Feuille 11
Intégrales à paramètre

Exercice 1 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t)dt$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1. Pour tout nombre réel x, exprimer $f'(x)$ comme intégrale à paramètre.
2. Montrer que la fonction f est de classe C^2.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.

Exercice 2 — Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 \cos^2 t + \sin^2 t)dt.$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Soit $x > 0$ tel que $x \neq 1$. Calculer $f'(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 3 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a - \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que l'on a $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$. En déduire l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)dt$.

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{2} y$.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 —

1. Montrer que pour tout réel x on a $\lim_{t \mapsto 0} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} = x$. En déduire que l'application $\varphi : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x,t) = \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}$ pour $t > 0$ et $\varphi(x, 0) = x$ est continue.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)} dt$ est convergente pour tout x réel. On note $F(x)$ cette intégrale.
3. Montrer que la fonction F ainsi définie est impaire et continue.
4. Montrer que la fonction F est de classe C^1.
5. Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 1$. On pourra utiliser la décomposition suivante :
$\frac{1}{(1+T)(1+aT)} = \frac{1}{1-a} \left(\frac{1}{1+T} - \frac{a}{1+aT} \right)$.

6. Calculer $F(0)$ et déduire de ce qui précède une expression explicite de la fonction F (on pourra faire le calcul d'abord pour $x > 0$).

Exercice 6 — **Calcul de** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^- tx}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation $y + y'' = \dfrac{1}{x}$.
3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est la seule solution de l'équation différentielle $y + y'' = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ ayant une limite finie en $+\infty$.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, les intégrales impropres $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ sont convergentes.
6. Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x} dt.$$
7. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7 — **La fonction Gamma.**

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale impropre $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; en déduire la valeur $\Gamma(n)$ pour n entier strictement positif.
3. Montrer que la fonction Γ est de classe C^2 et convexe. En déduire que Γ atteint son minimum en un point de l'intervalle $]1, 2[$.
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}(x\Gamma(x)) = 1$ et dessiner l'allure du graphe de Γ.
5. On définit, pour $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $u_n(x) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $[u_n(x)](t) = e^{-nt} t^{x-1}$.
   (a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 0$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} [u_n(x)](t) dt$ est convergente et que l'on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} [u_n(x)](t) dt = \frac{1}{n^x}\Gamma(x)$.
   (c) En déduire l'égalité
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \zeta(x)\Gamma(x),$$
   où ζ désigne la fonction de Riemann, définie comme somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.