(12)\\
y''-xy=0 & &&(13)\\
4x(1-x)y''+2(1-3x)y'-y &= 0 &&(14)
\end{aligned}$$

Exercice 4 — Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}
xy'+y-xy^3 &= 0 &&(15)\\
y'+3y+3y^2+2 &= 0 &&(16)\\
x^2y''+axy'+by &= k \text{ pour } x\in\mathbb{R}_+^*;\ \text{indication : poser } t=\ln x &&(17)\\
y''+(4e^x-1)y'+4e^{2x}y &= 0 \text{ pour } x\in\mathbb{R};\ \text{indication : poser } t=e^x &&(18)\\
(x^2+1)^2y''+2x(1+x^2)y'+y &= 0 \text{ pour } x\in\mathbb{R};\ \text{indication : poser } t=\arctan x &&(19)
\end{aligned}$$

Exercice 5 — Considérons le système différentiel suivant :

$$(E)\left\{\begin{aligned}
x' &= 8x-18y+27z\\
y' &= -3x+\tfrac{7}{2}y-6z\\
z' &= -4x+7y-11z.
\end{aligned}\right.$$

1. Écrire le système (E) sous la forme $X' = AX$, pour une certaine matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$. $X(t)$ sera le vecteur colonne formé par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
2. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
3. Soit $u(t)$, $v(t)$ et $w(t)$ les coordonnées de $Y(t)$. Montrer que u, v et w sont solutions d'un système différentiel particulièrement simple, que l'on résoudra.
4. Déterminer l'ensemble des solutions du système (E).

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A, on admettra que les valeurs propres de f sont 2, $-1/2$ et -1, et que $u = (-3/2, 1, 1)$, $v = (0, 3/2, 1)$ et $w = (1, 2, 1)$ sont des vecteurs propres respectivement associés à ces valeurs propres.

Exercice 6 — Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 12x - 10y + 5z \\ y' = & 10x - 8y + 5z \\ z' = & -10x + 10y - 3z. \end{array}\right.$$

Dans les deux cas suivants, déterminer l'unique solution du système telle que
- $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 2$ (sans calculs),
- $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 1$.

Exercice 7 — Résoudre le système différentiel suivant (on cherchera d'abord l'ensemble des solutions à valeurs complexes, puis celui des solutions à valeurs réelles) :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 7x - 4y + 2z \\ y' = & 13x - 6y + 6z \\ z' = & -3x + 2y. \end{array}\right.$$

Exercice 8 — Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & -x + 2y + 3z \\ y' = & 2x + 2y + 6z \\ z' = & x + 2y + z, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x' = & -x + 2y + 3z - 6t + 1 \\ y' = & 2x + 2y + 6z + 3t + 2 \\ z' = & x + 2y + z + 1. \end{array}\right.$$

Comme à l'exercice 1, on admettra que l'endomorphisme associé à la matrice du premier système admet une base de vecteurs propres (u, v, w), où $u = (1, 2, 1)$ est associé à la valeur propre 6, tandis que $v = (-2, 1, 0)$ et $w = (-3, 0, 1)$ sont associés à la valeur propre -2.

Exercice 9 —

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Trouver une base de chaque sous-espace propre de f. Trouver une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$T_{a,b} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a,\, b \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$ fixés. Exprimer la matrice de f dans la base $(e_1, \mu e_2, e_3 + \lambda e_1)$. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = T_{0,1}$.

3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & x - 3y + 4z \\ y' = & 4x - 7y + 8z \\ z' = & 6x - 7y + 7z. \end{array}\right.$$

Exercice 10 — Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 13x - 20y - 10z \\ y' = & 15x - 22y - 10z \\ z' = & -15x + 20y + 8z, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x' = & 13x - 20y - 10z - \cos t \\ y' = & 15x - 22y - 10z - \cos t \\ z' = & -15x + 20y + 8z + \cos t. \end{array}\right.$$

Comme à l'exercice 1, on admettra que l'endomorphisme associé à la matrice du premier système admet une base de vecteurs propres (u, v, w)*, où* $u = (-1, -1, 1)$ *est associé à la valeur propre* 3*, tandis que* $v = (2, 0, 3)$ *et* $w = (0, 1, -2)$ *sont associés à la valeur propre* -2.

Exercice 11 — On pose $A = \begin{pmatrix} 12 & -10 & 5 \\ 10 & -8 & 5 \\ -10 & 10 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A. En déduire une expression de la matrice $\exp(tA)$, pour tout t. (On ne calculera pas l'inverse de la matrice de passage.)
2. Soit $X_0 \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne. Montrer que $\exp(tA)X_0$ est solution de l'équation différentielle matricielle $X' = AX$. Retrouver les résultats de l'exercice 6.

Exercice 12 — On reprend les notations de l'exercice 9.

1. Donner une matrice diagonale D et une matrice triangulaire supérieure stricte N telles que $DN = ND$ et $T = D + N$.
2. Calculer N^2, puis $\exp(tN)$ pour tout t. Calculer $\exp(tT)$ pour tout t.
3. Donner une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$. En déduire une expression simple de $\exp(tA)$ pour tout t. (On ne calculera pas l'inverse de la matrice de passage.)
4. Retrouver le résultat de l'exercice 9.